التحليل الرياضي

التوابع ذات متغيرات حقيقية متعددة

الجزء الاول

1

تأليف :

ج . شيلوف

تعريب

أبو بكر خالد سعد الله

ديوان المطبوعات الجامعية

الجزائر

1983

تمهيد(*)

يمكن اعتبار هذا الكتاب بمثابة تتمة لكتاب « التحليل الرياضي (التوابع لمتغير واحـد) » لنفس المؤلـف، المنشـور(**) في دار « مير » (مـوسكـو 1973). احتفظنا هنا بنفس المبادىء الأساسية التي سرنا عليها في الكتاب السالف الذكر: طبقاً للاسلوب الحديث فإن التحليل الرياضي يظهر في نظام على جانب كبير من التنظيم للبنيات والتجريدات ذات المستويات المختلفة، وهي كلها مرتبطة فيما بينها وبالتطبيقات ارتباطاً وثيقاً. تؤدي الانجازات المتعاقبة لهذا المبدأ في المؤلفات العلمية مثل عناصر الرياضيات، لِـ ن. بور باكي، الى عرض استنتاجي محض للنظرية؛ اما في الكتب البيداغوجية فإن العرض الاستقرائي غالبا ما يكون مفضلا على غيره لانه يسمح للقاريء بتتبع تكوين المفاهيم التي تزداد شيئاً فشيئاً تجريداً وتمكنه ايضا من ادراك ضرورة القيام بالتعميات. ذلك هو المبدأ الذي تبنيناه في كتابنا. من الناحية الشكلية فإن الفصلين « المكاملة والاشتقاق » و« الهندسة التفاضلية التقليدية » ليسا ضروريين في دروسنا هذه ـ إذ نحصل على النتائج الرئيسية الواردة في هذين الفصلين كحالات خاصة من نظريات اكثر عمومية وشمولا (ذلك ما سنراه مستقبلا في الكتاب)؛ ورغم ذلك فإننا قررنا ان يسبق هذان الفصلان نظريات اكثر تجريداً حتى يتسنى للقاريء ادراكه لزوم ظهور بعض المفاهيم العامة مثل الفضاء الريماني أو الشكل التفاضلي على منـوعـة، وحتى يكـون القـاريءمستعـدا لإستخـدامهـا في التطبيقات. يهدف تشكيل هذه الفصول الى نفس الغرض: على سبيل المثال فإن نظرية السطوح القابلة للنشر التي تمثل احد المواضيع المفضلة في دروس السطوح القابلة للنشر التي تمثل احد المواضيع المفضلة في دروس الهندسة

(*) ترجم هذا الكتاب عن النسخة الفرنسية الصادرة عن دار « مير » سنة 1975، اما النسخة الاصلية (بالروسية) فقد صدرت سنة 1972. (المترجم).

(**) الحديث هنا عن النسخة الفرنسية للكتاب، اما النسخة الاصلية (بالروسية) فقد صدرت سنة 1969 و1970 (الكتاب يقع في جزءين). هذا وقد قام ديوان المطبوعات الجامعية (الجزائر) بتعريب الكتاب، وهو الآن تحت الطبع. (المترجم).

التفاضلية تصبح عندنا مجرد مرحلة عابرة، في حين تقوم بالادوار الرئيسية معاملات الترابط لريمان ـ كريستوفال.

يتألف هذا الكتاب، كما هو الحال في « التوابع لمتغير واحد »، من ثلاثة اقسام. يوجد القسمان الاولان « الحساب التفاضلي » و« من الفضاءات الشعاعية الى المنوعات » الآن بين يدي القاريء، اما القسم الثالث « التحليل في المنوعات » فسيصدر في المستقبل(*).

يعرض الفصل الاول نظرية اشتقاق التوابع لعدد منته أو غير منته من المتغيرات. إن اهمية الحساب التفاضلي للتوابع المتعددة المتغيرات غنية عن التذكير؛ الّا ان الحساب التفاضلي للتوابع في الحالة التي يكون فيها عدد المتغيرات غير منته (وعلى وجه التحديد، التوابع لنقط من فضاء نظيمي) يمكن هو الآخر استخدامه لسد حاجيات التحليل التقليدي، مثلا، في دراسة حلول المعادلات التفاضلية العادية (ودراسة القيم القصوى لهذا النوع من التوابع يؤدي الى مسائل حساب التغيرات).

خُصص الفصل الثاني للمشتقات ذات الرتب العالية. فكما هو الحال بالنسبة للتوابع ذات متغير واحد، نجد ان المشتقات من الرتب العالية تسمح بوصف اكثر دقة (بالمقارنة مع المشتق الاول) لسلوك التابع بجوار نقطة معطاة. هناك، زيادة على ذلك، الكثير من التطبيقات الاخرى لهذه المشتقات، إذ تبيّن مثلا بأن المسألة التقليدية لإنسجام جملة تامة (أو كاملة) من المعادلات ذات المشتقات الجرئية مسألة ظاهرية فقط لدى إعتبارها كمسألة حل معادلة تفاضلية عادية (لكن بمتغير مستقل متعدد الابعاد) لا تتطلب سوى تناظر المشتق الثاني للحل المعبّر عنه بدلالة الطرف الثاني للمعادلة.

ننشيء في الفصل الثالث نظرية المكاملة. يمثل القسم التجريدي من النظرية تعميما لتكامل ريمان الى حالة « الفضاء المشحون » أي فضاء متري

(*) لا ندري لحد الساعة هل نشر هذا القسم ام لا. (المترجم).

مزود بقياس جمعي. إننا لا نُدخل، كما هو الحال في كتاب «التوابع لمتغير واحد» تكامل لوبيغ، إذ اننا لا نكامل سوى التوابع المستمرة أو التوابع التي لديها مجموعة «صغيرة» من نقاط التقطع؛ وعليه فإننا نستغني عن القياسات σ ـ الجمعية. نعالج، كتطبيق، نظرية قياس الاحجام في الفضاء المتعدد الابعاد ونظرية قياس السطوح (في مختلف مفاهيمها)؛ هذا وقد أولينا اهتماما خاصا للتكاملات الموسعة للسطوح والاحجام.

استخدمنا التحليل الشعاعي في الفصل الرابع كلغة نعبّر بها عن الروابط القائمة بين العمليات التكاملية والتفاضلية على التوابع المتعددة المتغيرات. نعالج العمليات التفاضلية الرئيسية (التدرج، التفرق، الدوار) من وجهة النظر المتداولة أي ككثافة لتوابع جمعية معينة في الساحة المعتبرة؛ علما اننا واصلنا تقديم النظرية الى ان بلغنا المسألة المعاكسة، أو العكسية، (أي استرجاع حقل إنطلاقا من تفرقه ودواره). هناك جزء كبير من هذا الفصل يدور في الفضاء الثلاثي البعد، وذلك نظرا للطابع المميز لتعريف الدوّار فيه.

نستهل القسم الثاني من الكتاب بالفصل الخامس «الهندسة التفاضلية التقليدية» التي تهتم على وجه الخصوص بالترابط المولد على سطح بمسافة الفضاء الاقليدي الذي يحتويه، كما يهتم ايضا بالخطوط الجيوديزية والانسحاب مع العلم ان المصطلحين الاخيرين متصلان بالترابط. ندرك شيئاً فشيئاً، بفضل تطوير هذه الانشاءات، انه ليس من الضروري استعادة مسافة سطح من الفضاء الاقليدي الذي يحتويه؛ وهكذا فإن الانحناء الثابتيتحقق على المستوى وسطح الكرة والمجسم الزائدي، حيث ان مسافة هذا الاخير ليست مستنتجة من الفضاء الاقليدي الذي يحتويه بل من شكل تربيعي مربعه سالب. يفتح ذلك الباب مباشرة على الفضاءات الريمانية (الفصل 6). نتبين في الحالة العامة لفضاء ريماني كيفي ان الانحناءالثابت يتحقق دائما على المستوى (المتعدد الابعاد) وسطح الكرة (المتعددة الابعاد) والمجسم الزائدي (المتعدد الابعاد) حيث ان مسافة هذا الاخير

مستنتجة من شكل تربيعي مربعه سالب لكنه موجب على المجسم الزائدي نفسه.

تحتل الاشكال التفاضلية ذات الدرجات الكيفية المكانة الاولى من الفصل السابع؛ ذلك ان هذه الاشكال تستخدم في صياغة النظريات التكاملية من نمط ستوكس وكذا في طرح المسألة العكسية المعممة للتحليل الشعاعي طرحا سليما: على وجه التحديد فإن هذه المسألة تتمثل في استعادة شكل انطلاقا من تفاضليته وتفاضليته القرينة.

اما الترقيم المتبع في الكتاب (ذي الجزءين) المشار اليه اعلاه؛على سبيل المثال فإن الرمز «6 .32 ـ ب» يعني «الفصل 6، الفقرة 2، النقطة 3، النقطة الفرعية ب». وضعت هذه الرموز في مستهل عناوين الصفحات، وهذا من شأنه تسهيل العثور عن النص المطلوب. يكثر في هذا الكتاب الاعتماد على المرجعين التاليين للمؤلف «التحليل الرياضي)التوابع لمتغير واحد)» الجزءان الاول والثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، (تحت الطبع الآن) و«التحليل الرياضي (الفضاءات الخطية ذات الابعاد المنتهية)» (الجزءان I، II، موسكو 1969، بالروسية). نشير لهذين المرجعين برموز مماثلة للمتخذة هنا، مسبوقة بالحرف ي و ل على التوالى.

المؤلف

القسم الاول

الحساب التفاضلي والتكاملي

الفصل 1

المشتقات ذات الرتبة الاولى

هدفنا في هذا الفصل هو تناول الحساب التفاضلي للتوابع التي ينتمي متغيرها المستقل الى فضاء ذي عدة ابعاد؛ لن نعتبر الآن آلا المشتقات ذات الرتبة الاولى. إن الفكرة الرئيسية تكمن في الخطية والرجوع اليها، فهي تتمثل في استخراج الجزء الخطي الرئيسي من تزايد التابع المعتبر، الامر الذي يسهل الدراسة المحلية لتابع بتقدير لامتناهيات في الصغر من رتب عالية. إن ما نسميه تابعا قابلا للاشتقاق هو، بالضبط، تابع يقبل الخضوع لهذه العملية. نشير الى ان دراسة الخواص البسيطة للتوابعالقابلة للإشتقاق بواسطة طريقة الخطوطية تتم بنفس الشكل سواء تعلق الامر بتابع ذي متغير واحد أو ذي عدة متغيرات حقيقية حتى إن كان عدد المتغيرات غير منته (بعبارة ادق، مهما كان التابع لنقطة من فضاء نظيمي). هناك بعض الفروق التي ستظهر بالنسبة لحالة متغير واحد، وذلك في نص نظرية المتوسط (§1 .4). ثم تأتي نظرية جديدة ليسلهذا مثيل في حالة متغير واحد، لتلعب دورا اساسيا: إنها نظرية التوابع الضمنية (§1 .5). نستطيع القول، دون مبالغة في اهميتها، انهذه النظرية تمثل النظرية الرئيسية في الحساب التفاضلي للتوابع المتعددة المتغيرات - ويرجع ذلك لمدى اهمية تطبيقاتها سواء في حالة البعد المنتهي أو في الحالة العامة (حالة البعد غير المنتهي): ارتباط حل معادلة تفاضلية عادية بوسيط (§1 .8)، البنية المحلية لتابع قابل للإشتقاق (§1 .6)، نظرية القيم القصوى المقيدة (§1 .7) وكذا تطبيقات اخرى سنتعرض لها ضمن الفصول الموالية.

§1.1 التوابع المستمرة

قبل الشروع في تقديم الحساب التفاضلي للتوابع ذات المتغيرات الحقيقية المتعددة، يستحسن التذكير ببعض التعاريف الاساسية الخاصة بنظرية التوابع المستمرة.

11.1 . ليكن $y = f(x)$ تابعا معرفا على مجموعة X يأخذ قيمة في مجموعة . نستعمل في المستقبل احد الرموز التالية:

$$y = f(x), \quad y: X \to Y,$$
$$y = f(x): \quad X \to Y,$$
$$y = f(x) \quad (X \to Y)$$
$$x \to y = f(x),$$
$$x \to f(x),$$

يخصص الرمزان الاخيران الى الحالة التي يكون فيها X وY معرفين في النص. إذا وجب التأكيد على ان التابع $f(x)$ معرف على مجموعة جزئية $E \subset X$ ويأخذ قيمة في مجموعة جزئية $F \subset Y$فإننا نتخذ ايضا الرمز:

$$y = f(x): \quad (E \subset X) \to (F \subset Y),$$

أو بازالة الاقواس:

$$y = f(x): \quad E \subset X \to F \subset Y.$$

نقول عن تابع $f(x)$ إنه **عددي** عندما يكون $Y \subset R_1$ (المستقيم العددي). كما نقول عن هذا التابع إنه **حقيقي** (بعبارة ادق، ذو قيم حقيقية). إذا كان $Y \not\subset R_1$ فإننا نصطلح على تسميته $f(x)$ **تطبيقيا**. إذا كان Y فضاء شعاعيا (ي 11.12)، مثلا $Y = R_n$ (الفضاء الحقيقي ذي البعد-n)، فإن التابع $f(x): X \to Y$ يسمى تابعا **شعاعيا**. وإذا كان X جزءا من R_1. فإننا نسمي $f(x)$ **تابعا لمتغير حقيقي**. ثم إذا كانت X ساحة من R_n، فإننا نسمي $f(x)$ تابعا لـ n **متغيرا حقيقيا**؛ الواقع انه يجب من اجل ذلك اختيار احداثيات $x_1, \ldots, x_n$ لنقطة x بالنسبة لأساس من اسس الفضاء R_n

لكي تتكون لدينا فكرة هندسية حول تابع عددي لمتغير حقيقي، اعتدناعلى رسم خط بيان هذا التابع بنقل قيمة $f(x)$ من اجل كل نقطة x

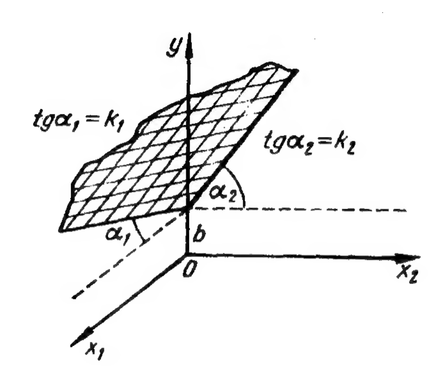
في ساحة تعـريفـه، في اتجاه محور العنـاصر y. في حـالـة تـابـع عـددي $f(x_1, x_2)$ لمتغيرين حقيقيين، يمكننا، مهما كانت النقطة (x_1, x_2) في المجموعة X من المستوى R_2، نقل القيمة $f(x_1, x_2)$ في اتجاه المحور الثالث أي محور العناصر y. إن خط بيان تابع لمتغير هو، اعتياديا، منحن؛ اما خط بيان تابع عددي لمتغيرين فيمثل، على الاقل فيما يخص التوابع البسيطة، فهو سطح يمكننا رسمه بمراعاة قواعد «الرسم الافقي».

امثلة. أ. إن بيان تابع من الدرجة الاولى $y = k_1x_1 + k_2x_2 + b$ مستوٍ. يسمى العددان k_1 وk_2 المعاملين الزاويين للمستوي. إن التفسير الهندسي لهذين العددين واضح من الرسم 1.1ـ1.

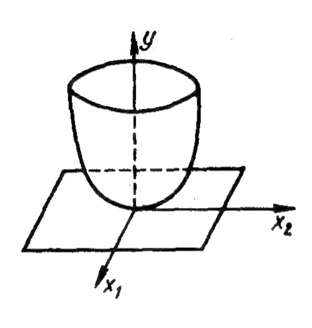
ب. إن بيان التابع من الدرجة الثانية $y = x_1^2+x_2^2$ مجسم مكـافيء دوراني (مـن اجـل $y = a_1x_1^2+a_2x_2^2$ حيـث $0<a_1$ و $0<a_2$ نجد ان البيان هو مجسم مكافيء ناقصي) مبين في الرسم 1.1ـ2.

ج. إن بيان التابع من الدرجة الثانية $y = x_1^2-x_2^2$ سطح في شكل سرج يسمى مجسما مكافئياً زائديا؛ إذا كان محور العناصر y متجها نحو الاعلى فإن المقاطع الشاقولية للسطح قطوع مكافئة والمقاطع الافقيةقطوع زائدية (الرسم 1.1ـ3).

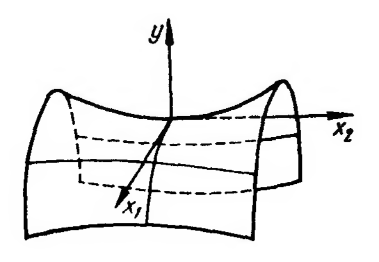
في حالة توابع ذات ثلاثة متغيرات أو اكثر فإن ما يسمى «بيان» التابع هو بطبيعة الحال مجموعة النقاط $((x_1,...,x_n, f(x_1,...,x_n))$ حيث $x \in X$، وهي مجموعة جزئية من الفضاء ذي البعد $n+1$. نلاحظ ان هذه التسمية مطابقة للتعريف العام للبيان الوارد في ي2 .38؛ الّا انه من الصعب ان نحصل على فكرة هندسية لهذا البيان؛ في مثل هذه الحالات فإنه ينبغي ان تحل البداهة الهندسية محل المنطق. هذا مع الإشارة الى ان الخطوط البيانية يمكن الاستغناء عنها في حالة متغيرين وحتى في حالة متغير واحد على الرغم من انه ليس هناك من ينكر فائدتها.



الرسم 1.1_1



الرسم 1.1_2



الرسم 1.1_3

د . نستطيع احيانا ان نتصور، هندسيا، تابعا وذلك باعتبار خطوط (أو سطوح) مستواة. خط (سطح) مستوى تابع $y = f(x)$ هو المحل الهندسي للنقاط التي يأخذ عندها التابع نفس القيمة $y = y_0$. وهكذا فإن خطوط مستوى التابع $f(x) = \rho(x,a) = |x-a|(R_2 \rightarrow R_1)$ هي (الرسم 1.1_4) الدوائر المتمركزة في النقطة a (وكذا النقطة a ذاتها حيث يأخذ التابع **القيمة** المنعدمة). إن خطوط مستوى التابع:

$$f(x) = \rho(x, a) + \rho(x, b) \ (R_2 \rightarrow R_1)$$

هي الرسم 1.1ـ5) القطوع الناقصة المعرفة ببؤرتيها a وb (وكذا القطعة المستقيمة التي تصل هاتين البؤرتين)؛ اما خطوط مستوى التابع $f(x) = \rho(x,a)-\rho(x,b)$ (انظر الرسم 1.1ـ6) فهي القطوع الزائدة المعرفة ببؤرتيها a وb (وكذا محور تناظر هذه القطوع ونصفا مستقيمين)؛ واما خطوط مستوى التابع

$$f(x) = \rho(x, a) \cdot \rho(x, b) \ (R_2 \to R_1)$$

فهي جماعة (الرسم 1.1ـ7) بويضات كاسيني (Cassini) يوجد من بينها لمنسكات (منحن ذو عروتين) بارنولي (انظر التمرين 6)؛ اخيرا فإن خطوط مستوى التابع

$$f(x) = \rho(x, a)/\rho(x, b) \ (R_2 \to R_1)$$

فتشكل جماعة دوائر مراكزها تقع على المستقيم ab مع محور تناظر النقطتين a وb (الرسم 1.1ـ8). نشير الى ان سطوح مستوى نفس التوابع عند تعريفها على R_3 تتولد عن دوران المنحنيات الموافقة لها حول المحور ab .

ر. كنا قلنا في ي38.2 في الحالة العامة ان خط بيان تابع $y = f(x) \ : E \subset X \to Y$ هو مجموعة النقاط $\{x, f(x)\}$ من الجداء الديكارتي لِـ X وY . لكنه من الصعب ان تتكون لدينا فكرة هندسية عن هذا البيان.

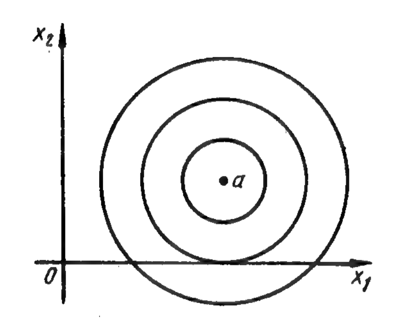
إذا كان $Y = X$ فإنه من المفيد احيانا ربط التابع $y = f(x)$ بحقل شعاعي: تمثل كل نقطة مصدر (أو بداية) شعاع (سهم) طرفه هو النقطة $x + f(x)$. يبين الرسم 1.1ـ9 ، على سبيل المثال، الحقل الشعاعي الموافق للتابع:

$$f(z) = \frac{i}{2}z \ : R_2 \to R_2$$

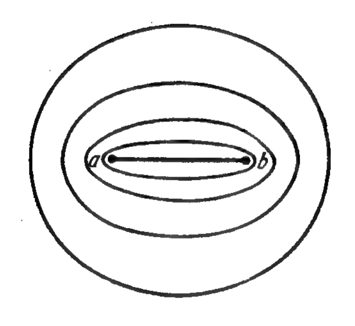
21.1 . نذكّر الآن بمفهوم الاستمرار (ي11.5).

أ. حتى نتمكن من مناقشة استمرار تابع $f(x)(X\to Y)$، يجب افتراض ان المجموعة X حيث عرفنا التابع وكذا المجموعة Y حيث ياخذ التابع قيمة فضاءان مترنين (ي11.3). نقول عندئذ ان التابع $y = f(x)$ مستمر عند $x = a$، عندما نستطيع من اجل كل $\varepsilon>0$، ايجاد $\delta>0$ بحيث يكون $\rho_Y(f(x),f(a))<\varepsilon$ من اجل كل $x\in X$ يحقق $\rho_X(x,a)<\delta$. يرمز هنا ρ_X لمسافة الفضاء X كما يرمز ρ_Y لمسافة Y. (عموما نرمز للمسافة بين نقطتين من فضاء متري M بـ ρ، وإذا توجب علينا الاشارة الى الفضاء نرمز لهذه المسافة بـ ρ_M). هناك تعريف آخر يكافىء السابق: يكون التابع $f(x)$ مستمرا عند $x = a$ عندما تتحقق العلاقة $f(x_m) \to f(a)$ مهما كانت المتتالية $x_1,\ldots,x_m,\ldots$، المؤلفة من نقاط في المجموعة X، المتقاربة نحو النقطة a. كنا قدمنا البرهان على تكافؤ التعريفين السابقين ضمن ي11.5، وسوف لن نعود لذلك هنا.

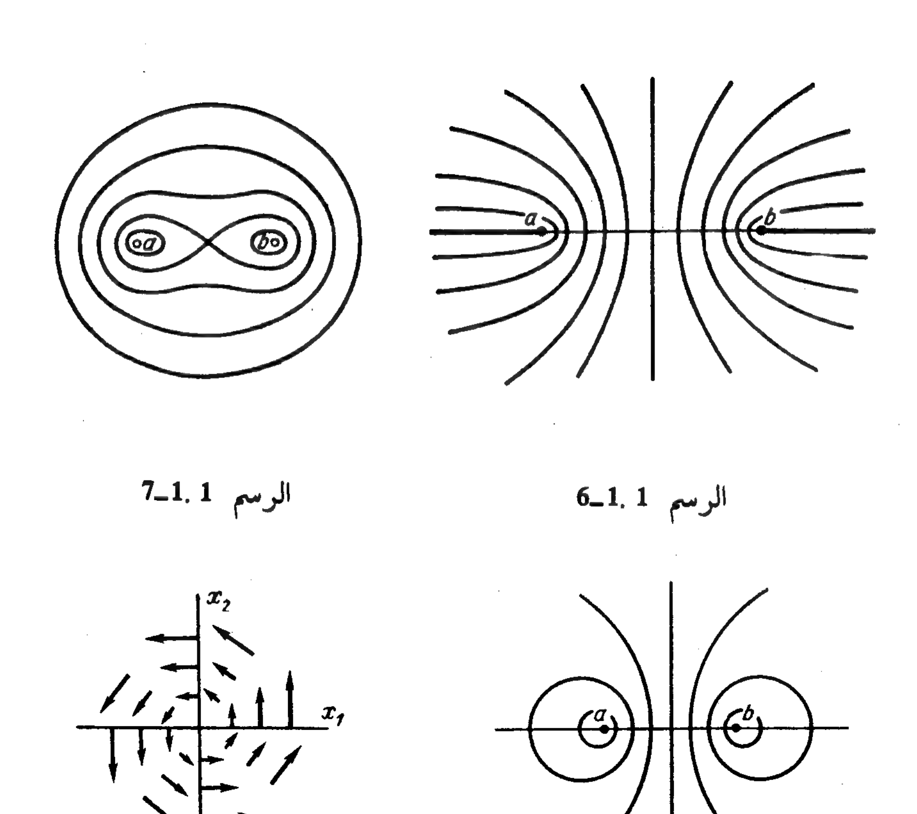
نقول عن تابع $f(x)(X\to Y)$ إنه مستمر على المجموعة X إذا كان مستمرا عند كل نقطة من X.



الرسم 1.1_4



الرسم 1.1_5



الرسم 6_1. 1

الرسم 7_1. 1

الرسم 8_1. 1

الرسم 9_1. 1

ب. إن ابسط مثال لتابع مستمر هو التابع الثابت $f(x)(X\to Y)$ الذي يأخذ عند كل نقطة $X \ni x$ نفس القيمة $Y \ni y_0$.

ج. مثال آخر: التابع العددي $(X\to R_1)$ $f(x) = \rho(x,a)$ حيث a نقطة ثابتة من الفضاء X. ينتج استمرار هذا التابع من متراجحة المثلث (راجع ي5. 21. ب).

د. التابع $f(x) \equiv x(X\to X)$ الذي يصل كل عنصر xمن الفضاء المتري X نفس العنصر x هو ابسط مثال لتابع مستمر غير ثابت.

ر. التوابع ذات المتغيرات المتعددة. لتكن المجموعات $X_1,\dots,X_n$؛ تسمى المجموعة X المؤلفة من العناصر ذات الشكل:

$$x = \{x_1,\dots,x_n\}, x_1\in X_1,\dots,x_n\in X_n$$

الجداء الديكارتي للمجموعات $X_1,\dots,X_n$ ونرمز له بـ $X_1\times X_2\times\dots\times X_n$. يمكن معالجة اي تابع $y = f(x):X\to Y$ كتابع لِـ n متغيرا $x_1,\dots,x_n$.

لتكن $X_1,\dots,X_n$ وY فضاءات مترية. يمكن حينئذ، باعتبار تابع $y = f(x):X\to Y$، تعريف «استمراره عند $x = a = \{a_1,\dots,a_n\}$ بالنسبة لمجموعة المتغيرات»؛ يعني ذلك اننا نستطيع، من اجل كل $\varepsilon>0$، ايجاد $\delta>0$ بحيث تؤدي المتراجحات $\rho(x_1,a_1)<\delta$، ...، $\rho(x_n,a_n)<\delta$ الى المتراجحة $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$. نعرف استمرار التابع1$y$($g$ بالنسبة للمجموعة $x_1,\dots,x_n$ على كل فضاء X بالطريقة الطبيعية المعتادة. يمكن تفسير الاستمرار بالنسبة للمجموعة عند $x = a$ بأنه الاستمرار المعتاد شريطة ان يكون الفضاء X مزوداً بمسافة لائقة؛ نستطيع مثلا استخدام التعريف:

$$\rho(\{x_1,\dots,x_n\},\{y_1,\dots,y_n\})=\max\{\rho(\ _1,y_1),\dots,\rho(x_n,y_n)\}. \quad (1)$$

نستعمل احيانا مسافات اخرى على X، مثل:

$$\rho(\{x_1,\dots,x_n\},\ \{y_1,\dots,y_n\})=\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,\ y_i) \quad (2)$$

$$\rho(\{x_1,\dots,x_n\},\ \{y_1,\dots,y_n\})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho^2(x_i,\ y_i)}. \quad (3)$$

من السهل ان نرى في جميع الحالات ان العلاقة المعتبرة ((1)،(2)،(3)) تعرف بالفعل مسافة X، وان استمرار $f(x)$ بالنسبة للمجموعة $x_1,\dots,x_n$ (هذا الاستمرار معرف بصفة مستقلة عن مسافة X) يكافيء استمرار $f(x)$ بالنسبة للمسافة المعتبرة.

31.1 . خاصيات التوابع المستمرة.

أ. هاك نظرية هامة:

نظرية حول استمرار تابع مركب. (ي51.5): ليكن $y = f(x)(X\to Y)$ تابعا معرفا على فضاء متري Xيأخذ قيمة في فضاء متري Y، ومستمرا عند نقطة $x = a$؛ وليكن $g(y)(Y\to Z)$ تابعا معرفا على الفضاء المتري Y يأخذ قيمة في فضاء متري Z ومستمرا عند $y = f(a)$. عندئذ يكون التابع المركب $\Phi(x) = g[f(x)]$ من X في Z (الذي يجب ان يكون معرفا بجوار النقطة a) مستمرا عند $x = a$.

يسمى التابع $g[f(x)]$ مركب (أو تركيب) التابعين $f(x)$ و$g(y)$. بما ان التابع العددي $\rho(x,a)(X\to R_1)$ مستمرا على الفضاء المتري X (رأينا ذلك في 21.1 ـ ج) فإن كل تابع من الشكل $g[\rho(x,a)]$، حيث $g(y)$ تابع مستمر من اجل $0\leqslant y$ (y متغير حقيقي) هو ايضا مستمر حسب النظرية السابقة.

ب. إذا كانت التوابع $f_1(x),\ldots,f_m(x),\ldots$ معرفة على نفس المجموعة X وتأخذ قيمها من فضاء متري Y وتشكل متتالية متقاربة على X، فإننا نستطيع تعريف على نفس المجموعة X التابع النهاية $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x):X\to Y$. إذا كان X فضاء متريا وكان تقارب $f_m(x)$ نحو $f(x)$ منتظما والتوابع $f_m(x)$ $(m = 1,2,\ldots)$ مستمرة فإن $f(x)$ مستمر ايضا (ي69.5).

ـ. نقول عن تابع $y = f(x)(X\to Y)$ ذي قيم في فضاء متري Yإنه محدود (على X) إذا شكلت الاعداد $\rho_Y(f(x'),f(x''))$ مجموعة محدودة عندما يرسم x' وx'' المجموعة X. إن المجموعة $Y(X)$ المؤلفة من كل التوابع المحدودة والمستمرة والمعرفة في الفضاء المتري X والآخذة قيمها في فضاء متري Y تصبح هي نفسها فضاء متري عند وضع:

$$\rho_{Y(X)}(f,\ g) = \sup_{x\in X} \rho_Y(f(x),\ g(x)).$$

إن كان Y تاما فإن الفضاء $Y(X)$ تام ايضا (ي32.12 ـ س).

د. ليكن X وY فضاءين متريين؛ نقول عن تابع $y = f(x)(X\to Y)$ إنه مستمر بانتظام (على X) إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon>0$، ايجاد $\delta>0$ بحيث تؤدي العلاقة $\rho_X(x',x'')<\delta$ الى العلاقة:

$\rho_Y(f(x'),f(x''))<\varepsilon$ (ي71.5ـ ب). إن كل تابع مستمر على متراص (أي فضاء متري متراص) X (ي19.3ـ أ) مستمر بانتظام (ي71.5ـ ب). إن مجموعة كل قيم تابع مستمر على المتراص X هو نفسه متراص في Y (ي61.5ـ أ) وبالتالي فهي محدودة.

إذا لم يكن X متراصا فإنه توجد توابع مستمرة لكنها غير محدودة كما توجد توابع مستمرة ومحدودة لكنها ليست مستمرة بانتظام على X (التمرينان 29 و30).

ر. نقدم الآن طريقة انشاء تطبيقات مستمرة سنستخدمها في المستقبل. لتكن X، Y، Z فضاءات مترية، و$z = \Phi(x,y):X\times Y\to Z$ تابعا محدوداً ومستمرا بانتظام على $X\times Y$، و$f(x)(X\to Y)$ تابعا مستمراً؛ عندئذ يكون التابع $\Phi(x,f(x))(Y\to Z)$ محدوداً و(بفضل أ) مستمرا. إذن فقد عرفنا التطبيق Ff بحيث $Ff(x) = \Phi(x,f(x))$ من الفضاء $Y(X)$ في الفضاء $Z(X)$. لنثبت انه مستمر. بالفعل، لدينا من اجل كل $Y(X)\ni\bar{f}(x) = \bar{f}$:

$$\rho_{Z(X)}(F\bar{f},\ Ff) = \sup_{x\in X} \rho_Z(\Phi(x,\ \bar{f}(x)),\quad \Phi(x,\ f(x))). \qquad (1)$$

من اجل $\varepsilon>0$ معطى، يمكننا، بفضل افتراض الاستمرار المنتظم للتابع $\Phi(x,y)$، ايجاد $\delta>0$ بحيث تؤدي المتراجحة: $\rho_{Y(X)}(\bar{f},f)<\delta$ اي $\sup_{x\in X} \rho_Y(\bar{f}(x),f(x))<\delta$ الى ان الطرف الثاني من (1) اصغر من ε، وهو المطلوب.

41. 1 . التوابع الخطية

أ. لننظر في الفضاء الشعاعي R_n ذي البعد n المزود بمسافة بواسطة نظيم (ي12. 13) ولنختر فيه اساساً. عندما نصل كل نقطة $x\ni R_n$ باحداثيتها x_kذات الدليل k المثبت $(k = 1,...,n)$ فإننا نحصل على تابع عددي مستمر وبالاضافة الى ذلك فهو خطي (ي12. 51) على R_n. إن اعم شكل تابع عددي خطي على R_n هو $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ حيث c_k $(k = 1,...,n)$ اعداد مثبتة.

ب. كنا قد راينا (ي12. 17) ان ابسط التوابع العددية المستمرةعلى فضاء شعاعي نظيمي، إذا استثنينا التوابع الثابتة، هي التابعيات الخطية.

نحن نعرف عن هذه التوابع بعض الامثلة. وهكذا عرفنا في الفضاء $R(b,a)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة على المجال $[a,b]$ التابعية الخطية: $x(t)\rightarrow F(x)$ التي تأخذ الشكل:

$$F(x) = \int_a^b D(t)x(t)dt$$

حيث $D(t)$ تابع مستمر معطى (ي12. 17 - ص). كما ان الجداء السلمي:

$$F(x) = (f,x)$$

في فضاء هيلبرتي حقيقي H (ي12. 14) حيث f شعاع مثبت من الفضاء H،يعتبر مثالا لتابعية خطية.

ج. بصفة عامة، من بين كل التوابع المستمرة العاملة من فضاء نظيمي Xفي فضاء نظظيمي آخر Y فإن ابسطها، إذا استثنينا منها التوابع الثابتة، هي المؤثرات الخطية المستمرة (ي12. 17)، أي التوابع المستمرة $A(x): X\rightarrow Y$ التي تحقق الشرط:

$$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1)+\alpha_2 A(x_2)$$

مهما كان x_1 وx_2 في X ومهما كان الثابتان α_1 وα_2.

من اجل كل مؤثرين خطيين فإن العبارة الخطية $A:X\to Y$ و$B:X\to Y$ وكل عددين α وβ فإن العبارة الخطية $\alpha A+\beta B$ معرفة كمؤثر خطي مستمر من X في Y يعمل وفق الدستور:

$$(\alpha A+\beta B)x = \alpha A(x)+\beta B(x)$$

إن الفضاء الشعاعي المؤلف من المؤثرات الخطية المستمرة $A:X\to Y$ المزود بالنظيم $\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|A(x)\|$ فضاء باناخي (نسبة لـ Banach) أي فضاء نظيمي تام. نرمز له بـ $L(X,Y)$.

إذا كان $X = R_1$، فإن $L(X,Y) = L(R_1,Y)$ يتطابق طبيعيا مع Y: نصل كل $Y\ni a$ بالمؤثر $L(R_1,Y)\ni A$ المعرف بالدستور $At = ta$ ($R_1\ni t$)، ثم إن كل مؤثر $L(R_1,Y)\ni A$ يعمل وفق الدستور:

$$At = At.1 = t.A(1) = ta$$

حيث $A(1) = a$. نرمز باختصار للفضاء $L(X,X)$ بـ $L(x)$.

د. نشير الى بعض المؤثرات الخطية التي لها صلة بالتفكيك الى مجموع مباشر. نذكّر حسب التعريف ان فضاء شعاعيا X يكون مجموعا مباشرا لفضاءاته الجزئية إذا تمكنا، من اجل كل $X\ni x$، من كتابة التفكيك:

$$X = X_1+\dots+x_n \;,x_1\in X_1,\dots,x_n\in X_n \tag{1}$$

وكان هذا التفكيك وحيدا، اي ان العلاقة:

$$x = x'_1+\dots+x'_n,\; x'_1\ni X_1,\dots,x'_n\in X_n$$

تستلزم العلاقات $x_1 = x'_1$، ...، $x'_n = x_n$

يكفي ان نثبت وحدانية التفكيك (1) من اجل الشعاع المنعدم فقط: إذا ادى التفكيك:

$$0 = h_1+\dots+h_n \;,h_1\in X_1,\dots,h_n\in X_n$$

الى العلاقة $h_1 = \ldots = h_n = 0$ فإن التفكيك (1) وحيد من اجل كل $x \in X$.

ليكن X فضاء شعاعيا مجموعا مباشرا لفضاءين جزئيين x_1 و x_2. عندئذ تكون المركبتان x_1 و x_2 لأي شعاع $x \in X$ تابعين لِـ x يمكن ان نرمز لهما بـ:

$$x_1 = P_1(x), \ x_2 = P_2(x)$$

نتأكد بسهولة من أن التابعين $P_1(x)$ و $P_2(x)$ خطيان؛ يسمى هذان التابعان مسقطان (أو مؤثرا اسقاط، أو مؤثران اسقاطيان) على الفضاءين الجزئيين X_1 و X_2 على التوالي. عندما يكون X فضاء شعاعيا نظيميا تاما، وكان الفضاءان الجزئيان X_1 و X_2 مغلقين فإن المؤثرين P_1 و P_2 مستمران (ي 12 .27- د). تبقى هذه النتيجة، بطبيعة الحال، قائمة مهما كان العدد (المنتهى) من الحدود في المجموع.

ر. بالعكس نستطيع انطلاقا من فضاءات شعاعية $X_1, \ldots, X_n$ انشاء فضاء شعاعي X يمثل مجموعها المباشر. للقيام بذلك نعتبر الجداء الديكارتي (ي 1 .21- د) للفضاءات $X_1, \ldots, X_n$ (وهي المجموعة المؤلفة من كل العناصر $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$، $x_1 \in X_1$، ... $x_n \in X_n$) وندخل عليها العمليتين الخطيتين المعرفتين كالتالي:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} + \{y_1, \ldots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}$$

$$\alpha\{x_1, \ldots, x_n\} = \{\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}$$

إن الفضاء X_k مطابق، بشكل طبيعي، للفضاء الجزئي $X \supset X'_k$ المؤلف من العناصر ذات الشكل:

$$\{0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots, 0\}, \ x_k \in X_k \qquad (2)$$

إذا كانت الفضاءات $X_n, 000, x1$ نظيمية، نستطيع تزويد X أيضاً بنظيم وذلك بوضع مثلاً.

مثلا :

$$\|x\| = \max\,(\|X_1\|,\ldots,\|x_n\|) \qquad (3)$$

بعد ذلك، إذا كانت الفضاءات X_1، ... X_n تامة فإن X ايضا تام لان الفضاءات الجزئية X_k' (المعرفة بـ (2)) تصبح فضاءات جزئية مغلقة في X.

س. ليكن X مجموعا مباشرا لفضاءات جزئية (مغلقة) منه $X = X_1+\ldots+X_n$، بحيث يكون $x = P_1x+\ldots+P_nx$ مهما كان $x \in X$، حيث تمثل P_1، ... P_n المؤثرات الاسقاطية الموافقة لِـ X_1، ... X_n؛ نعتبر، بشكل مماثل، Y مجموعا مباشرا لفضاءات جزئية (مغلقة) منه $Y = Y_1+\ldots+Y_m$ بحيث يكون $y = Q_1y+\ldots+Q_my$ مهما كان $y \in Y$، حيث تمثل Q_1، ... Q_m المؤثرات الاسقاطية الموافقة لِـ Y_1، ... Y_m. نضع:

$$A_{ij} = Q_iAP_j \quad (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,n)$$

تعمل المؤثرات A_{ij} من X في Y_i لكنه من الطبيعي اعتبار المؤثر A_{ij} على X_j فقط. تكوّن هذه المؤثرات المصفوفة المؤثرية $(n \times m)$:

$$\|A_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mn} \end{matrix} \right\|$$

لدينا من اجل

$$x = \sum_{j=1}^{n} P_jx \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j \equiv \sum_{j=1}^{n} P_jx_j, \qquad (5)$$

$$y_i \equiv Q_iy = Q_iAx = \sum_{j=1}^{n} Q_iAP_jx = \sum_{j=1}^{n} Q_iAP_jx_j = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j \qquad (6)$$

وهو ما يذكّرنا بالرمز المصفوفي المعتاد لمؤثر خطي من R_n في R_m يُبينالدستور (6) ان المؤثر A معين تماما بالمصفوفة $\|A_{ij}\|$. اضافة الى ذلك، يوافق كل مجموعة معطاة من المؤثرات الخطية المستمرة $A_{ij}:X_j \to Y_i$ ($j = 1,...,n$ ؛ $i = 1,...,m$) مـؤثـر خطـي مستمـر $A:X \to Y$ معـرف بالدستور:

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

او بعبارة اخرى:

$$y_i \equiv (Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

من السهل ان نرى بأن المصفوفة المؤثرية ($n \times m$) التي انشئت بالطريقة الواردة اعلاه تطابق المصفوفة $\|A_{ij}\|$. وهكذا فإن المؤثرات $A:X \to Y$ على صلة تقابلية طبيعية مع المصفوفات المؤثرية ($n \times m$):$\|A_{ij}\|$.

نشير بعد ذلك الى انه ائذا كان $A:X \to Y$ و$B:X \to Y$ مؤثرين خطيين مرفقين على التوالي بالمصفوفتين $\|A_{ij}\|$ و$\|B_{IJ}\|$، فإن كل عبارة خطية $\alpha A + \beta B$ توافقها بطبيعة الحال المصفوفة $\|\alpha A_{ij} + \beta B_{ij}\|$. وبالتالي فإن الصلة التقابلية المشار اليها آنفا تمثل تشاكلاً بين الفضاء الشعاعي المؤلف من المصفوفات المؤثرية ($n \times m$):$\|A_{ij}\|$ (المزود بالعمليتين الخطيتين المعتادتين).

ص. بصفة خاصة، وضمن فروض س، فإن الفضاء $L(X,Y)$ متشا كل مع المجموع المباشر للفضاءات $L(X_j,Y_i)$ البـالـغ عـددهـا mn. بـوضـع $n = 1$ نرى ان $L(X,Y)$ متشاكل مع المجموع المباشر للفضاءات $L(X,Y_i)$ التالغ عددها m وإذا كان $m = 1$ فإن $L(X,Y)$ متشاكل مع المجموع المباشر للمجاميع المباشرة للفضاءات $L(X_j,Y)$ البالغ عددها n.

ط. نفرض، الى جانب الفضاءين X وY المعتبرين في س، وجود فضاء

ثالث Z يمثل مجموعا مباشرا لفضاءات جزئية (مغلقة) منه $Z = Z_1+...+Z_p$. ليكن $B:Z\to X$ مؤثرا خطيا مستمرا؛ نستطيع حسب التفكيكين $X = X_1+...+X_n$ و$Z = Z_1+...+Z_p$ ان نصـــــل Z بالمصفوفة $\|B_{ik}\|$، $i = 1,...,n$ و$k = 1,...,p$. يعمل المؤثر AB من Z في Y؛ لدينا

$$ABz = A \sum_{j,k} B_{jk}z_k = \sum_{i,j,k} A_{ij}B_{jk}z_k,$$

بحيث ان $(ABz)_i = \sum_{j,k} A_{ij}B_{jk}z_k$. وبالتالي $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}B_{jk}$؛ وهذا يتماشى مع القاعدة المعتادة الخاصة بضرب المصفوفات العددية.

ع. يُطبق احيانا تمثيل المؤثرات الخطية بواسطة المصفوفات المؤثرية لدى البرهان على قابالية القلب لمؤثر من المؤثرات. ليكن، مثلا، $A:X_1\to Y_1$ و$B:X_2\to Y_2$ مؤثرين قابلين للقلب و $C:X_2\to y_1$ مؤثرا كيفيا؛ لنثبت ان المؤثر $S:X_1+X_2\to Y_1+Y_2$ المعرف بالمصفوفة:

$$\begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \qquad (7)$$

مؤثر قابل للقلب. نبحث، بصفة مماثلة لقلب مصفوفة مثلثية ثنائية البعد عن المؤثر المقلوب $S^{-1}:Y_1+Y_2\to X_1+X_2$ كمصفوفة مؤثرية مثلثية

$$\begin{Vmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{Vmatrix}$$

إذا طبقنا على المساواة المطلوبة

$$\begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{Vmatrix} = E \equiv \begin{Vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{Vmatrix}$$

قاعدة ضرب المصفوفات المؤثرية، نصل الى العلاقات:

$$AP = E_1, \quad BQ = E_2, \quad AR+CQ = 0$$

نستنتج من أولاها $P = A^{-1}$، ومن الثانية $Q = B^{-1}$. نضرب الثالثة في A^{-1} فنجد $R = -A^{-1}CB^{-1}$. وهكذا فإن المؤثر المعطى بالمصفوفة:

$$\begin{Vmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{Vmatrix}$$

يمثل المقلوب من اليمين للمؤثر S المعطى بالمصفوفة (7). من السهل ان نثبت ان نفس المؤثر يمثل المقلوب من اليسار لِـ S.

51.1 . عمليات على التوابع المستمرة.

أ. إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين معرفين على نفس المجموعة X ويأخذان قيمها في فضاء شعاعي Y، يمكننا تعريف، على X ايضا، تابع $y(x) = f(x)+g(x)(X \to Y)$ يساوي مجموع التابعين $f(x)$ و $g(x)$. عندما يكون X فضاء متريا و Y فضاء شعاعياً نظيمياً و $f(x)$ و $g(x)$ مستمرين، فإن الامر كذلك فيما يخص التابع $y(x)$ (ي12. 23ـ ب).

ب. إذا كان تابع $y(x)$ معرفا على مجموعة X ويأخذ قيمه في فضاء شعاعي Y وكان C مؤثرا خطيا من Y في فضاء شعاعي Z فإننا نستطيع تعريف على X التابع $z(x) = Cy(x)$. لنفرض ان X فضاء متريا و Y و Z فضاءين نظيميين، ولنفرض ايضا ان $y(x)$ و C مستمران. عندئذ يكون التابع $z(x)$ مستمرا هو الآخر (31.1ـ أ). مثلا، فإن المركبات $x_1 = P_1x$، ...، $x_n = P_nx$ لشعاع x في تفكيك مباشر $X_1+...+X_n$ لفضاء نظيمي تام X توابع مستمرة لِـ x (41.1ـ د).

ج. ليكن Y فضاء شعاعيا مجموعا مباشرا لفضاءات جزئية منه Y_1، ...، Y_n. عندئذ، من اجل كل تابع $y(x):X \to Y$، نعرف باستخدام

التوالي:

$\lambda(x)f(x) = <\lambda(x),f(x)>$ بالمفهوم المعتاد لضرب تابع $f(x)$ في العدد $\lambda(x)$.

$\lambda(70)f(x) = <\lambda(x),f(x)>$ بمفهوم ضرب عنصري جبر.

$\lambda(x)f(x) = <\lambda(x),f(x)>$ بمفهوم صورة الشعاع $f(x)$ بواسطة المؤثر $\lambda(x)$.

نؤكد على ان الجداء المعمم $b(x) = <\lambda(70),f(x)>$ تابع مستمر لِـ x عندما يكون $\lambda(x)$ و $f(x)$ مستمرين. ذلك لأن $b(x)$ تركيب لتابعين:

المساقط P_1، ...، P_n الموافقة لهذه الفضاءات n تابعا:

$y_n(x)=P_ny(x)(X\to Y_n)$، ...، $y_1(x)=P_1y(x)(X\to Y_1)$

إن كان Y، زيادة على ذلك، فضاء نظيميا تاما وكانت الفضاءات الجزئية Y_1، ...، Y_n مغلقة، فإن استمرار التابع $y(x)$ يستلزم، بفضل ب و1 .41- د، استمرار التوابع $y_k(x)$ $(k = 1,...,n)$. إن القضية العكسية تأتي مباشرة: إذا كانت $y_1(x):X\to Y_1$، ...، $y_n(x):X\to Y_n$ توبع مستمرة فإن التابع

$$y(x) \equiv \{y_1(x),...,y_n(x)\} = y_1(x)+...+y_n(x)(X\to Y)$$

هو ايضا مستمر حسب أ.

د. يمكن اعتبار جداءات مختلفة لتابعين $\lambda(x)$ و $f(x)$ معرفين على نفس المجموعة X. نستطيع مثلا تعريف هذا الجداء في الحالة التي يطبق فيها $f(x)$ المجموعة X في فضاء شعاعي Y، حيث $\lambda(x)$ تابع عددي. حاصل الجداء عندئذ هو تابع $(\lambda f)(x) \equiv \lambda(x)f(x)(X\to Y)$. هناك مثال آخر يوافق الحالة التي يأخذ فيها $\lambda(x)$ و $f(x)$ قيمها في جبر Y؛ تنتمي قيم الجداء حينئذ الى نفس هذا الجبر. يمكن ايضا تعريف جداء آخر من اجل $f(x):X\to Y$ و $\lambda(x):X\to L(Y,Z)$؛ يطبق التابع $\lambda(x)f(x)$ المجموعة

X في Z (يمثل Y وZ هنا فضاءين شعاعيين). إن خطية الجداء بالنسبة لكل عامل خاصية تشترك فيها كل هذه الامثلة.

لنقدم التعريف العام التالي.. نفرض اننا عرفنا على المجموع المباشر لفضاءين نظيميين Λ وF مؤثرا مستمرا $B(\lambda,f)$ (حيث $\lambda\in\Lambda$ و$f\in F$) خطياً بالنسبة لكل متغير من المتغيرين λ وF، يأخذ قيمة في فضاء نظيمي B؛ نسمي هذا المؤثر **الجداء المعمم** للعنصرين λ وf ونرمز $b = \langle\lambda,f\rangle$. ليكن اضافة لذلك، تابعان $\lambda(x):X\to\Lambda$ و $f(x):X\to F$؛ حينئذ نعرف التابع $\langle\lambda(x),f(x)\rangle(X\to B)$ المسمى **جداء معمما** للتابعين $\lambda(x)$ و$f(x)$. تدخل الامثلة الثلاثة السابقة في هذا الاطار إذا وضعنا على

$$x\to\{\lambda(x),f(x)\}\in\Lambda+F$$

$$\{\lambda,f\}\to\langle\lambda,f\rangle\in B$$

اما التابع الاول فهو مستمر حسب الفرض القائل ان $\lambda(x)$ و$f(x)$ مستمران وحسب ج؛ اما الثاني فهو مستمر حسب فرض استمرار التابع $\langle\lambda,f\rangle:\Lambda+F\to B$. إن الجداء $b(x) = \langle\lambda(x),f(x)\rangle$ مستمر حسب النظرية الخاصة باستمرار تابع مركب.

بصفة خاصه، فإن كل جداء من الجداءات الواردة اعلاه مستمر شريطة استمرار العوامل.

ر. إن النتيجتين أ و د قائمتان، بصفة خاصة، من اجل توابع عددية $X\to R_1$ مستمرة على فضاء متري X.

مثلا، نظرا لكون احداثيات نقطة $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$ من الفضاء $X = R_n$ توابع مستمرة لِـ x، والتابع $1/t(R_1\to R_1)$ مستمرا من اجل $t\neq0$، فإننا نرى، حسب أ و د و31.1ـ أ، بأن كثيرات الحدود والتوابع الناطقة للإحداثيات توابع مستمرة (باستثناء عند اصفار المقام وذلك فيما يخص التوابع الاخيرة فقط). يستنتج من 31.1ـ ب ان نهاية متتالية

كثيرات حدود متقاربة بانتظام على مجموعة $R_n \supset G$ تابع ($g \to R_1$) مستمر على G. نلاحظ ان القضية العكسية قائمة من اجل بعض المجموعات $R_n \supset G$: يمكن تمثيل كل تابع مستمر ($G \to R_1$)$f(x)$ كنهاية لمتتالية متقاربة بانتظام مؤلفة من كثيرات حدود؛ هذا يتحقق مثلا في المتراصات (ي45. 12).

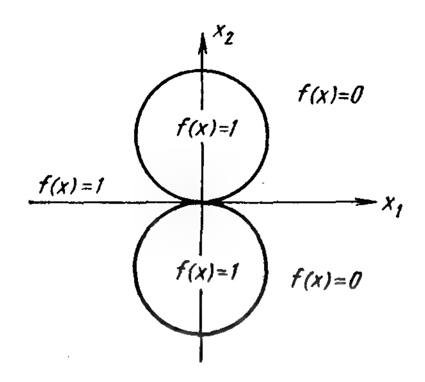
61. 1. إن ابسط نط تقطع تابع عددي لمتغير حقيقي ($R_1 \to R_1$) هو **نقطة تقطع من النمط الاول** حيث توجد النهايتان من اليمين ومن اليسار $f(x+0)$ و$f(x-0)$ مع عدم تساويهما. يمكن، بخصوص تابع عددي لِـ n متغيرا حقيقيا، اطلاق تسمية نقطة تقطع من النمط الاول نقطة a حيث يقبل التابع $f(x)$نهاية وفق كل نصف مستقيم يصل الى النقطة a مع عدم تساوي كل هذه النهايات. نذكر على سبيل المثال التابع لمتغيرين حقيقين

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}$$

وهو تابع يأخذ على كل نصف مستقيم $x_1 = t \cos\alpha$، $\sin\alpha$ $x_2 = t$ $(0<t<\infty)$ القيمةالثابتة $\cos^2\alpha$. لكن تواجهنا هنا العقبة التالية: نعلم ان كل تابع لمتغير واحد يكون مستمرا عند نقطة a إذا (وفقط إذا) كانت النهايتان من اليمين ومن اليسار عند a موجودتين ومساويتين لقيمة التابع عند النقطة a (ي42. 5). الّا ان وجود النهايات وفق كل شعاع يصل الى النقطة a وتساويها لا يؤدي بالضرورة الى استمرار التابع عند a في حالة تابع لِـ n متغيرا. مثلا، فإن التابع ($R_2 \to R_1$)$f(x_1, x_2)$ المساوي لِـ 1 على محور العناصر x_1 وكذا على دائرتين واقعتين في النصفين الاعلى والادنى على التوالي في المستوى يمثل المحور المذكور مماسا لهما عند النقطة (0,0)، والمساوي لِـ 0 في باقي

المستوى (الرسم 101ـ10) يوضح ما ذهبا اليه. ذلك ان هذا التابع وفق كل نصف مستقيم يصل الى النقطة (0,0) تساوي 1. لذلك فإن مفهوم «نقطة تقطع من النمط الاول» غير مستعمل في حالة التوابع المتعددة المتغيرات.

يبين المثال السابق ايضا، بخصوص التوابع المتعددة المتغيرات، ان نقاط التقطع قد تكون غير منعزلة؛ حتى ولو تعلق الامر بتوابع جد بسيطة فإن هذه النقاط قد تملأ منحنيات باكملها أو، إذا تعلق الامر بتوابع لاكثر من متغيرين، سطوحا باكملها؛ وهكذا فالتابع $f(x):R_n\to R_1$ المساوي لـ 1 في الكرة $\{x\in R_n:\sum_{j=1}^{n}x_j^2\leqslant 1\}$ والمنعدم خارج هذه الكرة تابع متقطع عند كل نقطة من سطح الكرة السابقة أي عند كل نقطة من المجموعة $\{x:\sum_{j=1}^{n}x_j^2=1\}$.



الرسم 1 .1ـ10

§ 1 .2 . التوابع القابلة للإشتقاق

إن الفكرة الرئيسية في الحساب التفاضلي هي استبدال تابع معطى بجوار نقطة بتابع من الدرجة الاولى، بحيث يكون الخطأ الناتج عن هذا التعويض لامنتهيا في الصغر من رتبة عالية بالنسبة لتزايد المتغير المستقل. تشكل

مجموعة التوابع العددية لمتغير y التي تقبل هذا التقريب صنف التوابع (لـy) القابلة للاشتقاق. لا يتطلب وجود هذا التقريب المحلي بواسطة تابع من الدرجة الاولى سوى ان تكون العمدة وحيدة البعد. نبدأ الآن في تقديم التعاريف اللازمة في حالة تابع متعدد المتغيرات، ثم نقدم التعريف العام الذي سيبقى قائما في الحالة التي تكون فيها ساحة التعريف ومجموعة قيم التابع فضاءين شعاعيين نظيميين.

12.1 . نذكر باديء ذي بدء بتعريف تابع عددي، قابل للإشتقاق، لمتغير حقيقي (ي11.7).

نقول عن تابع عددي $f(x)$ لمتغير حقيقي x، $a\leqslant x\leqslant b$، إنه **قابل للإشتقاق عند نقطة** $x = c$ إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c). \quad (1)$$

يمكننا في هذه الحالة ابراز الجزء الرئيسي لتزايد التابع $f(x)$ الموافق لإنتقال العمدة من القيمة $x = c$ الى قيمتها $x = c+h$، هذا الجزء هو التابع الخطي لِـ h:

$$f(c+h)-f(c)=f'(c)\,h+o(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

وبالعكس، إذا قبل تزايد تابع $f(x)$ موافق للإنتقال من $x = c$ الى $x = c+h$، جزءا رئيسياً خطيا لِـ h، أي إذا وجد ثابت D بحيث تتحقق العلاقة:

$$f(c+h)-f(c)=Dh+o(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0, \quad (2)$$

فإن النهاية $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ موجودة وتساوي D.

هكذا فإن العلاقتين (1) و(2) تمثلان، في حالة تابع عددي لمتغير واحد، تعريفين متكافئين لقابلية الاشتقاق عند النقطة $x = c$.

22.1 ـ أ. نتناول فيما يلي حالة تابع عددي $f(x)$ لِـ n متغيراً حقيقيا $x = (x_1,...,x_n)$. نلاحظ ان التعريف الثاني، من التعريفين الواردين اعلاه، هو الذي يعمم بصفة طبيعية الى الحالة التي نحن بصدد دراستها.

سنقول، إذن، ان تابعا $f(x) = f(x_1,...,x_n)$، $f:R_n \to R_1$ **يقبل الاشتقاق عند نقطة** $x = c = (c_1,...,c_n)$ إذا كان تزايد $f(x)$ الموافق للانتقال من النقطة $x = c$ الى النقطة $x = c+h$، $h = (h_1,...,h_n)$ قابلا لجزء رئيسي خطي لِـ h. يعني ذلك انه توجد ثوابت D_1، ...، D_n بحيث تتحقق العلاقة:

$$f(c+h) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} D_i h_i + o(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0. \qquad (1)$$

القيمة التي تمثل الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $f(x)$ عندما يتغير x من c الى $c+h$ هي $\sum_{i=1}^{n} D_i h_i$. تمثل الكمية $o(h)$ لامتناهيا في الصغر من رتبة عالية بالنسبة لِـ h. إن المعنى الدقيق للإصطلاح

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{|h|} = 0$$

هو: من اجل كل $\varepsilon > 0$، يوجد $\delta > 0$ بحيث يكون

$$\frac{|o(h)|}{|h|} < \varepsilon \quad \text{لما} \quad |h| < \delta.$$

من الناحية الشكلية فإن التعريف (1) يتعلق بالاساس المعتبر للفضاء R_n. لكننا نتذكّر (ل.4.5) ان الشكل الخطي $\sum_{i=1}^{n} D_i h_i$ يبقى شكلا خطيا عند الانتقال من اساس الى اساس جديد (المعاملات تتغير)، ولذا فمن الواضح ان قابلية الاشتقاق للتابع $f(x)$ عند النقطة $x = c$ خاصية ذاتية له لا تتعلق باختيار الاساس في R_n.

ب. عندما نختار اساسا، وبالتالي جملة احداثيات، يمكن القول بخصوص تابع $f9(x)$ قابل للإشتقاق ان المعاملات D_l في الدستور (1) تتعين بطريقة وحيدة. لرؤية ذلك نختار عددا صحيحا m يقع بين 1 وn ونضع في (1):

$$h = (0,\dots,0,h_m,0,\dots,0)$$

نحصل عندئذ على ان $|h| = |h_m|$ و:

$$f(c+h)-f(c) = f(c_1,\dots,c_{m-1},c_m+h_m,c_{m+1},\dots,c_n)-$$

$$f(c_1,\dots,c_{m-1},c_m,c_{m+1},\dots,c_n) = D_m h_m + 0(h_m)$$

يعني ذلك ان التابع $f(c_1,\dots,x_m,\dots,c_n)$ للمتغير x_m قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ x_m عند النقطة $x_m = c_m$ وان العدد D_m ما هو سوى المشتق بالنسبة لهذا المتغير:

$$(2) \qquad D_m = \lim_{h_m \to 0} \frac{f(c_1,\dots,c_m+h_m,\dots,c_n)-f(c_1,\dots,c_m,\dots,c_n)}{h_m}$$

تبين العلاقة المحصل علينا آنفا وحدانية المعاملات D_l في (1).

إذا كانت النهاية في الطرف الايمن من (2) موجودة فإنها تسمى **المشتق الجزئي للتابع $f(x)$ بالنسبة للمتغير** x_m عند النقطة $x = c$.
وهكذا فإنه إذا قبل $f(x)$ الاشتقاق عند النقطة $x = c$ (بمفهوم (1)) فإن له مشتقا جزئيا بالنسبة لكل من المتغيرات $x_1,\dots,x_n$.

نرمز للمشتق الجزئي لتابع $f(x)$ بالنسبة لمتغير x_m عند نقطة $x = c$ بـ $\frac{\partial f}{\partial x_m}(c)$ أو بـ $f(c)$. نشير الى ان وجود المشتقات الجزئية بالنسبة لكل المتغيرات x_m عند نقطة $x = c$ لا يستلزم بالضرورة ان يكون التابع المعتبر قابلا للإشتقاق عند النقطة c (راجع التمرين 3).

ج. تعين الاعداد $D_1, \dots, D_n$ الشعاع $D = \{D_1,\dots,D_n\}$ المسمى **تدرج التابع** $f(x)$ عند النقطة $x = c$ ونرمز له عادة بـ $\text{grad}\, f(c)$.

تسمى العبارة $\sum_{i=1}^{n} D_i h_i$ **تفاضلية التابع** $f(x)$ عند النقطة c من اجل الازاحة $h = \{h_1,\ldots,h_n\}$. نرمز للتفاضلية هذه بـ $df(c)$. اقتضى العرف ان نرمز للكميات h وh_i بـ dx وdx_i $(i = 1,\ldots,n)$ على التوالي.

إذا زودنا الفضاء R_n بجداء سلمي لشعاعين $x = \{x_1,\ldots,x_n\}$ و$_{1},\ldots,y_n\}$ غصتة (x,y)

فإننا نستطيع كتابة تفاضلية التابع $f(x)$ عند النقطة c بشكل من الاشكال التالية:

$$df(c)= \sum_{i=1}^{n} D_i h_i=(D,h)=(\text{grad}f(c),h)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i \qquad (3)$$

ويمكننا ايضا كتابة الدستور (1) بشكل من الاشكال التالية:

$$f(c+h9)70(c)=df(c)+0(h)=(\text{grad}f(c),h)+0(h) \qquad (4)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i+0(dx)$$

د. في حالة تابع لمتغيرين $y = f(x_1,x_2)\ (R_2 \to R_1)$ نستعمل الرموز الاكثر تقليدية: x وy يرمزان للمتغيرين المستقلين ويرمز z للتابع، اي

$$z = f(x,y)$$

يكتب عندئذ الدستوران (3) و(4) على الشكل التالي:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy \qquad (5)$$

$$f(x+dx,\ y+dy)-f(x,\ y)=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+o(|dx|+|dy|). \qquad (6)$$

ر . بما ان المشتق الجزئي لتابع متعدد المتغيرات هو المشتق العادي بالنسبة لواحد من المتغيرات المستقلة (تثبت عندئذ المتغيرات الاخرى) فإن حساب المشتقات الجزئية يرد الى حساب مشتقات عادية. هكذا فإن لدينا من اجل التابع $(R_2 \to R_1)$ $z = x^2/y^2$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} \quad (y \text{ مثبت})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{2x^2}{y^3} \quad (x \text{ مثبت})$$

تكتب تفاضلية هذا التابع على الشكل:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2x}{y^2} dx - \frac{2x^2}{y^3} dy.$$

اما تدرجه عند النقطة (x,y) فهو:

$$\text{grad } z\,(x,\ y) = \left\{ \frac{2x}{y^2},\ -\frac{2x^2}{y^3} \right\}.$$

1 .32ـ أ. نقدم الآن التعريف العام لتابع قابل للإشتقاق. ليكن $y = f(x)$ تابعا معرفا في ساحة $X \supset G$ من فضاء نظيمي X، يأخذ قيمة في فضاء نظيمي Y. نقول عن هذا التابع إنه قابل للإشتقاق عند نقطة $c = x \in G$ عندما يقبل تزايد $f(x)$ الموافق للإزاحة من النقطة c الى نقطة $c+h \in G$ جزءا رئيسيا خطيا لِـ h، أي عندما تتحقق العلاقة:

$$f(c+h) - f(c) = Dh + 0(h) \quad (1)$$

حيث D مؤثر خطي مستمر من الفضاء X في Y، يمثل $0(h)$ شعاعا في

الفضاء Y يحقق الشرط:

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{|h|_1} = 0.$$

تمثل إذن العبارة Dh في الحالة الراهنة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $f(x)$ عندما يتغير x من c الى $c+h$.

تقبل المساواة (1) التفسير الهندسي التالي. ينجز التابع (x) تطبيقا من الساحة $X\supset G$ في الفضاء Y؛ إذا وضعنا مركز الاحداثيات للفضاء X في النقطة c ومركز الاحداثيات للفضاء Y في النقطة $f(c)$، أي إذا اخترنا الشعاع $h = x-c$ كمتغير مستقل واخترنا الشعاع $k = y-f(c)$ كتابع له، فإن التطبيق $h\to k$ المحصل عليه بهذه الطريقة يقبل التقريب بواسطة التطبيق الخطي $k = Dh$ (بتقدير لامتناهي الصغر $0(h)$ من رتبة عالية بالنسبة لـ h). يمكننا القول إذن بأن التطبيق $y-f(c) = f(x-c)$ نفسه يقبل جزاء خطياً رئيسياً بجوار النقطة $x-c = 0$.

ب. لنثبت ان المؤثر D الوارد في الدستور (1) معرف بطريقة وحيدة. نفرض ان هناك، الى جانب (1)، تمثيلا آخر مماثلا لـ (1) للفرق $f(c+h)-f(c)$. نكتب هذا التمثيل على النحو:

$$f(c+h)-f(c)=D_1h+0_1(h) \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{0_1(h)}{|h|} = 0 \qquad (2)$$

نطرح (2) من (1) ونرمز $D_2 = D-D_1$، فيأتي:

$$D_2h = 0_2(h) \quad , \quad \lim_{h\to 0} \frac{0_2(h)}{|h|} = 0$$

من اجل $\varepsilon>0$ معطى، نختار $\delta>0$ بحيث $|0_2(h)|\leqslant\varepsilon|h|$ لما $|h|\leqslant\delta$.

حينئذ، نظرا لِـ ي12 .17ـ ب، ينتج:

$$\|D_2\| = \sup_{|h|\leqslant\delta} \frac{|D_2 h|}{|h|} = \sup_{|h|\leqslant\delta} \frac{|0_2(h)|}{|h|} \leqslant \varepsilon$$

لما كـــان $\varepsilon>0$ كيفيـــاً فـــإن $\|D_2\| = 0$، ومنـــه $0 = D_2 = D - D_1$ اي $D = D_1$، وهو المطلوب.

جـ. يسمى المؤثر D الوارد في الدستور (1)، وهو وحيد كما راينا ذلك آنفا، **مشتق** التابع $f(x)$ عند $x = c$ ونرمز له بـ $f'(c)$. وتسمى الكمية Dh، أي الشعاع في الفضاء Y المحصل عليه بتطبيق المؤثر المشتق على مؤثر الإزاحة h تفاضلية التابع $f(x)$ عند النقطة c من اجل الازاحة h. نرمز بطريقة مماثلة للرموز المتخذة في حالة التوابع العددية لمتغير حقيقي واحد:

$$df(c) = Dh = f'(c)h = f'(c)dx$$

حيث يرمز $dx = h$ لأي شعاع من الفضاء X.

نقول عن التابع $f(x)$ إنه **قابل للإشتقاق في الساحة** G إن كان كذلك عند كل نقطة من هذه الساحة. إن المشتق $f'(x)$ لِـ $f(x)$ مؤثر خطي من X في Y، وهو تابع للنقطة $x\in G$. اما التفاضلية $df(x) = f'(x)h$ فهي **تابع لمتغيرين**: الشعاع $h\in X$ والنقطة $x\in G$.

إن الانتقال من التابع $f(x)$ الى مشتقه $f'(x)$ هو **اشتقاق** التابع $f(x)$، والانتقال من $f(x)$ الى تفاضليته $f'(x)dx$ هو **مفاضلة** $f(x)$.

في حالة تابع لمتغير حقيقي، ينطبق التعريف العام (1) بطبيعة الحال مع التعريف العادي للمشتق والتفاضلية (ي7 .11 وي12 .16). فيما يخص التوابع المتعددة المتغيرات (الحقيقية) فإن التعريف (1) ينطبق من التعريف المقدم اعلاه (2201).

1 .42 ليكن $f(x)$، $f:G\to R_1$ تابعا عدديا قابلا للإشتقاق معرفا في ساحة G من فضاء نظيمي X. في هذه الحالة فإن المؤثر $D = f'(c)$ الوارد ضمن 1 .32 (1) تابعية خطية مستمرة ($X\to R_1$) (يتعلق، عموما، بالنقطة c). تأخذ التابع $0(h)$ ايضا قيما عددية. إذا كان X ذا بعد n فإننا نعود الى التعريف 1 .22 لأن العبارة $\sum_1^n Dh_i$ تمثل الشكل العام للتابعية في R_n. تسمى التابعية الخطية $D = f'(c)$ ايضا **تدرج التابع** $f(x)$ عند النقطة $x = c$. وهكذا فإن التعريف العام لمشتق تابع عددي مطابق إذن لتعريف تدرجه.

1 .52ـ أ. لندرس بشيء من التفصيل التوابع الشعاعية القابلة للإشتقاق في حالة البعد المنتهي.

نفرض ان تابعا $f(x):G\subset R_n\to R_m$ معرف في ساحة G من فضاء ذي بعد n $Y = R_n$ ويأخذ قيمة من فضاء ذي بعد m $Y = R_m$. باختيار اساس في كل من الفضاءين وباتخاذ الرمز $R_n\ni = x = \{x_1,\dots,x_n\}$، $R_m \ni y = \{y_1,\dots,y_m\}$ يكون في وسعنا التعبير عن التابع الشعاعي $y = f(x)$ بواسطة m تابعا عدديا:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = f_1(x) \equiv f_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = f_m(x) \equiv f_m(x_1, \dots, x_n). \end{array}\right. \qquad (1)$$

نفرض ان $f(x)$ قابل للإشتقاق عند $x = c$. تعرّف المساواة

$$f(c+h)-f(c) = f'(c)h+0(h) \qquad (2)$$

المؤثر الخطي $f'(c):R_n\to R_m$. اننا نستطيع ايصال كل مؤثر خطي من R_n في R_m بمصفوفة ($n\times m$). للقيام بذلك يجب التعبير عن المساواة (2) بدلالة الاحداثيات بالنسبة للأساسين المعتبرين في R_n وR_m، نحصل عندئذ على:

$$(3) \quad f_i(c+h)-f_i(c)=\sum_{j=1}^{n} f'_{ij}(c)\,h_j+o_i(h) \quad (i=1,\ \ldots,\ m).$$

تتشكل عناصر المصفوفة $(n\times m)$ الممثلة للمؤثر $f'(c)$ بالنسبة للأساسين المذكورين من القيم $f'_{ij}(c)$ $(j=1,\ldots,n;\ i=1,\ldots,m)$. تبين الدساتير (3) ان المركبات $f_i(x)$ لتابع شعاعي $f(x)$ قابل للإشتقاق (عند $x=c$) تقبل هي ايضا كتوابع عددية الاشتقاق (عند $x=c$). كما ان القضية العكسية تأتي مباشرة: إذا كانت التوابع العددية $f_i(x)$، $i = 1,\ldots,m$، قابلة للإشتقاق عند χظγ، فإن الامر كذلك فيما يخص التابع الشعاعي $f(x)$. نرى، فضلا عن ذلك، كيف تكتب عناصر مصفوفة المؤثر الخطي $f'(c)$: بما ان المعاملات للجزء الخطي الرئيسي لتزايد أي تابع عددي هي المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة للإحداثيات التي تشكل المتغير، فإن لدينا:

$$(4) \qquad f'_{ij}(c) = \frac{\partial f_i(c)}{\partial x_j} \qquad (i=1,\ldots,m,\ \ j=1,\ldots,n)$$

إذن تتشكل مصفوفة المؤثـر الخطـي $f'(c)(R_n\to R_m)$ مـن المشتقـات الجزئية وتكتب على النحو:

$$f'(c) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(c)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(c)}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

يعني الرمز $\cong$ هنا ان المؤثر $f'(c)$ يصل المصفوفة الواردة في الطرف الايمن بعد اختيار الاسـاسين في R_n وR_n. تسمـى هـذه المصفـوفـة **المصفـوفـة اليعقوبية**. نرمز لها ايضا بـ

$$\left\|\frac{\partial f_i(c)}{\partial x_j}\right\| \quad \text{أو بـ} \quad \left\|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right\|$$

في الحالة التي يكون فيها $m=n=1$ فإنها تتشكل من عنصر واحد هو المشتق العادي لتابع حقيقي بالنسبة للمتغير الحقيقي الوحيد. بخصوص تابع عددي لـ n متغيرا حقيقيا لدينا $m=1$ وليس للمصفوفة اليعقوبية اكثر من سطر واحد. فيما يتعلق بـ m تابعا لمتغير حقيقي (منحن في فضاء ذي n بعداً، ي21. 16)، لدينا $n=1$ وتقتصر المصفوفة اليعقوبية على عمود واحد.

في حالة $m=n$ تكون المصفوفة اليعقوبية مربعة:

$$f'(c) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(c)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_n(c)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(c)}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|.$$

يمثل معين هذه المصفوفة، سنرى ذلك ادناه، خاصية مميزة هامة للتطبيق $y = f(x)$ عند $x=c$؛ يسمى هذا المعين يعقوبي التطبيق $f(x)$ عند $x=c$، ونرمز له بـ

$$\det \left\| \frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (x_1, \ldots, x_n)} \right\|.$$

ب. إن الموقف يصبح بسيطا جدا في الحالة التي يكون فيها $y = f(x)$ تابعا خطيا لان شكله في هذه الحالة هو:

$$\begin{aligned} y_1 &= D_{11}x_1 + \ldots + D_{1n}x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= D_{m1}x_1 + \ldots + D_{mn}x_n, \end{aligned}$$

حيث D_{ij} اعداد ثابتة. تتشكل هنا المصفوفة اليعقوبية من الاعداد D_{ij}:

$$f'(c) \cong \left\| \begin{matrix} D_{11} & \ldots & D_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ D_{m1} & \ldots & D_{mn} \end{matrix} \right\|$$

ونلاحظ انها لا تتعلق بالنقطة c.

62.1ـ أ. نذكّر في حالة متغير حقيقي (ي11. 7) ان وجود مشتق تابع عددي $y = f(x)$ عند نقطة $x=c$ يعني، من الناحية الهندسية، وجود

مماس لبيان $f(x)$ عند النقطة $(c,f(c))$. نقصد هنا بالمماس اما الموقع النهائي لقاطعة طبقا للتعريف التحليلي 12.1 (1)، واما المستقيم الذي تبعد نقاطه عن النقاط الموافقة لها (من اجل نفس قيم x) على المنحنى $y = f(x)$ بمسافة لامتناهية الصغر من رتبة عالية بالنسبة لِـ $h = x-c$؛ وهذا طبقا للتعريف التحليلي 12.1 (2).

هناك مساواة بين المعامل الزاوي للمماس والمشتق $f'(c)$، اما معادلة المماس فهي

$$(1) \qquad y-p = f'(c)(x-c) \qquad (p = f(c))$$

أو، عندما نرمز بـ $x-c = dx$، $y-p = dy$:

$$(2) \qquad dy = f'(c)dx$$

ب. في حالة تابع عددي $y = f(x_1,...,x_n)$ فإن التفسير الهندسي لقابلية الاشتقاق مرتبط بوجود المستوى الماس للسطح $y = f(x_1,...,x_n)$. للتوصل الى تعريف للمستوى الماس (أو المماس)، سنقوم بتعميم التعريف الثاني من التعريفين الواردين اعلاه للمستقيم الماس.

المستوى الماس للسطح $y = f(x)$ عند نقطة $x=c$ هو، تعريفا، مستو $y-p = \sum A_i(x_i-c_i)$، حيث $p = f(c)$، في الفضاء ذي البعد $(n+1)$ معرف بـ $(x_1,...,x_n,y)$ تكون من اجله المسافات بين النقاط $\{x_1,...,x_n,f(x)\}$ والنقاط $\{(x_1,...,x_n),p+\sum A_i(x_i-c_i)\}$ (النقاط الاولى تقع على السطح المعتبر والنقاط الثانية على المستوى) لامتناهيات في الصغر من رتبة عالية بالنسبة لِـ $|h| = \sqrt{\sum(x_i-c_i)^2}$. من الواضح الآن أن الشرط التحليلي 22.1 (1) لقابلية التابع $f(x)$ للإشتقاق عند النقطة $x=c$ يمكن تفسيره على انه شرط وجود المستوى الماس للسطح $y = f(x)$ عند $x=c$؛ باستخدام رموز 22.1 (1)، فإن معادلة هذا المستوى الماس هي:

$$(3) \qquad y-p = \sum_{i=1}^{n} D_i(x_i-c_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c).(x_i-c_i)$$

وتكتب هذه المعادلة بالرموز التفاضلية ($dy=y-p, dx_i=x_i-c_i, i=1,\ldots,n$):

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)dx_i \qquad (4)$$

إن الشعاع $\{dx_1,\ldots,dx_n,-1\} \ni R_{n+1}$ عمودي على المستوى (4) (بمفهوم الجداء السلمي المعتاد)؛ نقول إنه ناظمي على السطح $y = f(x)$ عند النقطة $\{c,p\}$، يسمى المستقيم المعين من طرف هذا المستوى، والذي يمر بالنقطة $\{c,p\}$ الناظم على السطح $y = f(x)$.

على سبيل المثال فإن السطح الموافق للتابع $z = x^2/y^2(R_2 \to R_1)$ المعتبر في 1 .22ـ د له مستو ماس معرف بالمعادلة

$$dz = \frac{2x}{y^2}dx - \frac{2x^2}{y^3}dy \qquad (5)$$

(وهذا يطابق شكليا عبارة التفاضلية). إذا رمزنا للإحداثيات الجارية لنقاط المستوى الناس بـ X، Y، Z مع الاحتفاظ بالرموز x، y، z لإحداثيات نقطة التماس، يمكن وضع المعادلة (5) على الشكل:

$$Z-z = \frac{2x}{y^2}(X-x) - \frac{2x^2}{y^3}(Y-y) \qquad (6)$$

إن الشعاع الناظمي عند النقطة $\{x,y,z\}$ معرف بمركباته

$$\frac{2x}{y^2}, -\frac{2x^2}{y^3}, -1$$

ولذا فإن معادلة الناظم عند النقطة $\{x,y,z\}$ هي:

$$\frac{X-x}{2x/y^2} = \frac{Y-y}{-2x/y^3} = \frac{Z-z}{-1}$$

حيث يرمز X، Y، Z هذه المرة للإحداثيات الجارية لنقاط الناظم.

ج. نستطيع ايضا صياغة تعريف المستوى الماس، في الحالة العامة، لتابع $y = f(x): G \subset X \to Y$ قابل للإشتقاق عند نقطة $x=c$. ليكن

$p = f(c)$ «المستوى الماس» للسطح $y = f(x)$ عند النقطة c هو تعريفا المنوعة الخطية (المستوى المصعد) في الفضاء $X+Y$ (وهو المجموع المباشر) المعرفة بالمعادلة:

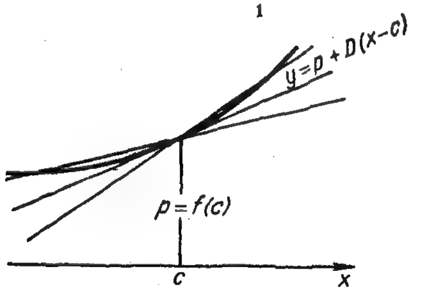
$$(7) \qquad y - p = f'(c)\cdot(x - c) \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

هنا ايضا فإن المسافات بين النقاط $\{x,f(x)\}$ والنقاط $\{x,p+f'(c).(x-c)\}$ (النقاط الاولى تقع على السطح $y = f(x)$، وتقع الثانية على المنوعة (7)) لامتناهيات في الصغر من رتبة عالية بالنسبة لـ $|x-c|$. باستخدام التفاضليات نكتب النعادلة على الشكل:

$$(8) \qquad dy = f'(c)\,dx.$$

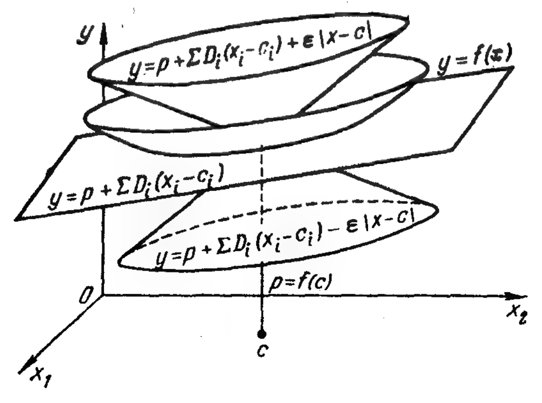
د. في حالة تابع عددي لمتغير حقيقي، لدينا تعريف آخر للمستقيم الماس. بعبارة ادق، نعتبر زاوية صغيرة رأسها في $\{c,f(c)\}$، يشكلهاالمستقيمان المعرفان بالمعاملين الزاويين $D-\varepsilon$ و$D+\varepsilon$؛ يمثل المستقيم $y = p+D(x-c)$، تعريفا، المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $\{c,f(c)\}$ إذا كانت، من اجل كل $0<\varepsilon$ و$h = x-c$ (حيث $|h|\leqslant\delta(\varepsilon)$) صغيرين بكفاية، نقاط كل المنحنى $y = f(x)$ داخل الزاوية المعتبرة (الرسم 1.2.1). يمكن انجاز انشاء مماثل في حالة تعدد المتغيرات المستقلة. نعتبر، بدل الزاوية، سامة Ω_ε في الفضاء ذي البعد $(n+1)$ $x_1,\dots,x_n,y$: المعرف باللامتساويات (متراجحات):

$$\sum_1^n D(x_i-c_i)-\varepsilon|x-c|\leqslant y-p\leqslant \sum_1^n D(x_i-c_i)+\varepsilon|x-c|$$



الرسم 1.2.1

يكون مستو : $y = p+\sum_1^n D_i(x_i-c_i)$ ، تعريفاً، مستوياً ماسا للسطح $y = f(x)$ عند $x=c$ عندما يكون السطح $y = f(x)$ ، من اجل كل $0<\varepsilon$ و $|h| = |x-c| \leqslant \delta(\varepsilon)$ صغيرين بكفاية، محتويا باكمله في الساحة Ω_ε (الرسم 1 .2ـ2). من الواضح ان هذا التعريف للمستوى الماس يكافيء التعاريف السابقة، حيث ان شرط قابلية التابع $y = f(x)$ للإشتقاق عند $x=c$ يكافيء شرط وجود المستوى الماس بمفهوم التعريف الاخير.



الرسم 1 .2ـ2

ر. نشير هنا ايضا الى حالة تابع شعاعي $y = f(x):R_1\to R_n$ ، نكتبه على النحو : $(a\leqslant x\leqslant b)$

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x), \\ \cdots\cdots\cdot \\ y_n = f_n(x), \end{cases} \tag{9}$$

يمكن تفسير هذا التابع هندسيا على انه منحن في الفضاء ذي البعد $(n+1)$: $(x,y_1,\ldots,y_n)$.

يمثل المشتق $f'(c)$ الشعاع $f_1'(c),\ldots,f_n'(c)$. يظهر هذا الشعاع في معادلة المماس (7) عند النقطة $\{c,f(c)\}$ ، كما يظهر الشعاعان y و p؛ تأخذ المعادلة (7)، في الحالة الراهنة، شكل الجملة التالية:

$$(10)\qquad \begin{cases} y_1 - p_1 = f_1'(c)(x-c), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n - p_n = f_n'(c)(x-c). \end{cases}$$

نستطيع دوما استخدام الرموز التفاضلية بوضع $dx = x-c$
و $dt_i = y_i - p_i$

$$(11)\qquad dy_i = f_i'(c)\, dx.$$

س. يمكن في الحالة العامة، اعتبار تابع $y = f(x): R_n \to R_m$ هندسيا على انه منوعة منحنية في الفضاء ذي البعد $(n+m)$ المؤلف من النقاط $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\}$. عندئذ تعرّف المعادلة $y-p = f'(c)(x-c)$ منوعة خطية في R_{n+m} التي تحتوي النقطة (c,p). من الطبيعي ان نسميها منوعة خطية «ماسة» للمنوعة $y = f(x)$، وذلك بالاستثناء دوما على كون المسافة بين $f(x)$ و$p+f'(c)(x-c)$، من اجل x قريب من c، لامتناهية الصغر من رتبة عالية بالنسبة لِـ $|x-c|$.

1 .72 . المشتق وفق شعاع ووفق اتجاه.

أ. ليكن $y = f(x): V \subset X \to Y$ تابعا معرفا في كرة: $V = \{x \in X: |x-c| \leqslant r\}$ من فضاء نطيمي X و$\xi \in X$ شعاعا. نعتبر قطعة المستقيم $\Gamma \subset V$ المنبثق من النقطة c في اتجاه الشعاع η والمعرف بالمعادلة:

$$x = c + t\xi, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0.$$

يُصبح التابع $f(x)$ على قطعة المستقيم هذه تابعا للمتغير الحقيقي t. نضع $f[x(t)] = \varphi(t)$، $\varphi: [0,r] \to Y$. من اجل $t=0$، لدينا $f(c) = \varphi(0)$. نفرض ان $f(x)$ قابل للإشتقاق عند $x=c$؛ لدينا عندئذ:

$$f(c + t\xi) - f(c) = f'(c)\, t\xi + o(t).$$

ينتج من ذلك قابلية التابع $\varphi(t)$ للإشتقاق عند $t=0$، كما تنتج العلاقة:

$$\varphi'(0) = f'(c)\,\xi. \tag{1}$$

تسمى الكمية $\varphi'(0)$ مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة c وفق الشعاع ξ ونرمز له بـ $f'_{\xi}(c)$. يرمز احيانا لهذا المشتق بـ $\xi * f(c)$؛ يمثل هنا الشعاع ξ رمز مؤثر الاشتقاق:

$$\xi * f(c) = f'(c)\,\xi.$$

ب. إذا كان ξ شعاعا واحديا، نضع $\xi=e$، $|e|=1$؛ يسمى $f'_{\xi}(c)$ **المشتق وفق اتجاه (وفق قطعة المستقيم Γ)** ونرمز له بـ $f'_{\Gamma}(c)$. إذا كان e، مثلا، شعاع الاساسي المحمول على محور العناصر x_1 (في R) فارن $f'_{\Gamma}(c)$ يمثل، بطبيعة الحال، المشتق الجزئي.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(c).$$

82.1. تتحقق من اجل تابع عددي $f(x): R_n \to R_1$ العلاقة 22.1 (4):

$$f(c + te) - f(c) = (\operatorname{grad} f(c),\, te) + o(t), \tag{1}$$

التي تستلزم:

$$f'_{\Gamma}(c) = (\operatorname{grad} f(c),\, e). \tag{2}$$

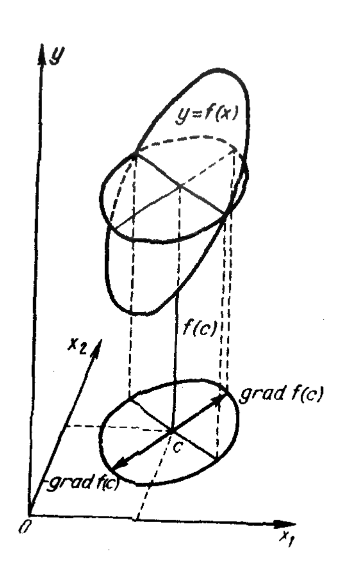
نحن نعلم ان الشعاع $\operatorname{grad} f(c) = f'(c)$ معين تماما بخاصيات التابع $f(x)$، وذلك دون ان يتعلق بالإتجاه الذي اجرينا وفقه الاشتقاق. ثم إن الشعاع e الذي يعيو الاتجاه المعتبر لا يتعلق، هو الآخر، بالتابع $f(x)$. وهكذا يُبرر الدستور (2) الدورين اللذين يلعبهما التابع واتجاه الاشتقاق.

يسمح الدستور (2) بتقديم بعض النتائج المتعلقة بسلوك التابع $f(x)$ بجوار النقطة c (شريطة ان يكون $\operatorname{grad} f(c) \neq 0$). بصفة خاصة إذا كانت ω هي الزاوية التي يشكلها الشعاعان $G = \operatorname{grad} f(c)$ و e، ينتج

من التعريف ي47.4 ان

$$f'_\Gamma(c) = |G| \cos \omega. \qquad (3)$$

نستخلص من ذلك النصوص أ ـ د (الرسم 3-2.1 ، $n=2$).



الرسم 3-2.1

أ. يأخذ المشتق $f'_\Gamma(c)$ قيمته العظمى في اتجاه الشعاع $G = \text{grad}f(c)$ ، هذه القيمة هي $|\text{grad}f(c)|$ (لأن لدينا $\cos w=1$ في هذا الاتجاه)؛ ويأخذ هـذا المشتـق قيمتـه الصغـرى في الاتجاه المقـابـل، هـذه القيمـة هـي $-|\text{grad}f(c)|$. يمثل هذان الاتجاهان على التوالي الاتجاه الاسرع صعودا والاتجاه الاسرع هبوطا (أو نزولا) للتابع $f(x)$ عند النقطة $d \div y$.

ب. إن الكمية $f'_\Gamma(c)$ منعدمة وفق كل اتجاه عمودي على التدرج؛ ثم تزايد التابع $f(x)$ وفق ذلك الاتجاه لامتناهي الصغر من رتبة عالية بالنسبة لـ $|h| = |x-c|$.

ج. إن قيم $f_{\gamma}(c)$ وفـــق كـــل الاتجاهـــات المتبقيـــة محصـــورة بين $-|\text{grad}f(c)|$ و $+|\text{grad}f(c)|$.

د. هكذا، فإن تدرج التابع $f(x)$ عند النقطة $x=c$ هو الشعاع المنبثق من c والمتجه نحو اسرع التجاه صعودا للتابع $f(x)$، والذي يساوي طوله مشتق $f(x)$ وفق هذا الاتجاه.

ر. مثال. لندرس سلوك التـابـع $y = x_2^2 - x_1^2 (R_2 \to R_1)$ لمتغيرين بجوار النقطة $(1,1)$. إن قيمة هذا التابع عند النقطة المعتبرة منعدم. إن الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع عند الانتقال الى نقطة $(1+h_1, 1+h_2)$ قريبة من النقطة $(1,1)$ ينتج من:

$$\begin{aligned}(1+h_2)^2-(1+h_1)^2 &= 2h_1+2h_2+h_2^2-h_1^2 \\ &= -2h_1+2h_2+0(h)\end{aligned}$$

بحيث يتضح ان التابع $x_2^2 - X_1^2$ يقبل الاشتقاق عند النقطة $(1,1)$ (كما هو الحال عند اية نقطة اخرى). ثم إن قيمتيْ المشتقين الجزئيين

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1} = -2x_1$$

عند النقطة $(1,1)$ هما -2 و 2، بحيث أن $\text{grad}y(1,1) = \{-2,2\}$؛ وبالتالي فإن الزاوية التي يشكلها $\text{grad}y(1,1)$ مع محور العناصر x_1 تســـاوي $135°$ (الرسم 1 .2ـ4). إن الخط الاسرع صعـــودا للتـــابـــع $y(x_1,x_3)$ يتجه الاتجاه γ_1 للشعاع $\text{grad}y(1,1)$، اما سرعة الصعود فتساوي: $|\text{grad}y(1,1)| = 2\sqrt{2}$. لدينا في الاتجاه γ_2 العمودي على γ_1، أي الاتجاه وفق منصف الربع الاول من المعلم $y'_{\gamma_2}(1,1) = 0$؛ ذلك ان التابع $y(x_1,x_2)$ لا يتغير على هذا المنصف (التابع منعدم عند كل نقطة منه). يشير الشعاع $-\text{grad}y(1,1) = \{2,-2\}$ للإتجاه γ_3 الذي

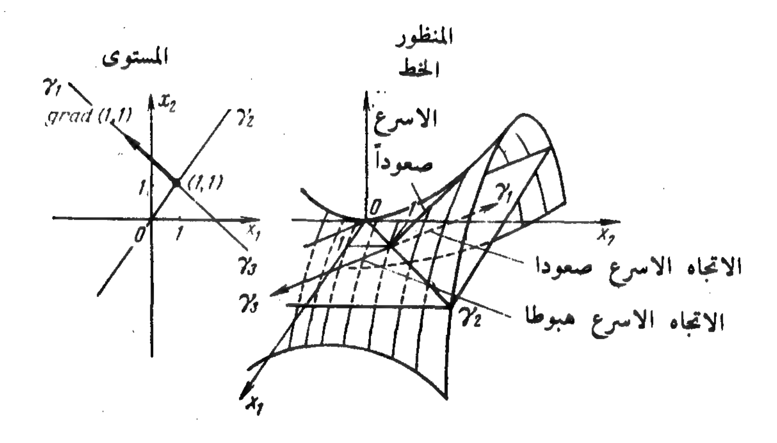
يعرف الخط الاسرع هبوطا. يعطي المشتقان الجزئيان

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(1,1) = 2 \quad \text{و} \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}(1,1) = -2$$

قيمتي المعاملين الزاويين للتابع في اتجاه محوري الاحداثيات النعتبرة. لهذين المشتقين تفسير هندسي بسيط: إذا قسمنا السطح $y = x_2^2 - x_1^2$ بواسطة المستوى الشاقولي $x_2=1$ فإننا نحصل على مقطع يمثله المنحنى $y = 1-x_1^2$، ويمثل العدد -2 المعامل الزاوي لمماس هذا المنحنى (في المستوى $x_2=1$). كما يمثل

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(1,1)=2$$

المعامل الزاوي لمماس المنحنى $y = x_2^2-1$ الذي نحصل علية بتقسيم السطح المعتبر بواسطة المستوى الشاقولي $x_1=1$. يمثل مقطع السطح بواسطة المستوى الشاقولي $x_1+x_2 = 2$، الذي يحوى شعاع التدرج منحنيا معاملة الزاوي يساوي $\pm 2\sqrt{2}$.



الرسم 1 .2_4

1§ 3 . نظريات عامة حول التوابع القابلة للاشتقاق

13. 1 . نفرض فيما يلي ان التوابع $f(x)$، $g(x)$، ... تعمل من جوار V لنقطةc تنتمي لفضاء شعاعي نظيمي X في فضاء شعاعي نظيمي Y.

أ . إذا كان $f(x) =$ ثابتا (اي ان قيم $f(x)$ من اجل كل العناصر $x \in V$ تمثل نفس العنصر من الفضاء Y)، فإن $f'(c) = 0$. ينتج ذلك من المساواة $f(c+h)-f(c) = 0$ ومن وحدانية المشتق (32. 1).

ب . إذ وجد مؤثر خطي $F:X\to Y$ قيمه على V تطابق قيم $f(x)$ الموافقة لها)، فإن $f'(c) = f$ و$df(c) = Fdx$.

بالفعل، لدينا فرضا:

$$f(c+h)-f(c) = F(c+h)-Fc = Fh$$

فتنتج النتيجة المرجوة من وحدانية المشتق (32. 1).

ج . بصفة خاصة، فإن المشتق $f'(x)$ للتابع $f(x) = x(X\to X)$ هو المؤثر المطابق $f'(x):E(X\to X)$ و$df(x)=dx=dh$.

د . إن كل تابع $f(x)$ قابل للإشتقاق عند $x=c$ تابع مستمر عند $x=c$. ذلك ان لدينا المساواة:

$$f(c+h)-f(c) = f'(c)h+0(h)$$

ومن اجل $\varepsilon>0$، نختار $\delta>0$ ضغيرة بكفاية لكي تتحقق المتراجحة $|0(h)|<\varepsilon/2$ و $|h|<\varepsilon/2$ $\|f'(c)\|$ بمجرد تحقق $|h|<\delta$؛ وبذلك يكون لدينا

$$|f(c+h)-f(c)|\leqslant\|f'(C)\| \; |h|+|0(h)|<\varepsilon$$

ومنه يأتي استمرار $f(x)$ عند $x=c$.

23. 1 ـ أ . إذا كان التابعان $f(x)$ و$g(x):V\to Y$ يقبلان الاشتقاق عند $x=c \in V$، فإن الامر كذلك فيما يخص

التابع$(V\to Y)$ $s(x) = f(x)+g(x)$؛ زيادة على ذلك، لدينا:

$$s'(c) = f'(c)+g'(c)$$

أو
$$ds(c) = df(c)+dg(c)$$

ذلك انه ينتج من العلاقتين:

$$f(c+h)-f(c) = f'(c)h+0(h)$$

$$g(c+h)-g(c) = g'(c)h+0(h)$$

ان:

$$s(c+h)-s(c) = f(c+h)-f(c)+g(c+h)-g(c)$$

$$s(c+h)-s(c) = [f'(c)+g'(c)]h+0(h)$$

ومنه تأتي النتيجة المرجوة.

ب. ليكن تابع $y(x):V\to Y$ قابلا للاشتقاق عند $x=a$ وA مؤثرا خطيا مستمرا من الفضاء Y في فضاء (نظيمي) Z. عندئذ يكون التابع $z(x) = Ay(x)$ قابلا للإشتقاق عند $x=a$ ولدينا:

$$z'(a) = Ay'(a)$$

$$dz(a) = Ady(a)$$

ذلك ان لدينا ضمن الفرض المشار اليه:

$$z(a+h)-z(a)=A[y(a+h)-y(a)]=A[y'(a)h+0(h)]$$

$$= [Ay'(a)]h+0(h)$$

وهو المطلوب.

ج. ليكن Y المجموع المباشر لفضاءات جزئية Y_1، ...، Y_n بحيث تتكون لدينا، من اجل كل تابع $y(x):X\to Y$ (كما هو الحال في 51.1ـ ج) المركبات:

$$y_1(x) = P_1y(x)(X\to Y_1),...,y_n(x) = O_ny(x)(X\to Y_n)$$

إذا كان Y فضاء تاما وكانت الفضاءات Y_1، ...، Y_n مغلقة فإن قابلية التابع $y(x)$ للإشتقاق عند $x=a$ يستلزم قابلية كل تابع $y_k(x)$ $(k=1,...,n)$ للإشتقاق عند $x=a$؛ ينتج ذلك من استمرار المؤثر (1 .41- د) ومن ب.

وبالعكس، إذا كانت التوابع $y_1(x)(X \to Y_1)$، ...، $y_n(x)(X \to Y_n)$ قابلة للإشتقاق عند $x=a$، فإن الامر كذلك فيما يخص التابع: $y(x) = \{y_1(x),...,y_n(x)\}:X \to Y$، وهي نتيجة تأتي من ألأن

$$y(x) = y_1(x)+...+y_n(x) \qquad (1)$$

إن المشتق $y'(a)$ مؤثر خطي $X \to Y$، أي ان $y'(a) \ni L(X,Y)$؛ كما ان $y'(a) \ni L(X,Y_k)$ (حيث $k = 1,...,n$). إن الفضاء $L(X,Y)$ هو المجموع المباشر للفضاءات $L(X,Y_k)$ (1 .41- س)، وبالتالي ينتج من (1) ان مركبات العنصر $y'(a) \ni L(X,Y)$ هي الكميات $y_k'(a)$:

$$y'(a) = \{y_1'(a),...,y_n'(a)\} \qquad (2)$$

33. 1 . مشتق وتفاضلية تابع مركب.

أ. نظرية. ليكن $y = y(x)$ تابعا يطبق ساحة G من فضاء نظيمي X في فضاء نظيمي Y، $G \ni a$، $y(a)=b$ و $z = z(y)$ تابعا معرفا بجوار النقطة b من الفضاء Y، قيمة في فضاء نظيمي Z. إذا كان التابع $y(x)$ قابلا للإشتقاق عند $x=a$ والتابع $z(y)$ قابلا للإشتقاق عند $y=b$، فإن تركيبها $\zeta(x) \equiv z[y(x)]$ المعرف في جوار النقطة $G \ni a$ والذي يأخذ قيمةفي Z تابع يقبل الاشتقاق، هو الآخر، عند النقطة $x=a$؛ ولدينا:

$$\zeta'(a) = z'(b)y'(a) \qquad (1)$$

نشير الى ان $y'(a)$ و$z'(b)$ مؤثران خطيان من X في Y ومن Y في Z على التوالي، بحيث ان الطرف الايمن في (1) معرف كمؤثر خطي من X في Z.

نبدأ في البرهان، لدينا:

$$\zeta(a+h)-\zeta(a) \equiv z[y(a+h)]-z[y(a)] = \tag{2}$$

$$z'[y(a)][y(a+h)-y(a)]+0[y(a+h)-y(a)]=$$

$$= z'(b)[y'(a)h+0(h)]+0[y'(a)h+0(h)]=$$

$$= z'(b)y'(a)h+0(h)$$

وبالتالي تشكل العبارة $z'(b)y'(a)h$ الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $\zeta(x)$ عند الانتقال من $x=a$ الى $x = a+h$، وهو المطلوب.

بتعويض a بـ x وbبـ $y(x)$ وبالانتقال الى المؤثرات، يمكننا وضع الدستور المحصل عليه على النحو:

$$\{z[y(x)]\}' = z'(y)y'(x) \tag{3}$$

ب. نفرض، مثلا، ان الفضاءات X، Y، Z ذات ابعاد $p<m<n$ على التوالي. نعتبر أي اساس في كل منها. حينئذ يُعطى التابعان $y(x)$ و$z(y)$ بجملتين من العلاقات العددية:

$$\left\{\begin{array}{ll} y_1 = y_1(x_1,\dots,x_n) & z_1(y_1,\dots,y_m) \\ \dots\dots & \dots\dots \\ y_m = y_m(x_1,\dots,x_n) & z_p = z_p(y_1,\dots,y_m) \end{array}\right. \tag{4}$$

يوافق المؤثران $y'(x)$ و$z'(y)$ على التوالي المصفوفتين اليعقوبتين (1 .25ـ أ):

$$(5)\quad y'(x) \cong \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}, \quad z'(y) \cong \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \dfrac{\partial z_p}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_p}{\partial y_m} \end{Vmatrix}$$

إن التـابـع $\zeta(x) = z[y(x)]$ يقبـل، حسـب أ، الإشتقـاق؛ امـا المصفوفة اليعقوبية الموافقة له فهي، حسب (1)، مطابقة لجداء المصفوفتين الواردتين في (5):

$$(6)\quad \zeta(x) \cong \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial Z_1}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot\ \cdot\cdot & & \\ \dfrac{\partial \zeta_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \zeta_p}{\partial x_n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_1}{\partial y_m} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot\cdot\ \cdot\cdot & & \cdots & & \cdot\cdot\ \cdot\cdot & \\ \dfrac{\partial z_p}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_p}{\partial y_m} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

تسمى المساواة (6) **قاعدة ضرب المصفوفات اليعقوبية**. نرمز لها باختصار بـ:

$$\left\| \frac{\partial(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \right\| = \left\| \frac{\partial(z_1,\ldots,z_p)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \right\| \qquad (7)$$

لدينا، بصفة خاصة، مهما كان $j = 1,\ldots,p$ ؛ $i = 1,\ldots,n$:

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \qquad (8)$$

نعتبر الحالة $n=1$ حيث نضع $x_1=\ldots=x_n=x$. إن التابعين $y(x)$ و$\zeta(x)$ يمثلان هنا تابعين لمتغير واحد y. يكتب الدستور (8) على الشكل:

$$\frac{d\zeta_j}{dx} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \cdot \frac{dy_k}{dx} \qquad (9)$$

نرى بذلك انه تكون لنا حاجة بالمشتقات الجزئية عند اشتقاق توابع لمتغير واحد.

جـ. عندما نعوض في (2) h بـ dx ونراعي كوْن تفاضلية تابع هي الجزء الخطي الرئيسي لتزايده، فإننا نجد:

$$d\zeta = z'(b)y'(a)dx$$

ثم إن لدينا ، من اجل dx معطى :

$$dy = y'(a)dx$$

حيث $\quad d\zeta = z'(b)dy$

أي ان تفاضلية تابع لِـ y يحتفظ بنفس الشكل سواء كان y متغيرا مستقلا أو تابعا لمتغير آخر x. تسمى هذه الخاصية **لاتغيّر تفاضلية بالنسبة لتبديل المتغير**. نشير الى اننا نقصد بـ dy في الحالة الاولى التزايد الكيفي للمتغير y ، اما في الحالة الثانية فالمقصود هو قيمة التفاضلية للتابع $y(x)$ من اجل الشعاع dx.

43. 1 . تفاضلية جداء معمم.

أ. ليكن X وY فضاءين نظيميين وجداء معمم $<y\text{-}z\rightarrow$ لعنصرين $X\ni x$ و$Y\ni y$ ، اي تطبيقا ثنائي الخطية مستمرا من الفضاء $W = X+Y$ في فضاء Z (51. 1 ـ د).

بما ام الشكل الثنائي الخطية $<x,y>$ مستمر ، فإنه يوجد $0<c$ بحيث :

$$|<x,y>|\leqslant C|x|.|y|$$

وذلك مهما كان x وy.

سنرى بأن التابع $z = <x,y>:W\rightarrow Z$ يقبل الإشتقاق عند كل نقطة من الفضاء W وان:

$$dz = <dx,y>+<x,dy> \tag{1}$$

ذلك اننا إذا اعطينا للمتغير $W\ni\{x,y\}$ تزايدا $\{dx,dy\}$ واستخدمنا الخطية الثانية لِـ $<x,y>$ ، نجد :

$$<x+dx,y+dy>-<x,y>=<x,y>+<dx,y>+<x,dy>+<dx,dy>$$
$$-<x,y>=<dx,y>+<x,dy>+<dx,dy>$$

إن الحدين الاولين في الطرف الاخير خطيان بالنسبة للإزاحة $\{dx,dy\}$ ، اما العبارة $<dx,dy>$ فتقبل التقدير:

$$|<dx,dy>|\leqslant C|dx||dy|\leqslant\frac{C}{2}(|dx|^2+|dy|^2)=0(|dx|+|dy|)$$

وهكذا، فإن تزايد التابع $<x,y>$ يقبل الجزء الخطي الرئيسي: $<dx,y>+<x,dy>$ ، وهو المطلوب.

تعتبر دساتير الاشتقاق لمختلف الجداءات التي سنتناولها بمثابة امثلة في تطبيق القاعدة العامة التي توصلنا اليها آنفا وتطبيق قاعدة اشتقاق تابع مركب.

ب. نظرية. ليكن $x:G\to X$ ، $x = x(t)$ و $y:G\to Y$ ، $y = y(t)$ تابعين قابلين للإشتقاق في ساحة G من فضاء T. نشكل، كما هو الحال في أ، الجداء المعمم:

$$<x(t),y(t)>:G\to Z$$

المسمى الجداء المعمم للتابع $x(t)$ في التابع $y(t)$.

عندئذ، يكون التابع $\zeta(t) = <x(t),y(t)>$ قابلا للإشتقاق في G ، ولدينا:

$$d\zeta = <x'(t)dt,y(t)>+<x(t),y'(t)dt> \qquad (2)$$

يمكن بالفعل اعتبار التابع $\zeta(t)$ كتابع مركب:

$$\{x,y\} = \{x(t),y(t)\}:G\to W$$

$$\zeta(t) = <x,y> = z(\{x,y\}):W\to Z$$

بتطبيق النظرية الخاصة بمفاضلة تابع مركب وكذا النتيجة أ، نحصل على:

$$d\zeta = <x'(t)dt,y(t)>+<x(t),y'(t)dt>$$

وهو المطلوب.

ينتج من (2) ان مشتق التابع $\zeta(t)$ معين بالدستور:

$$\zeta'(t) = \langle x'(t), y(t)\rangle + \langle x(t), y'(t)\rangle \qquad (3)$$

حيث يمثل حدا الطرف الايمن المؤثرين الخطيين من T في Z المعرفين كما يلي:

$$\langle x'(t), y(t)\rangle dt = \langle x'(t)dt, y(t)\rangle$$
$$\langle x(t), y'(t)\rangle dt = \langle x(t), y'(t)dt\rangle$$

ج. نتيجة. إذا كان تابع $x(t): G\subset T\rightarrow X$ قابلا للإشتقاق عند $t=c$ وكان $\lambda(t): G\subset T\rightarrow L(X,Y)$ تابعا مؤثرياً قابلا للإشتقاق عند $t=c$، فإن الجداء $g(t) = \lambda(t)x(t): G\subset T\rightarrow Y$ يقبل الاشتقاق عند $t=c$ ولدينا:

$$dg(c) \equiv g'(c)dt = \lambda'(c)dt.x(c) + \lambda(c).x'(c)dt \qquad (4)$$

من السهل ان نرى بأن الحدين الواردين في الطرف الايمن ينتميان الى الفضاء Y.

د. نتيجة. إذا كان $\lambda(t): G\subset T\rightarrow R_1$ و $x(t): G\subset T\rightarrow R_1$ تابعين عددين قابلين للإشتقاق عند $G\ni t=c$، فإن الامر كذلك فيما يخص الجداء $g(t) = \lambda(t)x(t)$، ولدينا:

$$g'(c) = \lambda'(c)x(c) + \lambda(c)x'(c) \qquad (5)$$

يمثل الطرفان هنا تابعتين خطيتين على الفضاء T.

نلاحظ، في البرهان على ذلك، انه يمكن، في الحالة المعتبرة، تبديل العاملين $\lambda'(c)dt$ و $x(c)$ فيما بينهما ضمن (4)، نحصل بعد ذلك على:

$$dg(c) \equiv g'(c)dt = x(c)\lambda'(c)dt + \lambda(c)x'(c)dt$$
$$= [x(c)\lambda'(c) + \lambda(c)x'(c)]dt$$

ومنه تأتي (5).

1 .53 التابع x^{-1} ومشتقه

أ. ليكن x تطبيقا من مجموعة U في مجموعة V وy تطبيقا من المجموعة V في المجوعة U. هكذا إذن، عرفنا تابعين مركبين $xy:V\to V$ و$yx:U\to U$. إذا كان xy هو التطبيق المطابق e_V من المجموعة V على نفسه، يسمى y **المقلوب من اليمين لِـ** x ويسمى x **المقلوب من اليسار لِـ** y. بطريقة مماثلة، إذا كان yx هو التطبيق المطابق e_U للمجموعة U، يسمى x **المقلوب من اليمين لِـ** y، ويسمى y **المقلوب من اليسار لِـ** x. قد نجد تطبيقا x لا يقبل مقلوبا من اليمين أو يقبل عددا غير منته من هذه المقلوبات (ل.4 .67). لكن إذا قبل التطبيق $x:U\to V$ مقلوبا من اليمين $y:V\to U$ ومقلوبا من اليسار $z:V\to U$، فإن $z=ze_V=z(xy)=(zx)y=e_Uy=y$؛ وبالتالي يقبل x مقلوبا وحيدا من اليمين ومقلوبا وحيدا من اليسار متطابقين؛ يسمى، بطبيعة الحال، هذا التطبيق الوحيد **التطبيق المقلوب لِـ** (أو بالنسبة لِـ) x، ونرمز له بـ x^{-1}. وهكذا لدينا: $x^{-1}x = e_U$، $xx^{-1} = e_V$.

ب. نفرض الآن ان U وV فضاءان نظيميان تامان وان كل التطبيقات المعتبرة مؤثرات خطية محدودة. إن بعض المؤثرات الخطية $x:U\to V$ قابلة للقلب؛ تشكل هذه المؤثرات مجموعة نرمز لها بـ G. نعرف على هذه المجموعة التابع: $x^{-1}:G\to L(V,U)$. لنثبت، في الفضاء المتري $L(U,V)$ (المزود بالمسافة المؤثرية المعتادة (ي12 .17ـ ب))، ان المجموعة G تشكل ساحة (مجموعة مفتوحة) وان التابع x^{-1} مستمر على G. نستعمل لهذا الغرض كوْن عناصر الجبر $L(V)$ القريبة من الوحدة تقبل القلب (ي12 .28ـ أ). في البحث عن مقلوب عنصر $x+h$، من اجل h صغير، نضرب في البداية $x+h$ في x^{-1}، ونرى بأن حاصل الضرب قريب من الوحدة، وبالتالي قابل للقلب؛ ثم نبين ان العنصر $x+h$ يقبل ايضا القلب. لننجز هذه الفكرة بالتفصيل: من اجل كل $h\in L(U,V)$، لدينا:

$$(x+h)x^{-1} = xx^{-1}+hx^{-1} = e_V+hx^{-1}$$ ؛

وبالتالي عندما يكون $|h|<1/|x^{-1}|$ فإن $|(x+h)x^{-1}-e_V| = |hx^{-1}| = |h|.|x^{-1}|<1$ ، نلاحظ إذن ان العنصر $(x+h)x^{-1}$ يبعد عن e_V بمسافة اصغر من الوحدة. ينتج، ضمن هذه الشروط، ان المؤثر $(x+h)x^{-1}:V\to V$ يقبل القلب في الفضاء V (ي28.12 ـ أ)، يوجد إذن مؤثر $z_h:V\to V$ يحقق $(x+h)x^{-1}z_h = e_V$. يعني ذلك ان المؤثر $x^{-1}z_h$ مقلوب من اليمين لِـ $x+h$. كما ان تعويض $(x+h)x^{-1}$ بـ $x^{-1}(x+h)$ يجعلنا نبرهن على وجود، من اجل $|h|<1/|x^{-1}|$، مقلوب من اليسار لِـ $x+h$. ينتج الآن من أ ان العنصر $x+h$ قابل للقلب من اجل $|h|<1/|x^{-1}|$. سنرى انه إذا كان $x\in G$ فإن G يحوي كل عناصر $L(U,V)$ التي تبعد عن x بمسافة اصغر من $1/|x^{-1}|$ ؛ إذن فإن المجموعة G مفتوحة. ثم إننا نعلم بأن z_h يؤول الى e_V عندما يؤول h الى 0 (ي28.12 ـ ب)، ومنه فإن $h\to 0$ يستلزم:

$$(x+h)^{-1} = (x+h)^{-1}e_V = (x+h)^{-1}(x+h)x^{-1}z_h = x^{-1}z_h\to x^{-1}$$ ،

والتابع x^{-1} مستمر على ساحة تعريفه.

جـ. لنثبت، ضمن افتراض ب، ان التابع x^{-1} يقبل الإشتقاق ولنعين تفاضليته.

ننطلق من المتطابقة:

$$(x+h)[(xxh)^{-1}-x^{-1}]x = x-(x+h) = -h$$

فنحصل على:

$$(x+h)^{-1}x^{-1} = -(x+h)^{-1}hx^{-1} = -x^{-1}hx^{-1}+0(h)$$

وذلك بفضل استمرارية التابع x^{-1} في الساحة $G(b)$. ينتج من ذلك قابلية التابع x^{-1} للإشتقاق على ساحة تعريفه، كما تنتج المساواة:

$$d(x^{-1}) = (x^{-1})^{1}h = -x^{-1}hx^{-1}$$

نشير الى اننا لا نستطيع عموما اجراء تبديل في عوامل النتيجة المحصل عليها. حتى ولو كان $U=V$، إذن حتى ولو كان التبديل الشكلي للعوامل عملية مقبولة، فإننا لا نستطيع القيام بها لأن خاصية التبديل لا تتوفر بالضرورة في كل مؤثرات $L(U)$. يمكن في حالة $V = U = R_1$ فقط القيام بهذا التبديل بدون تحفظ؛ نعود فنجد عندئذ الدستور التقليدي

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

أو

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

63. 1 . مشتق نسبة (أو كسر). ليكن $f(x)$ و $g(x)$ تابعين عدديين قابلين للإشتقاقفي كرة $V = \{x\in X: |x-a|<r\}$ من فضاء نظيمي X؛ نعتبر بعد ذلك $0\neq g(x)$. لنثبت ان النسبة $f(x)/g(x)$ تابع عددي قابل للاشتقاق في V ولنبحث عن مشتقه. يمكن معالجة التابع $1/g(x)(V\to R_1-0)$ كتركيب للتابع القابل للاشتقاق $\mu = g(x)(V\to R_1-0)$ والتابع القابل للإشتقاق $1/\mu(R_1-0\to R_1-0)$؛ يتبين من 1 .33ـ أ و 1 .53ـ جـ ان التابع $1/g(x)$ قابل للإشتقاق ومشتقه يساوي:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{\mu^2}\, g'(x) = -\frac{1}{g^2(x)}\, g'(x) \qquad (1)$$

بتطبيق 1 .43ـ د، نحصل على النسبة $f(x)/g(x)$ القابلة للإشتقاق هي ايضا، اما مشتقها فهو:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad (2)$$

وتفاضليتها هي:

$$(3) \quad d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{df(x)g(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$$

في الحالة التي يكون فيها $X = R_n$، نتذكّر (42.1) اننا نرمز:

$$(4) \quad \frac{\text{grad}f(x)}{g(x)} = \frac{\text{grad}f(x).g(x) - f(x).\text{grad}g(x)}{g^2(x)}$$

73.1 . امثلة. أ. إذا اردنا ايجاد المشتقين الجزئيين $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ للتابع $(R_2 \to R_1)$ $\mu = \text{arctg}(y/x)$، يمكننا استخدام الخاصية 33.1ـ ج وحساب تفاضليتها كما نحسب تفاضلية التابع لمتغير y/x ثم نطبق 63.1 :(3)

$$d(\text{arctg}\, y/x) = \frac{1}{1+(y/x)^2}\, d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

نستنتج من ذلك المشتقين المطلوبين الذين يمثلهما المعاملان الواردين امام التفاضليتين لـx ولـy:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}\ , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

نستطيع كتابة النتيجة المحصل عليها بدلالة التدرج:

$$\text{grad arctg}\,\frac{y}{x} = \left\{-\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\ \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

ب. لتكن y نقطة مثبتة وx نقطة متغيرة في الفضاء R_n. نبحث عن المشتقات الجزئية للتابع $r = |x-y| = \sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$. بـاشتقـاق طـرفي

المساواة:

$$r^2 = (x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2$$

نحصل على:

$$2rdr = 2(x_1-y_1)dx_1+\dots+2(x_n-y_n)dx_n$$

ومنه يأتي:

$$dr = \frac{1}{r}[(x_1-y_1)dx_1+\dots+(x_n-y_n)dx_n]$$

إذن:

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j-y_j}{r}$$

83.1 . التفاضليات الجزئية. رمزنا اعلاه (22.1) للمشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_1، مثلا، لتابع $\mu(x) = \mu(x_1,\dots,x_n):(R_n\to R_1)$ بالرمز $\frac{\partial\mu}{\partial x_1}$. يمكننا اعطاء معنى للكميتين $\partial\mu$ و ∂x_1: يمثل ∂x_1 تزايد الاحداثية x_1 ويمثل $\partial\mu$ التفاضلية الجزئية الموافقة لتزايد x_1، أي الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع الموافق لتزايد x_1 عندما تبقى $x_2,\dots,x_n$ ثابتة. الّا اننا لا نرى في الرمز $\partial\mu$ الاحداثيات التي تتغير والاحداثيات الثابتة؛ ولهذا السبب فإن معنى هذا الرمز يتغير حسب الحالات المعتبرة، الامر الذي يتسبب في بعض الالتباس. نشير هنا الى بعض المحيرات (التناقضات) التي تظهر عند معالجة التفاضليات الجزئية شكليا بدون مراعاة المعنى الدقيق المراد بها.

أ. عند إختصار ∂x_i في دستور اشتقاق تابع مركب $v = \mu(x_1,\dots,x_n)$، $x_i\exists\ni x_i$ (33.1 ـ ب):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

نصل الى النتيجة التالية التي لا معنى لها: $\frac{\partial u}{\partial t} = n\frac{\partial u}{\partial t}$.

ب. نرمز بـxry للاحداثيتين الديكارتيتين وبـr، φ للإحداثيتين القطبيتين لنقطة من المستوى، لدينا:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \ r = x\sec\varphi$$

ينتج من العلاقة $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ان

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ومن العلاقة: $r = x\sec\varphi$ ان $\frac{\partial r}{\partial x} = \sec\varphi$

الّا ان هذين النتيجتين مختلفتان من اجل $x>0$ و$y>0$، لأن لدينا في هذه الحالة

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1 \quad \text{و} \quad \sec\varphi>1.$$

ج. ليكن $z = x+y$؛ عندئذ $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 1$. نستنتج من نفس المعادلة $x = z-y$ و$y = z-x$، إذن:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -1, \ \frac{\partial x}{\partial z} = 1, \ \frac{\partial y}{\partial z} = 1, \ \frac{\partial y}{\partial x} = -1$$

ومنه يأتي:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (-1).1.1 = -1$$

نجد ان هذه العبارة تساوي +1 عند اختصار ∂x، ∂y، ∂z.

الواقع ان الكميات ∂u النالغ عددها n في المثال أ ليست متساوية عموما؛ اما في المثال ب فإن ∂r الاول يوافق ازاحة مع y ثابت في حين يوافق ∂r الثاني ازاحة مع φ ثابت؛ اخيرا، في المثال ج، فإن الكميات الست الواردة في الجداء الاخير لها معان مختلفة.

إذن يجب لدى اعتبار التفاضليات الجزئية التنبه الى معناها الدقيق(*).

(*) يوصى عادة في الكتب المدرسية باعتبار الرمز $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ككل لا يتجزأ، أي بدون اعطاء معنى منفصل للبسط ومعنى منفصل للمقام.

1 .93 . المشتق وفق خط .

أ . ليكن $\Gamma = \{x \in X : x = x(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$ منحنيا مرنا في ساحة $X \supset G$. يعني ذالك ان التابع $x(t)(R_1 \to G)$ يقبل مشتقا $x'(t)$ مستمراً من اجل $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ (يتعلق الامر في الطرفين ظ$t=$ و$t=\beta$، بطبيعة الحال، بالمشتق من اليمين وبالمشتق من اليسار على التوالي، ي91.7).إن الشعاع $x'(t)$ ماس للخط Γ عند النقطة $x(t)$(ي31.16)؛ نسميه **الشعاع الموجه** لماس المنحنى Γ، أو الشعاع الموجه للمنحنى Γ إذا اردنا الاختصار. ليكن بعد ذلك $x(\alpha) = a \in G$ و$x(\beta) = b \in G$.

نعتبر تابعا $y(x)$ $y: G \to Y$ قابلا للإشتقاق، على الاقل، عند كل نقطة من المنحنى Γ، ونضع:

$$\varphi(t) = y[x(t)](R_1 \to Y)$$

إن هذا التابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـt حسب النظرية 33.1ـ أ. يسمى مشتقه **مشتق التابع** $y(x)$ **وفق المنحنى** Γ. لدينا، استنادا الى الدستور 33.1 (3):

$$\varphi'(t) = y'(x).x'(t) \qquad (x = x(t)) \tag{1}$$

اي ان مشتق التابع $y(x)$ وفق المنحنى Γيطابق مشتقه وفق الشعاع الموجه لِـΓ (72.1). في الحالة التي يكون فيها المنحنى Γ هو قطعة المستقيم $x = c+te$، $0 \leqslant t \leqslant 1$، $|e|=1$، فإن المشتق وفق Γ هو من اجل $t=0$، امشتق وفق الاتجاه Γ(72.1ـ أ).

ب. نفرض، في أ، ان المنحنى Γ ينتمي الى سطح مستوي Q (11.1ـ د) تابع قابل للإشتقاق $f(x)$. إن مشتق التابع $f(x)$ وفق هذا المنحنى عند النقطة c يساوي $f'(c)x'(\gamma)$ طبقا للدستور (1)؛ لكن هذا المشتق منعدم لأن $f(x)$ ثابت على كل السطح Q، وبصفة خاصة على المنحنى Γ . هكذا لدينا:

$$f'(c)x'(\gamma) = 0$$

وبالتالي فإن المؤثر $f'(c)$ منعدم على كل الاشعة الماسة لمنحنيات السطح Q عند النقطة c؛ بعبارة اخرى: $f'(c)$ منعدم على كل شعاع من المستوى الماس للسطح Q عند النقطة c. نعبّر على هذه النتيجة كالتالي: **إن تدرج تابع $f(x)$ نتعامد عند كل نقطة من سطح مستوى التابع $f(x)$ على هذا السطح**. ينبغي ربط هذا المصطلح بحالة تابع عددي $f(x)$ في فضاء هيلبرتي، وبصفة خاصة في فضاء اقليدي ذي بعد منته حيث يعمل المؤثر $f'(a)$ وفق الدستور 22.1 (5) الذي يحوى الجداء السلمي:

$$f'(a)h = (\text{grad}f(a), h)$$

تسمح هذه النتيجة بتعيين معنى التدرج عندما نكون على علم بسطوح مستوى التابع العددي المعتبر. وهكذا، إذا تعلق الامر بتابع عددي من الشكل$f(|x-a|)$ فإن التدرج عند كل نقطة $a\neq x$ متعامد على سطح الكرة: $|x-a| = r$ الذي يمثل سطح مستوى التابع المعتبر، اي ان التدرج موجه وفق الشعاع المنطلق من النقطة a والواصل الى النقطة x.

ج. لنطبق الدستور (1) في دراسة مفصلة (بالمقارنة بـ1 .62ـ ج) للمستوى الماس π لسطح $P = \{x\in G, y\in Y: y = y(x)\}$ من الفضاء $G\times Y$. إن معادلة المستوى الماس عند النقطة $x=c$ ((7)6201) هي:

$$y-p = y'(c)(x-c) \qquad (p = y(c)) \tag{2}$$

لنرسم في الساحة G كل المنحنيات القابلة للإشتقاق التي تمر بالنقطة c (الرسم 1.3.1). إن معـادلات هـذه المنحنيـات تكتـب على الشكـل $x = x(t)$ حيث $x(\gamma) = c$. «ننقل»؛ بفضل المعادلة $y = y(x)$، هـذه المنحنيـات الى السطـح P ونمثلهـا وسيطيـاً بـ$x = x(t)$، $y = y[x(t)] = \varphi(t)$.

تعين المعادلتان المواليتان المماس لأي منحن من هذه المنحنيات عند النقطة $x=c$، $p=$:

$$x-c = x'(\gamma)(t-\gamma) \ , \ y-p = \varphi'(\gamma)(t-\gamma)$$

نكتب هذين المعادلتين، بفضل الدستور (1)، على الشكل:

$$x-c = x'(\gamma)(t-\gamma)\ ,\ y-p = y'(c).x'(\gamma)(t-\gamma) \qquad (3)$$

نلاحظ ان كل مستقيم من المستقيمات (3) ينتمي الى المستوى (2).

وبالعكس، فإن كل مستقيم من المستوى (2) يمر بالنقطة $\{c,p\}$ يمثل بالضرورة مماسا، عند هذه النقطة، لمنحن على السطح P. ذلك انه إذا كانت $x=c_1$، $y = p_1 = p+y'(c)(c_1-c)$ نقطة كيفية اخرى من المستوى π، فإن المستقيم المار بهذين النقطتين تمثله المعادلة:

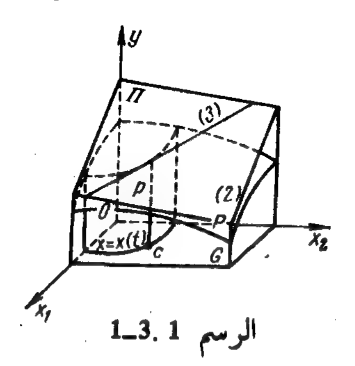
$$x = c+(c_1-c)t\ ,\ y = p+y'(c)(c_1-c)t$$

ونحن نعلم ان هذا المستقيم مماس للمنحنى:

$$x = c+(c_1-c)t\ ,\ y = y[c+(c_1-c)]$$

الواقع على السطح P.

اخيرا، نرى ان المستوى الماس π هو اتحاد المستقيمات الماسة لكل المنحنيات القابلة للإشتقاق المارة، في السطح P، بالنقطة $\{c,p\}$.



الرسم 1-3. 1

د. إن التفسير الهندسي، ضمن شروط أ، للتابع $\varphi(t) = y[x(t)]$ هو انه منحن قابل للإشتقاق L في الفضاء Y. تبين المساواة (1) اننا نستنتج، من اجل $t\in[\alpha,\beta]$، الشعاع الماس $\varphi'(t)$ (عند النقطة الموافقة له من المنحنى L) بتطبيق المؤثر الخطي $y'(x(t))$ على الشعاع $x'(t)$ الماس للمنحنى Γ. إذا اعتبرنا في الساحة G جماعة كل المنحنيات القابلة

للإشتقـــــاق $x = \overline{x}(t)$ التي تشترك في القيمتين $X \ni x_0 = \overline{x}(t_0)$ و $X \ni z_0 = \overline{x}'(t_0)$ فإن التطبيق $y(x)$ يحولها الى جماعة منحنيات قابلة للإشتقـــــاق $y = \overline{\varphi}(x)$ تشترك، هـــــي الاخـــــرى، في القيمتين $\overline{\varphi}(t_0) = y(x_0)$ و $\overline{\varphi}'(t_0) = y'(x_0) = z_0$. يمكن القول ان $y'(x_0)$ يحول (خطيا) الاشعة الماسة $x'(_0)$ الى الاشعة الماسة $\varphi'(_0)$؛ نلاحظ ان ذلك يميز المؤثر $y'(x_0)$ بشكل ادق من كونه ينتمي فقط الى الفضاء $L(X,Y)$.

ر. ليكن P سطحا مرنا في ساحة $X \supset G$؛ بعبارة اخرى، لدينا تابع $x = x(u)$، $u = (u_1,...,u_n) \in Q \subset R_n$، يقبل الاشتقاق باستمرار في الساحة Q ويأخذ قيمه في الساحة G. إذا كانت الاشعة

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial x}{\partial u_n}$$

مستقلة خطيا عند نقطة $(u_1, ..., u_n) = u \ni Q$، فإننا نقول عن النقطة $x(u)$ إنها عادية للسطح P، ويسمى سطح P مشكل فقط من نقاط عادية سطحا ذا بعد n.

يمكن تعيين كل سطح مرن L على السطح P بمعادلات ذات الشكل $x = x(u_1,...,u_n)$ حيث $u_j = u_j(t)$، $j = 1,...,n$، $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. يعطي شعاع ماس للمنحنى L عند النقطة $L \ni a = x(u_1^0,...,u_n^0)$، موافق لقيمة $t = t_0$ بالمساواة:

$$\frac{dx}{dt}(a) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial u_l}(a).u_l'(t_0)$$

اي انه يمثل عبارة خطية للاشعة

$$\frac{\partial x}{\partial u_1}(a), ..., \frac{\partial x}{\partial u_n}(a)$$

كما يمكن الحصول على اية عبارة خطية لهذه الاشعة بنفس الطريقة؛ إذا رمزنا بـ $c_1,...,c_n$ لمعاملات هذه العبارة الخطية، فإن

الشعاع: $\sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\partial x(a)}{\partial u_i}$ ماس لمنحنى معين، مثلا، بالمعادلات:

$$x = x(u) \ , \ u_i = u_i^0 + c_i t$$

نرى إذن ان الاشعة الماسة لكل المنحنيات المرنة على السطح P المارة بنقطة معطاة a تملأ منوعة خطية $\pi(a)$ ذات بعد n في X؛ تسمى هذه المنوعة **المنوعة الخطية الماسة للسطح** P عند النقطة a.

س. مثال. تعيّن المعادلات الموالية في R_3:

$$x_1 = \sin\theta \cos\varphi \ , \ x_2 = \sin\theta \sin\varphi \ , \ x_3 = \cos\theta$$

المتعلقة بوسيطين θ وφ، سطحا ثنائي البعد P (وهو سطح الكرة المتمركزة في مركز الاحداثيات ذات نصف القطر 1). ننشيء المستوى الماس لهذا السطح عند نقطة $a(\theta_0,\varphi_0)$. إن شعاعي الاساس $\frac{\partial x}{\partial \theta}$، $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$ هما:

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \{\cos\theta.\cos\varphi, \cos\theta.\sin\varphi, \sin\theta\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \{-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta.\cos\varphi, 0\}$$

اما معادلة المستوى المار بالنقطة $a(\theta_0,\varphi_0)$ والذي يحوى الشعاعين $\frac{\partial x}{\partial \theta}(a)$، $\frac{\partial x}{\partial \varphi}(a)$ فهي:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1(\theta_0, \varphi_0) & x_2 - x_2(\theta_0, \varphi_0) & x_3 - x_3(\theta_0, \varphi_0) \\ \cos\theta_0 \cos\varphi_0 & \cos\theta_0 \sin\varphi_0 & -\sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 \sin\varphi_0 & -\sin\theta_0 \cos\varphi_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

وهو المستوى الماس المطلوب.

§ 4.1 . نظرية المتوسط

41.1 نعتبر، في ساحة $X \supset G$، منحنيا مرنا:

$$L = \{x \in G : x = x(t), \alpha \leqslant t \leqslant\} ; x(\alpha) = a, x(\beta) = b$$

نعتبر ايضا تابعا قابلا للإشتقاق $y = y(x):G\to Y$. نفرض في البداية $Y=R_1$، اي ان $y(x)$ تابع عددي.

أ. نظرية المتوسط. إذا كان التابع العددي $y(x)$، $y:G\to R_1$ قابلا للإشتقاق عند نقاط المنحنى L، فإنه يوجد $\theta\in(\alpha,\beta)$ بحيث:

$$y(b)-y(a) = y'(c)x'(\theta)(\beta-\alpha) \quad (c = x(\theta)) \tag{1}$$

البرهان. نضع، كما هو الحال في 9301ـ أ، $\varphi(t) = y[x(t)]$، $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. بما ان التابع $\varphi(t):R_1\to R_1$ قابل للإشتقاق فإن لدينا حسب نظرية لاغرانج (ي44.7)

$$y(b)-y(a)=\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)=\varphi'(\theta)(\beta-\alpha)$$

وذلك من قيمة $\theta\in(\alpha,\beta)$. بتطبيق الدستور 93.1 (1) نحصل على:

$$\varphi'(\theta) = y'(c)x'(\theta)\ ,\ c = x(\theta)$$

ومنه تأتي (1).

ب. تأخذ العلاقة (1) شكلا بسيطا جداً عندما يكون المنحنى L هو قطعة المستقيم الذي يصل النقطتين a وb، إذا نستطيع كتابة: $L = \{x\in X:x(t)= (1-t)a+tb,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$. لدينا في هذه الحالة: $x'(t) = b-a$ وترد بذلك العلاقة (1) الى

$$y(b)-y(a) = y'(c)(\text{س}-\text{ة})\ ,\ c\in \dot{L}$$

24.1. إذا لم يكن التابع $y(x)$، $y:G\to Y$ عدديا، فإن نظرية لاغرانج لا تقبل التطبيق على التابع $\theta(t) = y[x(t)]:R_1\to Y$. وبالتالي فإن العلاقة 14.1ـ(1) لا تقوم عموما من اجل مثل هذا التابع (انظر التمرين 7).

أ. لدينا رغم ما سبق قوله المتراجحة التالية:

$$|y(b)-y(a)|\leqslant \sup_{x\in L}\|y'(x)\|.s(L) \tag{1}$$

حيث يمثل $s(L)$ طول المنحنى L (ي91.16)، ويمثل $|y(b)-y(a)|$ نظيم

الشعاع $Y \ni y(b)-y(a)$ و$\|y'(a)\|$ نظيم المؤثر $y'(x)(X \to Y)$.

للبرهان على (1) نرمز بـ$\|y'(x)\|$ $M = \sup_{x \in L}$. نستطيع (حسب التعريف المشتق) من اجل كل $0<\varepsilon$ و$\tau \in [\alpha,\beta]$، ايجاد $\delta(\varepsilon,\tau)=\delta>0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leqslant |\varphi'(\tau)| \cdot |t - \tau| + \varepsilon |t - \tau| \leqslant$$
$$\leqslant M |x'(\tau)| |t - \tau| + \varepsilon |t - \tau|$$

وذلك عندما ينتمي t الى $\Delta(\tau) = \{t p |t-\tau|<\delta\}$.

توجد، حسب التوطئة الخاصة بالتغطية المنتهية ي79.3، تغطية للمجال $[\alpha,\beta]$، بعدد منته من المجالات ذات الشكل الوارد وصفه ادناه.

نرمز لهذه المجالات بـ$\Delta(\tau_1)$، $\Delta(\tau_3)$، ...، $\Delta(\tau_{2n+1})$، بافتراض ان $\alpha = \tau_1<\tau_3<\ldots<\tau_{2n+1}=\beta$. نختار بعدها النقاط $\tau_2<\tau_4<\ldots<\tau_{2n}$ بحيث تكون كل نقطة τ_{2k} منتمية الى تقاطع المجالين $\Delta(\tau_{2k-1})$ و$\Delta(\tau_{2k+1})$ (حيث $k = 1,\ldots,n$). نحصل عندئذ على:

$$|y(b)-y(a)|=|\varphi(\beta)-\varphi(\alpha)| \leqslant \sum_{l=1}^{2n}|\varphi(\tau_{l+1})-\varphi(\tau_l)| \leqslant \tag{2}$$
$$\leqslant M\sum_{l=1}^{2n}|x'(\tau_j)||\tau_{l+1}-\tau_l|+\varepsilon(\beta-\alpha)$$

حيث يرمز j للعدد الفردي من بين العددين l و $l+1$. نحصل عند الانتقال الى النهاية $\varepsilon \to 0$ في (2) على المتراجحة المطلوبة (1).

ب. في الحالة التي يكون فيها L هو القطعة المستقيمة التي تصل a بـb، تأخذ المتراجحة (1) الشكل البسيط التالي:

$$|y(b)-y(a)| \leqslant \sup_{x \in L}\|Y'(x)\| \; |b-a| \tag{3}$$

ج. باعتبار نفس الحالة السابقة، يمكننا البرهان على متراجحة اقوى من المتراجحة (3)، وهي:

$$|y(b)-y(a)| \leqslant \sup_{x \in L}|y'(x)(b-a)| \tag{4}$$

ندرك امتياز هذه المتراجحة بالمقارنة مع (3)، مثلا، عندما يكون $X=R_n$ و $Y=R_1$ والزاوية التي يشكلها الشعاع $y'(x) = \text{grad}y(x)$ مع الشعاع $b-a$ زاوية قائمة.

د. نعتبر، ضمن افتراضات ب - ج، التابع:

$$g(x) = y(x)-y'(a)(x-a)$$

إنه تابع قابل للإشتقاق وكذا $y(x)$، لدينا إذن، استناداً الى 23.1 أ - ب:

$$g'(x) = y'(x)-y'(a)$$

نجد، عند تطبيق المتراجحة (4) على (1907، ان:

$$|y(b)-y(a)-y'(a)(b-a)|\equiv|g(b)-g(a)|\leqslant\sup_{x\in l}|g'(70)(b-a)|$$

أو

$$|y(b)-y(a)-y'(a)(b-a)|\leqslant\sup_{x\in L}|[y'(x)-y'(a)]\cdot(b-a)|, \quad (5)$$

وهي نتيجة اقوى بكثير من (2).

ر. يمكن استخدام المتراجحة (5) في شكل اضعف:

$$|y(b)-y(a)-y'(a)(b-a)|\leqslant\sup_{x\in L}\|y'(x)-yH(a)\|\ |b-a| \quad (6)$$

ورغم ذلك فإن المتراجحة (6) اقوى من (2).

34.1. أ. نظـريـة. إذا كـان لـدينـا $y'(x)\equiv 0$ في كـرة $V = \{x\in X:|x-a|\leqslant r\}$، فإن $y(x)$ ثابت.

بالفعل، ينتج من 24.1 (1) ان لدينا، من اجل كل $b\in V$ ومن اجل القطعة المستقيمة L التي تصل النقطتين a وb، المتراجحة 42.1 (3):

$$|y(b)-y(a)|\leqslant\sup_{x\in L}\|y'(x)\|\ |b-a| = 0$$

ومنه يأتي $y(b)\equiv y(a)$.

ب. نتيجة. إذا كان لتابعين $y_1(x)$ و$y_2(x)$، في كرة $V = \{x \in X: |x-a| \leqslant r\}$، مشتقان متطابقان فإن الفرق بين $y_1(x)$ و$y_2(x)$ ثابت في هذه الكرة.

ذلك ان مشتق $y_1(x)-y_2(x)$ منعدم وعليه نستطيع تطبيق أ.

ج. نتيجة. إذا كان المؤثر $yH(x)$، في كرة $V = \{x \in X: |x-a| \leqslant r\}$، ثابت $(y'(x)=y'(a))$ فإن

$$y(x) = y'(a)(x-a)+y(a)$$

يتم البرهان على هذه النتيجة كما ورد في أ، الّا اننا نستعمل هنا المتراجحة 1 .24(5) بدل 1 .24(1). هذا ويمكننا الاستغناء عن 1 .24(5): إن مشتق التابع $g(x) = y'(a)(x-a)+y(a)$ هو $g'(a) = y'(a)$؛ ولذا، طبقا لِـ ب، فإن الفرق بين التابعين $g(x)$ و$y(x)$ ثابت؛ بوضع $x=a$ يتبين لنا ان هذا الثابت منعدم.

1 .44 . المشتق وشرط ليبشيتز (Lipschitz).

أ. نقول عن تابع $(G \subset X \to Y)$ $y = y(x)$ إنه يتمتع بشرط ليبشيتز في كرة $G \supset V = \{x \in X: |x-a| \leqslant r\}$، إذا وجد ثابت $0<c$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|y(x_1)-y(x_2)| \leqslant c|x_1-x_2| \qquad (1)$$

وذلك من اجل كل $V \ni x_1$ و$V \ni x_2$.

لنفرض ان التابع $y(x)$ قابل للإشتقاق في الكرة V وأن:

$$\sup_{x \in V} \| y'(x) \| = B.$$

حينئذ يكون لدينا، بفضل 1 .24(3):

$$| y(x_1) - y(x_2) | \leqslant B \, | x_1 - x_2 |,$$

أي ان التابع $y(x)$ يحقق في الكرة V شرط ليبشيتز (1) بالثابت B.

وبالعكس، إذا كان للتابع $y(x)$ مشتق مستمر $yH(x)$ ويحقق في الكرة V شرط ليبشيتز (1)، فإننا نستطيع التاكيد على ان $\|y'(x)\|\leqslant c$. بالفعل، ليكن $|x-a| = \rho<r$؛ نبحث،من اجل $0<\varepsilon$، على $0<\delta$، $\delta<r-\rho$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|y(x_1)y(x)-yH(x)(x_1-x)|<\varepsilon|x_1-x|$$

وهذا من اجل كل x_1 بحيث $|x_1-x|\leqslant\delta$. لما كان $|y(x_1)-y(x)|\leqslant C|x_1-x|$ فرضا، فإن:

$$|y'(x)(x_1-x)|\leqslant(c+\varepsilon)|x_1-x|$$

وهذا من اجل $|x_1-x|\leqslant\delta$، ومنه تأتي المتراجحة:

$$\|y'(x)\|\leqslant c+\varepsilon$$

المتعلقة بنظيم المؤثر $yH(x)$؛ بما ان $0<\varepsilon$ كيفي، ينتج ان $\|y'(x)\|\leqslant c$، وهو المطلوب.

نلاحظ ان شرط ليبشيتز (1) لا يكفي، عموما، لقابلية التابع (x) للإشتقاق (حتى في الحالة $X=R_1$؛ مثل $(y = |x|(R_1\to R_1))$.

ب. هناك حالة خاصة هامة جدا وهي الحالة التي يكون فيها $\sup\|y'(x)\|<1$. يعني ذلك، كما رأينا، ان التابع$y1(z$ يتمتع بشرط ليبشيتز بثابت c اصغر من 1. بعبارة اخرى فإن التابع $y=y(x)$ **يقصّر المسافات**: إن المسافة بين النقطتين $y(x)$ و$y(a)$ اصغر تماما من المسافة بين النقطتين xوa. إذا كانت زيادة على ذلك، قيم التابع $y(x)$ تنتمي الى الساحة V، وكان $\sup\|y'(x)\|\leqslant\theta<1$ فإن التطبيق $y(x):V\to V$ يصبح مقلصا (ي22.13):

$$|y(x')-y(x'')|\leqslant\theta|x'-x''|$$

نلاحظ ان لتابع $y(x)$ على الكرة المغلقة V (التي تمتد عليها هذه

المتراجحة بالاستمرار) بالضرورة نقطة صامدة (ثابتة) حسب ي22. 13 .

ج. يمكن ايجاد شرط بسيط كاف لكي يطبق تابع $y(x)(V\subset X\to X)$، يتمتع في كرة $V=\{x\in X: |x-a|\leqslant r\}$ بشرط ليبشيتز بثابت $\theta<1$، هذه الكرة في نفسها. يكفي بالفعل ان تتحقق المتراجحة $|y(a)-a|\leqslant(1-\theta)r$. لدينا بفضل هذا الشرط:

$$|y(x)-a|\leqslant|y(x)-y(a)|+|y(a)-a|\leqslant\theta|x-a|+|1-\theta|r$$
$$\leqslant\theta r+(1-\theta)r=r$$

بحيث ان كل قيم التابع $y(x)$، من اجل $x\in V$، تنتمي الى الكرة V.

د. بدمج النتائج أ، ب، ج نصل الى النظرية التالية:

نظرية. إذا كان تابع $y(x)(V\to X)$ قابلا للإشتقاق في كرة $V=\{x\in X: |x-a|\leqslant r\}$، وتتحقق المتراجحتان:

$$\sup_{x\in V}\|y'(x)\|\leqslant\theta\ ,\ |y(a)-a|\leqslant(1-\theta)r$$

مع $\theta<1$، فإنه توجد في الكرة V نقطة وحيدة x_0 تحقق $y(x_0)=x_0$.

سنستخدم في المستقبل هذه الطريقة للبرهان على وجود النقاط الصامدة.

54. 1. نظرية. نفرض انه توجد في كرة $V=\{x\in X: |x-a|\leqslant r\}$ متتالية $y_1(x),y_2(x),\ldots$ من التوابع القابلة للإشتقاق التي تأخذ قيمها في فضاء تام Y والتي لها مشتقات $y_1'(x),y_2'(x),\ldots(X\to L(X,Y))$ مستمرة ومتقاربة بانتظام في V نحو تابع $g(x)(X\to L(X,Y))$. إذا آلت الاشعة $y_1(a),y_2(a),\ldots$ المنتمية للفضاء Y الى نهاية، فإن المتتالية $y_1(x),y_2(x),\ldots$ متقاربة بانتظام في V نحو تابع $y(x)$ (قيمه في Y) يقبل الاشتقاق داخل الكرة V، ولدينا $y'(x)=g(x)$.

البرهان. نكتب الدستور 24.1 (3) بعد أن نعوض فيه y بـ $y_n - y_m$، و b بـ y:

$$|[y_n(x)-y_m(x)]-[y_n(a)-y_m(a)]| \leqslant \sup \|y_m(x)\|_{x\in V} |x-a|$$

يؤول الطرف الايمن الى 0 عندما يؤول n و m الى ∞، وذلك بفضل التقارب المنتظم للمتتالية $y_n'(x)$. ثم إن نتتالية الاشعة $y_n(a)$ متقاربة وعليه فإن الفرق $y_n(x)-y_m(x)$ يؤول الى الصفر، عندما يؤول n و m الى∞، بانتظام بالنسبة لِـ$x\in V$. هكذا فإن النتتالية $y_n(x)$ كونية في Y، وبما ان Y تام، يوجد تابع نهاية $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$. إن هذا التابع مستمر حسب التقارب المنتظم للمتتالية $y_n(x)$ (31.1 ـ ب). نكتب الآن الدستور 24.1 (6) من اجل التابع $y_n(x)$ في كرة نصف قطرها ρ ومركزها نقطة b، $|b-a| \leqslant r-\rho$:

$$(1) \quad |y_n(x)-y_n(b)-y_n'(b)(x-b)| \leqslant \sup_{|\xi-b|\leqslant\rho} \|y_n'(\xi)-y_n'(b)\| \, |x-b|.$$

نستطيع، من اجل $\varepsilon>0$، اختيار $\delta>0$، $\delta<\rho$، بحيث يكون:

$$\sup \|y_n'(\xi)-y_n'(b)\| \leqslant \varepsilon$$

وهذا من اجل كل العناصر $N=n$، $N+1$، ... الكبيرة بكفاية. للتأكد من ذلك تكفي الاشارة الى ان.

$$y_n'(\xi)-y_n'(b) = [g(\xi)-g(b)]-[g(\xi)-y_n'(\xi)]+[g(b)-y_n'(b)]$$

واستعمال انتظام تقارب $y_n'(x)$ نحو $g(x)$ وكذا استمرار التابع $g(x)$.

عندما نعوض في (1) ρ بـε وننتقل الى النهاية، $n\to\infty$، نرى من اجل كل x بحيث $|x-b|\leqslant\delta$، ان:

$$|y(x)-y(b)-g(b)(x-b)| \leqslant \varepsilon |x-b|$$

وهو ما يثبت قابلية $y(x)$ للإشتقاق عند $x=b$ والمساواة $y'(b) = g(b)$.

يمكن في كل النتائج 1 .44ـ1 .54 تعويض الكرة V بساحة مترابطة (اي ساحة يمكن وصل كل نقطتين منها x_0 و x_1 بخط مضلعي عدد اضلاعه منته).

1 .64 . المشتقات بالنسبة للفضاءات الجزئية

أ . استنادا الى التعريف، فإنه إذا كان $y = y(x)(G\subset X\to Y)$ تابعا قابلاللإشتقاق عند $G\ni x=c$، فإن المؤثر الخطي $y'(c)$ معرف على كل الفضاء X، والجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $y(x)$ الموافق لتزايد h للمتغير المستقل يساوي $y'(c)h$. الّا اننا نستطيع طرح مسألة قابلية التابع $y(x)$ للإشتقاق بالإقتصار على تزايدات المتغير المستقل المنتمية لفضاء شعاعي جزئي $X\supset X_1$.

نقول عن تابع $y(x)(G\subset X\to Y)$ إنه **يقبل الاشتقاق بالنسبة لفضاء جزئي** $X\supset X_1$ إذا كان تزايد $y(x)$ لدى الانتقال من نقطة $x=c$ الى نقطة $x=c+h$، $X_1\ni h$، يقبل جزءا خطيا رئيسياً بالنسبة لِـ$X_1\ni h$:

$$y(c+h)-y(c) = D_1(c)h+0(h)$$

حيث $D_1(c)$ مؤثر خطي معرف على الفضاء الجزئي X_1. يسمى $D_1(c)$**مؤثر المشتق الجزئي بالنسبة للفضاء الجزئي** X_1. نرمز احيانا للمتغير x المنتمي الى الفضاء الجزئي X_1 برمز خاص، مثلا x_1 (مع الاحتفاظ بالرمز x لأشعة الفضاء X)، يُرمز حينئذ للمؤثر $D_1(c)$ بـ$\frac{\partial y}{\partial x_1})d1$.

ب . لنر، مثلاً، ما هي قابلية تابع $y(x)(G\subset R_n\to Y)$ للإشتقاق بالنسبة للفضاء الوحيد البعد X_k ا لمعرف بمحور الاحداثيات x_k. لدينا في هذه الحالة $h = (0,\dots,h_k,\dots,0)$ والمساواة:

$$y(c+h)-y(c) =$$
$$= y(c_1,\dots,c_k+h_k,\dots,c_n)-y(c_1,\dots,c_k,\dots,c_n) = D_k(c)h_k+0(h_k)$$

حيث $D_k(c):X_k\to Y$. نلاحظ ان ذلك يكافيء وجود مشتق جزئي عادي $\frac{\partial y}{\partial x_k}(c)$ (22.1 ـ ب) مطابق للكمية $D_k(c)$. إن المشتق بالنسبة لفضاء جزئي وحيد البعد ما هو، عموما، سوى المشتق وفق الاتجاه الموافق لهذا الفضاء (72.1 ـ أ).

جـ. إن قابلية تابع: $y(x):R_n\to R_m$ للإشتقاق عند نقطة $x=c$ بالنسبة للفضاء الجزئي R_k المولد عن الاشعة الاولى، البالغ عددها k، من اساس لـR_n، تستلزم وجود كل المشتقات الجزئية الواردة في المصفوفة التالية:

$$\frac{\partial(y_1,\ldots,y_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}(c)\cong\left\|\begin{matrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}(c)\ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k}(c)\\ \ldots & \ldots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}(c)\ldots & \frac{\partial y_m}{\partial x_k}(c)\end{matrix}\right\|$$

يمثل المؤثر الخطي $(R_k\to R_m)$ الموافق لهذه المصفوفة المشتق الجزئي للتابع $y(x)$ بالنسبة للفضاء الجزئي R_k.

د. من الواضح انه إذا كان التابع $y(x)$ قابلا للإشتقاق عند نقطة c بالمفهوم الاصلي 32.1، فإنه يقبل الاشتقاق عند هذه النقطة بالنسبة لأي فضاء جزئي $X\supset X_1$، والمؤثر الخطي الموافق له، أي المشتق الجزئي $\frac{\partial y}{\partial x_1}(c)$، ليس سوى اقتصار المؤثر $\frac{\partial y}{\partial x}(c)$ على الفضاء الجزئي X_1.

74.1. إن قابلية تابع $y(x)$ للاشتقاق بالنسبة لفضاء جزئي (ذاتي) $X\supset X_1$ لا يستلزم عموما قابليته للإشتقاق بالنسبة لكل الفضاء X. واكثر من ذلك، فإن قابلية تابع $y(x)$ عند نقطة $x=c$، في حالة $X=R_n$، بالنسبة لكل فضاء جزئي بعده $n>k$ لا يستلزم قابليتهللإشتقاق بالنسبة للفضاء R_n (راجع التمرين 3). لدينا بهذا الخصوص النظرية التالية:

أ. نظرية. إذا كان فضاء X مجموعا مباشرا لفضاءين جزئيين منه X_1 وX_2، وكان لدينا تابع $y(x):G\subset X\to T$ قابلا للإشتقاق في جوار نقطة$G\ni c$، بالنسبة للفضاءين الجزئيين X_1 و X_2، وكان المشتقان الجزئيان $\frac{\partial y}{\partial x_1}(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial x_2}(x)$ مستمرين عند النقطة c، فإن التابع $y(x)$ يقبل الاشتقاق عند النقطة c بالنسبة لكل الفضاء X.

البرهان. نستطيع، من اجل كل $h\in X$، كتابة $h = h_1+h_2$، $h_1\in X_1$ و $h_2\in X_2$، وبالتالي فإن العلاقة $h\to 0$ تكافىء $h_1\to 0$ و$h_2\to 0$ (ي12 .27ـ ر). ثم، من اجل عناصر h صغيرة بكفاية، لدينا:

$$y(c+h)-y(c)=y(c+h_1+h_2)-y(c+h_1)]+[y(c+h_1)-y(c)]$$

نطبق الآن نظرية المتوسط 1 .24ـ ر فنجد:

$$|y(c+h)-y(c)-\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1)h_2-\frac{\partial y}{\partial x_1}(c)h_1|$$

$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\|\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1+th_2)\quad\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1)\|\ |h_2|$$

$$+\sup_{0\leqslant \tau\leqslant 1}\|\frac{\partial y}{\partial X_1}(c+\tau h_1)\quad\frac{\partial y}{\partial x_1}(c)\|\ |h_1|$$

لدينا بفضل استمرار المشتقين $\frac{\partial y}{\partial x_1}(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial x_2}(x)$ عند النقطة c:

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1)=\frac{\partial y}{\partial x_2}(c)+0(1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1+th_2)-\frac{\partial y}{\partial x_2}(c+h_1)=0(1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(c+\tau h_1)\quad\frac{\partial y}{\partial x_1}(c)=0(1)$$

حيث يؤول $0(1)$ الى 0 عندما $h_1\to 0$ و$h_2\to 0$.

وبالتالي:

$$y(c+h)-y(c)=\frac{\partial y}{\partial x_1}(c)h_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}(c)h_2+0(h)$$

يمكن وضع هذه النتيجة على الشكل:

$$y(c+h)-y(c) = Dh+0(h)$$

حيث تعرف المساواة

$$Dh \quad \frac{\partial y}{\partial x_1}(c)h_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}(c)h_2$$

المؤثر D كمؤثر مستمر على الفضاء X (ي27.12ـ س). ينتهي بذلك برهان النظرية.

ب. تأتي النظرية التالية بسهولة من النظرية السابقة وذلك بالتدريج:

نظرية. إذا كان فضاء X مجموعا مباشرا لفضاءات جزئية منه X_1، ...، X_n، وكان لدينا تابع $y(x)(G\subset X\to Y)$ قابلا للإشتقاق في جوار نقطة $x=c$ بالنسبة للفضاءات الجزئية X_1، ...، X_n، وكانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial y}{\partial x_1}(x)$، ...، $\frac{\partial y}{\partial x_n}(x)$ مستمرة عند النقطة c، فإن التابع $y(70)$ يقبل الاشتقاق عند النقطة c بالنسبة للفضاء X.

لاحظ أن هذه النظرية اعم من النظرية السابقة.

جـ. نطبق النظرية ب على الحالة التي يكون فيها $X=R_n$ و X_1، ...، X_n هي الفضاءات الجزئية الوحيدة البعد الموافقة لمحاور الاحداثيات. بما ان المشتق بالنسبة لكل فضاء جزئي وحيد البعد X_k هو المشتق الجزئي $\frac{\partial}{\partial x_k}$ (64.1ـ ب)، فإن النظرية ب تؤدي الى النتيجة الموالية:

نظرية. إذا قبل تابع $y(x)(G\subset R_n\to Y)$ في جوار نقطة $x=c$ مشتقات جزئية $\frac{\partial y}{\partial x_1}9x)$، ...، $\frac{\partial y}{\partial x_n}(x)$، وكانت هذه المشتقات مستمرة عند النقطة $x=c$، فإن التابع $y(x)$ يقبل الإشتقاق عند النقطة c.

تقدم هذه النظرية شروطا كافية لقابلية تابع $y(x):G\subset R_N\to Y$ للإشتقاق، فهي لا تتطلب سوى وجود المشتقات الجزئية (بالنسبة لكل المتغيرات) واستمرارها عند النقطة المعتبرة؛ غالبا ما يكون من السهل التأكد من هذه الشروط.

من جهة ثانية يمكننا صياغة هذه النظرية في شكل شرط لازم وكاف:
لكي يقبل تابع $y(x):G\subset R_n\to Y$ الإشتقاق ويكون مشتقه $y'(x)$ مستمرا في الساحة G ، يلزم ويكفي ان تكون المشتقات الجزئية $\frac{\partial y}{\partial x_1}(x)$ ، ... ، $\frac{\partial y}{\partial x_n}(x)$ موجودة ومستمرة في G.

د. نشير الى شرط يسمح بالبت في معرفة قابلية تابع $y(x)$ للإشتقاق انطلاقا من وجود مشتقاته وفق كل الاتجاهات.

نظرية. نفرض ان لدينا، في ساحة $X\supset G$، تابعا شعاعيا $y(x)(G\to Y)$ وتابعا مؤثريا مستمرا $D(x)(G\to L(X,Y))$. نفرض ايضا ان للتابع $y(x)$، عند كل نقطة $G\ni c$، مشتقا وفق كل اتجاه $\Gamma = \{x=c+th, 0\leqslant t<\infty\}$، حيث يعمل هذا المشتق على كل شعاع $X\ni h$ كمؤثر $D(c)$:

$$y'_\Gamma(c)\,h = D(c)\,h.$$

عندئذ يكون التابع $y(x)$ قابلا للإشتقاق في الساحة G، ولدينا $y'(x) = D(x)$.

البرهان. من اجل $X\ni h$ معطى، لدينا عند النقطة $G\ni c$:

$$y(c+h)-y(c) = y'_\Gamma(c)h+0(h) = D(c)h+0(h)$$

ويبقى البرهان على ان الكمية $0(h)$ لامتناهية الصغر، بانتظام النسبة لكل العناصر h، مهما كانت اتجاهات هذه العناصر. إن التابع $y(x)$ يقبل الإشتقاق على كل نصف مستقيم Γ، ويمكننا تطبيق التقدير 1 .24ـ د:

$$|y(c+h)-y(c)-D(c)-D(c)h|\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}|[y'(c+\theta h)-y'(c)]h| \quad (1)$$

$$= \sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}|[D(c+\theta h)-D(c)]h|$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\|D(c+\theta h)-D(c)\|\ |h|$$

نبحث الآن، بعد تعاطي $\varepsilon>0$، عن $\delta>0$ بحيث يكون $\|D(c+k)-D(c)\|<\varepsilon$ بمجرد تحقق $|k|<\delta$، إن ذلك ممكن بفضل فرض

استمرار التابع المؤثري $D(x)$ عند النقطة c. نستنتج إذن من (1)، مهما كان h بحيث $|h|<\delta$:

$$|y(c+h)-y(c)-D(c)h|\leqslant E|h|$$

حيث لا يتعلق ε باتجاه h. كنا رأينا انه تنتج من ذلك قابلية التابع $y(x)$ للإشتقاق عند $x=c$، كما تنتج العلاقة $y'(c) = D(c)$، وهو المطلوب.

1 .84 تسمح احيانا نظرية المتوسط باثبات قابلية توابع معقدة للاشتقاق وذلك انطلاقا من قابلية توابع بسيطة للإشتقاق.

أ. ليكن M فضاء متريا، وV ساحة في فضاء نظيمي Y و$\Phi(x,y)$ تابعا محدودا ومستمرا بانتظام في $M\times V$، يأخذ قيمه في فضاء نظيمي Z. نعتبر الفضاءين المتريين $Y(M)$ و$Z(M)$ (31.1 ـ ج) المؤلفين من التوابع المحدودة والمستمرة بالنسبة لِـx التي تأخذ قيمها في X وفي Y على التوالي؛ كنا أشرنا الى مسافتي هذين الفضاءين ضمن 31.1 ـ ج واللتين يمكن تعريفهما على التوالى انطلاقا من النظيمين:

$$\|y(x)\| = \sup_{x\in M}|y(x)|_Y \quad \text{و} \quad \|z(x)\| = \sup_{x\in M}|z(x)|_Z.$$

نرمز، بطبيعة الحال، بِـ$V(M)$ لمجموعة العناصر $Y(M)\ni y(x)$ التي تأخذ قيمها في V؛ من الواضح ان $V(M)$ يمثل جزءا من الفضاء $Y(M)$. يعين التابع $\Phi(x,y)$، حسب 31.1 ـ ج، تطبيقا مستمرا $Fy:V(M)\to Z(M)$ وفق الدستور $Fy(x) = \Phi(x,y(x))$. لنفرض ايضا ان التابع $\Phi(x,y)$ له مشتق $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$ محدود ومستمر بانتظام في $M\times V$. لنثبت عندئذ ان التابع $F(y)$ يقبل ايضا الاشتقاق في $V(M)$ ولنبحث عن عبارة مشتقة. لدينا، من اجل كل x مثبت ومن اجل $V(M)\ni y(x)$ و$V(M)\ni y(x)+h(x)$ معطيين:

$$\Phi(x,y(x)+h(x))-\Phi(x,y(x)) = \frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}h(x)+R \qquad (1)$$

حيث (استنادا الى 42.1 ـ ر):

$$(2)\quad |R| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1} \left| \frac{\partial \Phi(x, y(x)+\theta(x) h(x))}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} \right| . |h(x)|$$

$$|R| \leqslant \sup_{\substack{0 \leqslant \theta(x) \leqslant 1 \\ x \in M}} \left| \frac{\partial \Phi(x, y(x)+\theta(x) h(x))}{\partial y} - \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y} \right| . \sup_{x \in M} |h(x)|$$

إن الطرف الايسر من (1) تابع محدود ومستمر لِـx. كما ان الحد الاول من الطرف الايمن في (1) مستمر ومحدود (51.1 وي16.12). وبالتالي فإن الحد الثاني من الطرف الايمن تابع محدود ومستمر لِـx. يمكننا إذن اعتبار المساواة (1) كمساواة في الفضاء $Z(M)$. إن العامل $\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y}$، من اجل كل x مثبت، مؤثر خطي (محدود بانتظام بالنسبة لِـx) من Y في Z؛ لهذا السبب نستطيع اعتبار التابع $\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial x}$ كمؤثر خطي ومحدود (نظيمه لا يتجاوز $\sup_{x \in M} \left\| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \right\|$) يعمل من $Y(M)$ في $Z(M)$. إذن فإن الحد الاول في الطرف الايمن من (1) خطي بالنسبة لِـ$h \in Y(M)$. ثم إن نظيم الحد الثاني (من نفس الطرف) فيـ$Z(M)$ من رتبة $0(\|h\|)$، ذلك ما ينتج من التقدير (2) ومن الاستمرار المنتظم لِـ $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$. نستخلص إذن ان التطبيق $F(y)$ يقبل الاشتقاق في الساحة $V(M)$ وان تفاضليته تطابق الحد الاول في الطرف الايمن من (1). نستطيع ايضا كتابة:

$$(3)\qquad F'(y) = \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y}$$

باعتبار الطرف الايمن كمؤثر خطي (كما ورد آنفا) من $Y(M)$ في $Z(M)$.

ب. نختار M الوارد في أ، المجال $a \leqslant x \leqslant b$ من المستقيم الحقيقي. عندئذ

نستطيع ان نعرف على الفضاء $Z(M)$ مؤثر المكاملة (ي26.12):

$$(Iz)(x) = \int_a^x z(\xi)d\xi$$

الخطي والمحدود (ي26.12ـ جـ) الذي لا يتجاوز نظيمه $b-a$. نقوم بتركيب هذا المؤثر مع التطبيق $F(y)$ الوارد في أ، فنحصل على تطبيق جديد:

$$[IF(y)](x) = \int_a^x \Phi(\xi,y(\xi))d\xi \quad V(M)\to Z(M)) \tag{4}$$

إن التطبيق IF مستمر (51.1ـ ب)، كما هو الحال فيما يخص F، وقابل للإشتقاق (23.1ـ ب) ومشتقه يساوي، استنادا الى 23.1ـ ب:

$$(IF)'y = IF'(y) = \int_a^x \frac{\partial\Phi(\xi,y(\xi))}{\partial y} \partial\xi \tag{5}$$

جـ. نستطيع، في الاستدلالات السابقة، تعويض التكامل ذي الحد الاعلى المتغير بتكامل ذي حدين (اعلى وادنى) ثابتين، مثلا، بالحدين a وb. يصبح المؤثر I، عندئذ، مؤثرا خطيا من $Z(M)$ في Z. ويعمل المؤثر IF من $V(M)$ في Z كالسابق. سيكون هذا المؤثر قابلا للإشتقاق (على $V(M)$) ومشتقه هو:

$$(IF)'(y) = \int_a^b \frac{\partial\Phi(\xi,y(\xi))}{\partial y} d\xi \tag{6}$$

د. بالامكان تعميم الإنشاءات السابقة بالسماح للتابع $\Phi(x,y)$ بالتعلق بوسيط λ يتجول في فضاء متري Δ؛ نرمز حينئذ لهذا التابع بـ$\Phi(x,y,\lambda)$ بدل $\Phi(x,y)$. يكون التابع $Ff(x) = \Phi(x,f(x),\lambda)$ ايضا متعلقا بـλ، في هذه الحالة. لدينا النتيجة التالية: إذا كان التابع $\Phi(x,y,\lambda)$ مستمرا بالنسبة لـλ، ومستمرا بانتظام بالنسبة لـ$M\ni x$ و$V\ni y$، فإن التابع $\Phi(x,f(x),\lambda)$ مستمر بالنسبة لمسافة الفضاء $Z(M)$. ذلك اننا نستطيع، من اجل $\varepsilon>0$ معطى، ايجاد فرضا) $\delta>0$ بحيث تتحقق المتراجحة $|\Phi(x,y,\lambda')-\Phi(x,y,\lambda)|\leqslant\varepsilon$ من اجل كل $M\ni x$ و$V\ni y$،

عندما يكون $\rho(\lambda',\lambda)<\delta$. ينتج من ذلك ، باعتبار $\rho(\lambda',\lambda)<\delta$ ،

$$\|\Phi(x,f(x),\lambda')-\Phi(x,f(x),\lambda)\|_{Z(M)}$$

$$= \sup_{x\in M}|\Phi(x,f(x),\lambda')-\Phi(x,f(x),\lambda)|\leqslant\varepsilon$$

وهو ما يعبر عن استمرار التابع $\Phi(x,f(x),\lambda)$ بالنسبة للوسيط λ في الفضاء $Z(M)$.

نفرض، بعد ذلك، ان الفضاء المتري Δ ساحة في فضاء نظيمي Λ ، وان التابع $\Phi(x,y,\lambda)$ له مشتق جزئي $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$ محدود ومستمر بانتظام في $M\times V\times\Delta$. لدينا عندئذ النتيجة التالية: يَقبل التابع $\Phi(x,f(x),\lambda)$ بوصفه عنصرا من الفضاء $Z(M)$ الاشتقاق بالنسبة لِـ λ ، وشكل هذا المشتق هو $\frac{\partial\Phi(x,f(x),\lambda)}{\partial\lambda}$. بالفعل، لدينا طبقا لِـ 24.1 (5) وبفضل افتراضنا، من اجل كل $\varepsilon>0$ ، عدد $\delta>0$ بحيث:

المعادلة في النص السابق

$$\left|\Phi(x,y,\lambda')-\Phi(x,y,\lambda)-\frac{\partial\Phi(x,y,\lambda)}{\partial\lambda}\Delta\lambda\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1}\left|\frac{\partial\Phi(x,y,\lambda+\theta\Delta\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial\Phi(x,y,\lambda)}{\partial\lambda}\right||\Delta\lambda|\leqslant\varepsilon|\Delta\lambda|.$$

وذلك عندما $M\ni x$ و$V\ni y$ و$|\lambda'-\lambda|<\delta$ ، وحيث $\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$.

ينتج من ذلك:

$$\left\|\Phi(x,f(x),\lambda')-\Phi(x,f(x),\lambda)-\frac{\partial\Phi(x,f(x),\lambda)}{\partial\lambda}\Delta\lambda\right\|_{Z(M)}=$$

$$=\sup_{x\in M}\left|\Phi(x,f(x),\lambda')-\Phi(x,f(x),\lambda)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Phi(x,f(x),\lambda)}{\partial\lambda}\Delta\lambda\right|\leqslant\varepsilon|\Delta\lambda|,$$

إذن فإن $\frac{\partial\Phi(x,f}{\partial\lambda}$ هو مشتق $\Phi(x,f(x),\lambda)$ بالنسبة لِـ μ في الفضاء $Z(M)$ ، وهو المطلوب.

اخيرا، إذا كان $M=[a,b]$ ، فإن لدينا، استنادا الى ب وجـ، نفس الخاصيات عند تطبيق، على $\Phi(x,f(x),\lambda)$ ، عملية المكاملة بالنسبة لِـ y .

§ 1 .5 . نظرية التابع الضمني

1 .15 . التابع المقلوب (أو العكسي)؛ طرح المسألة.

ليكن $x = \varphi(y):F\to E$ تابعا يطبق مجموعة F بصفة تقابلية على مجموعة E؛ عندئذ نعرف على المجموعة E، بصفة طبيعية، التابع المقلوب (أو العكسي) لـy: $y = f(x):E\to F$ الذي يحقق $f[\varphi(y)] = y$، $\varphi[f(x)] = x$. عادة ما يطرح السؤال التالي في التحليل: ما هي الشروط التي يجب افتراضها على التابع$z1(\theta \div y$ لكي يقبل تابعا عكسيا؟ نستطيع تحديد المسألة هذه كما يلي: نفرض أن E وF ساحتان في فضاءين نظيميين، وان التابع $x = \varphi(y)$ بمستمر وقابل للإشتقاق في جوار نقطة $F\ni b$؛ ارذا كان $a = \varphi(b)$، فإن الامر يتعلق بالإشارة على الاقل الى جوار للنقطة a يكون فيه التابع العكسي $y = f(7)$ معرفا بصفة وحيدة، ومستمرا وقابلا للإشتقاق. يتطلب كل ذلك، بطبيعة الحال، بعض الشروط الاضافية على التابع $\varphi(\ )$. سنتبين طبيعة هذه الشروط باعتبار، كمثال، التابع الخطي $x = \varphi(y)$ من فضاء $F = R_m$ بعده m في فضاء $E\ \ R_n$ بعده n. بعد تثبيت اساسين كيفيين في هذين الفضاءين نكتب المساواة $x = \varphi(y)$ على شكل جملة معادلات خطية ذات معاملات عددية:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_{11}y_1+\dots+\varphi_{1m}y_m \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_{n1}y_1+\dots+\varphi_{nm}y_m \end{cases} \qquad (1)$$

نتساءل الآن عن الشروط التي تضمن لهذه الجملة حلا وحيداً $y_1, \dots, y_m$ من اجل اية عناصر $x_1, \dots, x_n$ مختارة بشكل كيفي في جوار، على الاقل، للنقطة $(R_n\ni(0,\dots,0))$؟ لدينا هنا الجواب التالي الذي تعطيه مادة

الجبر: يجب ان تكون المصفوفة$o+n1$($\Phi = \|\varphi_{ij}\|$) (حيث $i = 1,...,n$ و$j = 1,...,m$) قابلة للقلب (بصفة خاصة يجب ان يكون $m=n$)؛ في هذه الحالة نحصل على الحل المطلوب حسب دساتير كرامر (Kramer).
نشير، بعد ذلك، الى ان المصفوفة Φ هي مصفوفة مؤثر، وهو مشتق التابع $\varphi(y)$ (52.1 ـ ب). إذن، إذا تعلق الامر بتابع خطي $x = \varphi(y)(R_m \to R_n)$ فإن قابلية المؤثر $\varphi'(y)$ للقلب تمثل الشرط اللازم والكافي لوجود التابع العكسي (إن المؤثر $\varphi'(y)$ ثابت في هذه الحالة، وليس من الضروري الاشارة الى النقطة b). اما في الحالة العامة التي يكون فيها التابع $\varphi(y):F \to E$ قابلا للإشتقاق، فمن الطبيعي أن نفرض شرط قابلية $\varphi'(b)$ للقلب؛ إذا كان الجزء الخطي الرئيسي لتطبيق قابلا للقلب، فإن قابلية التطبيق للقلب يبدو امرا جد محتمل.

25.1 . التابع الضمني، طرح المسألة:

سنرى ادناه ان الشرط المعبر عليه في 1501 كاف لوجود التابع العكسي: إذا كان تابع $\varphi(y)$ قابلا للإشتقاق والمؤثر الخطي $\varphi'(b)$ الممثل لمشتق φ عند نقطة b قابلا للقلب، فإن $\varphi(y)$ يقبل، بالفعل، تابعا عكسيا مستمرا وقابلا للإشتقاق $f(x)$ في جوار للنقطة $a = \varphi(b)$، بحيث $f[\varphi(y)] = y$، $\varphi[f(x)] = x$ (55.1). لكن تبين ان هناك نظرية اعم يتعلق فيها الامر بوجود حل معادلة اكثر عمومية من المعادلة $x-\varphi(y) = 0$، وهي $\varphi(x,y) = 0$.

تأخذ هذه المعادلة العامة، في الحالة الخطية، شكل الجملة:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n+b_{11}y_1+\dots+b_{1m}y_m = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{p1}x_1+\dots+a_{pn}x_n-b_{p1}y_1+\dots+b_{pm}y_m = 0
\end{array}
\right. \qquad (1)
$$

وهكذا يطرح السؤال الموالي: ما هي الشروط التي ينبغي افتراضها على المعاملات a_{ij}، b_{ij} لكي تعين الجملة (1) الاعداد y_1، ...،y_m بطريقة وحيدة، مهما كانت الاعداد المعطاة x_1، ...،x_n؟ نجد، في هذه الحالة ايضا، الجواب في الجبر، يجب ان تكون المصفوفة $\|b_{ij}\|$ المؤلفة من معاملات y_1، ...،y_p قابلة للقلب (بصفة خاصة فإن الشرط $m=p$ لازم). يمكن صياغة هذا الجواب بدلالة التابع $z = \Phi(x,y)$ الذي يطبق المجموع المباشر لِلفضاءين الجزئيين R_mوR_n في الفضاء R_p؛ يكتب التابع المشار اليه بدلالة الاحداثيات كما يلي:

$$z_1 = a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n-b_{11}y_1+...+b_{1m}y_m$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_p = a_{p1}x_1+...+a_{pm}x_n+b_{p1}y_1+...+b_{pm}y_m$$

نلاحظ ان المصفوفة $\|b_{ij}\|$ هي مصفوفة المشتق الجزئي $\frac{\partial z}{\partial y}$، وتعني قابلية هذه المصفوفة للقلب قابلية هذه المصفوفة للقلب قابلية المؤثر للقلب.

.35.1 من الطبيعي الآن ان نورد نص النظرية التالية:

نظرية حول التابع الضمني. ليكن M فضاء متريا وY فضاء نظيميا تاما؛ وليكن $z = \Phi(x,y)$ تابعا معرفا على جداء M في كرة: $V_r = \{y\in Y: |y-b|\leqslant r\}$ يأخذ قيمه في فضاء نظيمي Z. نفرض أن هذا التابع محدود ومستمر بانتظام ويقبل مشتقا محدودا ومستمرا بانتظام $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$. نفرض ايضا، من اجل عنصر $M\ni a$، ان $\Phi(a,b) = 0$ وان المؤثر $(Y\to Z)$ $\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}$ يقبل القلب. توجد عندئذ كرة $U_\delta = \{x\in M: \rho(x,a)\leqslant\delta\}$ وتابع $y = f(x): U_\delta\to V$ معرف ومستمر في الكرة U_δ بحيث $f(a) = b$ و $\Phi(x,f(x))\equiv 0$؛ وهذا من اجل كل $U_\delta\ni x$. إن هذا التابع وحيد بالمفهوم التالي: إذا وجد تابع آخر $f_1(x)$، يأخذ قيمه في Y، معرف ومستمر بجوار النقطة $M\ni a$ بحيث

$f_1(a)=b$ و$\Phi(x,f_1(x))\equiv 0$، فإنه توجد كرة $\{x\in M:\rho(x,a)\leqslant\delta'\}$ تتحقق فيها المساواة $f_1(x)\equiv f(x)$. يسمى التابع $y=f(x)$ **تابعا ضمنيا معرفا بالمعادلة** $\Phi(x,y)=0$ وبالشرط $f(a)=b$.

البرهان. إذا كان $y=f(x)$ هو التابع المطلوب، أي بحيث: $\Phi(x,f(x))\equiv 0$، فإن لدينا:

$$\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}f(x)-\Phi(x,f(x))\right]\equiv f(x), \tag{1}$$

يمكننا إذن البحث عن التابع $f(x)$ في فضاء التوابع $y(x):U_\delta\subset M\to Y$ كنقطة صامدة للتحويل $F(y)$ المعرف بالدستور:

$$Fy(x)=\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}y(x)-\Phi(x,y(x))\right]. \tag{2}$$

لاستخدام هذه الفكرة، نختار $0<\delta$ ونعتبر الفضاء النظيمي $Y(U_\delta)$ المؤلف من كل التوابع المحدودة والمستمرة $y(x)$ التي تأخذ قيمها في الفضاء Y (راجع 84.1 - أ) ونزود هذا الفضاء بالنظيم $\|y(x)\|=\sup\limits_{x\in U_\delta}|y(x)|_Y$.
إن الفضاء $Y(U_\delta)$ تام (31.1 - ج). نرمز بـ$V(U_\delta)$ لمجموعة التوابع $Y(U_\delta)\ni y(x)$ التي تأخذ قيمها، من اجل $U_\delta\ni x$، في الكرة $Y\supset V$؛ إن المجموعة $V(U_\delta)$ هي الكرة المغلقة في الفضاء $Y(U_\delta)$ التي نصف قطرها r والمتمركزة في النقطة $b(x)\equiv b$، ولذا فهذه المجموعة تمثل هي نفسها فضاء متريا تاما. إن التطبيق (2) معرف من اجل كل $V(U_\delta)\ni y(x)$ ويأخذ قيمه في الفضاء $Y(U_\delta)$. نلاحظ بفضل 31.1 - ر و84.1 - أ وخاصيات التابع $\Phi(x,y)$ ان التطبيق F مستمر وقابل للإشتقاق في الكرة $V(U_\delta)$.
يتبين من 84.1 - أ و13.1 و23.1 ان مشتق F يكتب على النحو:

$$\begin{aligned}F'(y)&=E+\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}=\\&=E+\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]+\\&\quad+\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}=\\&=\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\left[\frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y}-\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right].\end{aligned}$$

لدينا بخصوص نظيم $F'(y)$ التقدير التالي:

$$(3)\quad \|F'(y)\| \leqslant \left\| \left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y} \right]^{-1} \right\| \cdot \sup_{x\in U_\delta} \left\| \frac{\partial\Phi(x,y(x))}{\partial y} - \frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y} \right\|.$$

باستخدام استمرار التابع $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$ عند $x=a$ ، $y=b$ يمكن ايجاد δ_1 وρ بحيث يكون الطرف الثاني من (3) اصغر من $1/2$ ، لما $|x-a|\leqslant\delta_1$ و$|y-b|\leqslant\rho$. وهكذا لدينا $\|F'(y)\|<1/2$ في $V_\rho(U_{\delta_1})$.

نلاحظ، بعد ذلك، من اجل $b(x)=b$ ان:

$$F[b(x)] - b(x) = -\left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1}\Phi(x,b),$$

إذن:

$$\|F[b(x)] - b(x)\| \leqslant \left\| \left[\frac{\partial\Phi(a,b)}{\partial y}\right]^{-1} \right\| \cdot \sup_{x\in U_\delta} |\Phi(x,b)|.$$

بما ان $\Phi(a,b) = 0$ والتابع $\Phi(x,y)$ مستمر عند النقطة $x=a$ و$y=b$ ، يمكننا ، بعد اختيار ρ ، ايجاد δ_2 بحيث:

$$\|F[b(x)] - b(x)\|_{Y(U_{\delta_2})} \leqslant \frac{1}{2}\rho.$$

نضـــع $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ ؛ حينئـــذ ،
باعتبار التطبيق $F(y)$ في الكرة $V_\rho(U_\delta)$ ، فإن فرض النظرية 54.1 ـ د (مع $\theta = \frac{1}{2}$). بتطبيق هذه النظرية نثبت في الكرة $V_\rho(U_\delta)$ وجود نقطة صامدة للتطبيق $F(y)$. نرمز لهذه النقطة بـ$f(x)$؛ إنه يحقق المساراة (1)، وبالتالي المساواة $\Phi(x,f(x)) \equiv 0$ ايضا من اجل $x\in U_\delta$. لنبين ان $f(a)=b$. نلاحظ ان $y(a)=b$ تستلزم $Fy(a)=b$. نذكّر الآن بأن النقطة الصامدة للتطبيق المقلص يمكن انشاؤه كنهاية للمتتالية (المعرفة تكراريا)

y_0 ، Fy_0 ، F^2y_0 ، ... (22.13ي) حيث y_0 نقطة كيفية من الفضاء المتري التام الذي يَعمل فيهالتطبيق المقلص. نختار كنقطة ابتدائية في المنوال التكراري تـابعـا $y(x)\in V_\rho(U_\delta)$ كيفيـا بحيـث $y(a)=b$ ، مثلا التـابـع $y(x)\equiv b$ ؛ عندئذ تتمتع كل التكرارات $y(x)$ بالخاصية $y(a)=b$ ؛ الامر

كذلك فيما يخص التابع النهاية $f(x)$ الذي يمثل النقطة الصامدة المطلوبة للتطبيق $F(y)$. انتهى البرهان.

بقي البرهان على وحدانية الحل المحصل عليه. نشير الى ان النتطابقة $f(x) = F(f(x))$ المحصل عليها من اجل النقاط x النتمية الى U_δ تبقى قائمة من اجل كل كرة $U_{\delta'}$ لما $\delta'<\delta$. وبالتالي فإن اقتصار التابع $f(x)$ على اصغر هذين الكرتين يمثل نقطة صامدة للتطبيق $F(y)$ في الكرة $V_\rho(U_{\delta'})$ ايضا. ليكن $f_1(x)$ حلا آخرا للمسألة الخاصة بالتابع الضمني؛ يوجد عدد $\delta\geqslant\delta'$ بحيث يكون التابع $f_1(x)$ معرفاً ومستمراً ومحققا للشرط $|f_1(x)-b|\leqslant\rho$ في الكرة $U_{\delta'}$، وبالتالي، ينتمي الى الكرة $V_\rho(U_{\delta'})$. الّا انه لا توجد سوى نقطة صامدة واحدة، في الكرة $V_\rho(U_{\delta'})$، للتطبيق $F(y)$. نرى إذن بأن $f_1(x)\equiv f(x)$ من اجل $x\in U_{\delta'}$. انتهى برهان النظرية.

1 .54ـ أ . إن للنظرية 1 .35 حول التابع الضمني طابعا محليا، أي أن وجود التابع $y(x)$ الذي يمثل حلاً للمعادلة $\Phi(x,y) = 0$ غير مضمون خارج جوار للنقطة a، عند تعاطي القيمة $b = y(a)$. بودنا تحديد ساحة وجود التابع $y(x)$. نفرض، مثلا، اننا نعلم بأن التابع $\Phi(x,y)$ معرف ومستمر وقابل للإشتقاق بالنسبةلـ y من اجل كل $x\in M$ و$y\in Y$، وان $\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}$ معرف اينما كان ومستمر وقابل للقلب؛ نتساءل لما $\Phi(a,b) = 0$، عما إذا كان التابع الضمني $y(x)$ (الذي لا تضمن النظرية حول التابع الضمني وجوده الّا في كرة $|x-a|<\delta$) معرفا، إن لم يكن من اجل كل $x\in M$، على الاقل في كرة $|x-a|<r$ حيث r عدد موجب مثبت لا يتعلق بالتابع $\Phi(x,y)$؟

يتبين، حتى في مثل هذه الحالة التي تبدو جد ممتازة، ان الجواب على سؤالنا يجب ان يكون بالنفي. على وجه التحديد، سنشير، من اجل كل $\varepsilon>0$، الى ذلك التابع بِـ $\Phi_\varepsilon(x,y)(R_2\to R_1)$ الذي سيكون معرفا

ومستمرا وقابلا للإشتقاق بالنسبة لِـ y من اجل كل $R_2 \ni \{x,y\}$، ومشتقه بالنسبة لِـ y سيكون مستمرا اينما كان وقابلا للقلب؛ كما ان $0 = (0,0)_\varepsilon\Phi$. رغم كل ذلك سوف لن يكون المجال $-h<x<h$ مجال وجود للتابع الضمني الّا عندما $\varepsilon>h$. إن كل الشروط السابق ذكرها متوفرة في التابع: $\Phi_\varepsilon(x,y) = x+\varepsilon-\varepsilon e^y$، ثم إن تابعه الضمني $y = \ln \dfrac{x+\varepsilon}{\varepsilon}$ معرف من اجل $-\varepsilon<x$ فقط.

ب. الى جانب ما قيل في أ حول ساحة وجود التابع الضمني، نشير الى الحالة الاكثر ارضاء المتعلقة بوحدانية التابع الضمني.

نفرض ان الفضاء المتري M مترابط، أي انه لا يقبل اية مجموعة جزئية (ذاتية) مفتوحة ومغلقة في آن واحد. ليكن $y = f(x)$ و $y = f_1(x)$ (حيث $f(a) = f_1(a)$) تابعين معرفين ومستمرين على M يحقق كلاهما المعادلة $\Phi(x,y) \equiv 0$. عندئذ، إذا تحقق فرض النظرية حول التابع الضمني عند كل نقطة $M+Y \ni \{x,f(x)\}$، فإن لدينا $f(x) = f_1(x)$ عند كل نقطة من M.

بالفعل، ليكن $B = \{x \in M: f(x) = f_1(x)\}$. إن المجموعة B مغلقة بوصفها مجموعة جذور التابع المستمر $f_1(x)-f(x)$ (ي41.5ـ ب)؛ ثم نلاحظ ان نفس المجموعة مفتوحة لأنها تحوى، استنادا الى النظرية حول التابع الضمني، جواراً لكل نقطة منها. انها تحوى النقطة a، وبالتالي فهي ليست خالية؛ وبما ان الفضاء M مترابط ينتج مما سبق ان $B=M$. وهو المطلوب.

55.1 . نظرية حول مشتق تابع ضمني:

نفرض فيما يلي ان الفضاء M الوارد في 3501ـ4501 ساحة في فضاء نظيمي X.

أ . نظرية. إن كان فرض النظرية 35.1 محققاً والتابع $\Phi(x,y)$ قابلا

للإشتقاق عند النقطة (a,b) (بالنسبة للفضاء $X\times Y$)، فإن التابع الضمني $y = f(x)$ الذي انشأناه في 35.1 يقبل الاشتقاق عند $x=a$ ولدينا

$$f'(a) = -\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}. \qquad (1)$$

البرهان بما ان التابع $\Phi(x,y)$ يقبل الاشتقاق عند $x=a$ و$y=b$ فإن لدينا من اجل Δx صغير بكفاية:

$$0 = \Phi(a + \Delta x, f(a + \Delta x)) = \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\Delta x + \\ + \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|),$$

حيث $\delta y = f(a+\delta x)-f(a)$. إذن:

$$\left|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\Delta x + \Delta y\right| \leqslant \\ \leqslant \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\| |o(|\Delta x| + |\Delta y|)|. \qquad (2)$$

نفرض ان Δx وكذلك Δy صغيران بشكل يضمن صحة المتراجحة:

$$\left\|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\| |o(|\Delta x| + |\Delta y|)| \leqslant \frac{1}{2}(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

لدينا عندئذ:

$$|\Delta y| - \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\right\| |\Delta x| \leqslant \\ \leqslant \left|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\Delta x + \Delta y\right| \leqslant \frac{1}{2}|\Delta x| + \frac{1}{2}|\Delta y|,$$

ومنه يأتي:

$$\frac{1}{2}|\Delta y| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\right\|\right)|\Delta x|,$$

اي ان $|\Delta y| \leqslant C|\Delta x|$ من اجل $0<C$؛ ثم بنقل هذا التقدير في (2) نحصل على:

$$\left|\Delta y - \left(-\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x}\Delta x\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \left\|\left[\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right]^{-1}\right\| o((C + 1)|\Delta x|) = o(|\Delta x|),$$

اي ان التابع $f(x)$ يقبل الإشتقاق عند $x=a$ والدستور (1) قائم؛ وهو المطلوب.

ب. لكي يكون التابع $\Phi(x,y)$ قابلا للإشتقاق عند النقطة (a,b)، حسب 84.1، يكفي (مع افتراض توفر الشروط الاخرى في 35.1) ان يوجد المشتق $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$ في جوار للنقطة (a,b) وان يكون مستمرا في هذا الجوار. عندئذ يكون التابع $\Phi(x,y)$ قابلا للإشتقاق ليس فقط عند النقطة (a,b) بل ايضا في جوار لهذه النفطة؛ يكون التابع الضمني المنشأ في 35.1 هو الآخر قابلا للإشتقاق بجوار النقطة $x=a$؛ ويكون مشتقه الذي نحسبه بفضل الدستور:

$$f'(x) = -\left[\frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial \Phi(x, y(x))}{\partial x}, \tag{3}$$

المماثل لِـ (1)، تابعا مستمرا بجوار النقطة $x=a$.

جـ. عندما نطبق على طرفي الدستور (3) المؤثر $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ فإن هذا الدستور يكتب على الشكل التالي المكافيء للأول:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} y'(x) + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

يبين الدستور (3)، ضمن فرض النظرية، اننا نستطيع ايجاد $y'(x)$ باشتقاق المساواة $\Phi(x,y(x)) = 0$ بالنسبة لِـy كتابع (مركب) لِـy.

65.1 أ. نظرية حول التابع العكسي.

ليكن:

$$x = \varphi(y):(F\subset Y)\to(E\subset X)$$

تابعا قابلا للإشتقاق في جوار نقطة $Y\ni y=b$ بحيث يكون المؤثر $\varphi'(y)$ مستمرا عند النقطة $y=b$ وقابلا للقلب. ليكن $X\ni\varphi(b)=a$. عندئذ يوجد جوار $V_\delta = \{x\in X:|x-a|<\delta\}$ وتابع قابل للإشتقاق: $y = f(x):V_\delta\to Y$

بحيث $f[\varphi(y)] \equiv y$ من اجل كل $V_8 \ni y$، حيث يمثل المؤثر $f(x)(X \to Y)$ مقلوب المؤثر $\varphi'(y)$:

$$f(x) = [\varphi'(y)]^{-1}$$

حيث $y = f(x)$.

ينتج برهان هذه النظرية مباشرة من النظرية حول التابع الضمني بعد ان نضع في هذه الاخيرة $\Phi(x,y) = x - \varphi(y)$ ونلاحظ ان $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$ هو مؤثر الوحدة (المؤثر المطابق) و $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y} = -\varphi'(y)$

ب. يسمى تطبيق $y = f(x): G \subset X \to Y$ مشتقة $f'(x)$ مستمر **تفاتشاكلاً** في G إذا كان هذا التطبيق تقابليا (من G في $f(G)$) وكان تابعه العكسي $x = \varphi(y): f(G) \to G$، المعرف بصفة طبيعية، يقبل مشتقا مستمرا.

استنادا الى أ، فلكي يكون تابع $y = f(x)$، مشتقه $f'(x)$ مستمر، تفاتشاكلا في جوار $U(a)$ لنقطة a، يكفي ان يكون المؤثر $f'(a)$ قابلا للقلب.

نلاحظ أن هذا الشرط لازم ايضا لأن وجود التطبيق العكسي $x = \varphi(y)$ وقابليته للإشتقاق يستلزمان صحة العلاقتين: $f'(a)\varphi'(b) = E_Y$ و $\varphi'(b)f'(a) = E_X$ حسب 33.1 ـ أ، وبالتالي فإن المؤثر $f'(a)$ قابل للقلب.

إذا كان هناك تفاتشاكل $y = f(x): G \subset X \to Y$، فإن كل تابع قابل للإشتقاق $z = \psi(x): G \to Z$ يمكن تمثيله كتابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ $f(x)$؛ ينتج ذلك من الدستور:

$$z = \psi(x) = \psi(\varphi(f(x))) = g(f(x))$$

حيث $g(y) = \psi(\varphi(y))$

جـ.   نفرض ان الفضاءين X وY في ب لها بعدلن منتهيان، $X = R_n$ و$Y = R_m$. نختار في الفضاء X الأحداثيات x_1، ...، x_n، وفي الفضاء Y الاحداثيات y_1، ...، y_m. عندئذ يمثل التطبيق $y = f(x)$ بالدساتير ذات الشكل:

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \qquad (i = 1,\dots,m)$$

إن وجود المشتق المستمر $f'(x)$ في الساحة G يكافيء وجود واستمرار كل المشتقات $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$ (1 .52ـ أ) في هذه الساحة. نفرض ان $m=n$ وان المصفوفة اليعقوبية $\left\| \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right\|$ قابلة للقلب؛ وبالتالي فإن المؤثر $f'(a)$ يقبل هو الآخر القلب. ينتج من ب ان التطبيق $y = f(x)$ تفاتشاكل من جوار $U(a)$ على جوار $V(b)$ للنقطة $Y \ni b=f(a)$. من اجل كل نقطة $(y_1,\dots,y_n) = V(b) \ni y$، توجد نقطة $U(a) \ni x=(x_1,\dots,x_n)$ بحيث $f(x)=y$. وبالتالي فإن الاعداد $y_1,\dots,y_n$ والاعداد $x_1,\dots,x_n$ تعين موقع النقطة x في الساحة G بطريقة وحيدة. هكذا فإن الاعداد $y_1,\dots,y_n$ يمكن ان تستخدم كاحداثيات جديدة للنقطة x.

بصفة خاصة، يمكن تمثيل كل تابع $\varphi(x):U(a)\to R_1$ كتابع $\Phi(y_1(x),\dots,y_n(x))$ للتوابع $y_1(x),\dots,y_n(x)$.

وهكذا فإن الدستورين: $x_1 = r\cos\theta$ و$x_2 = r\sin\theta$ (1) يعنيان في المستوى x_1، x_2 الاحداثيتين الجديدتين r وθ وهما الاحداثيتان القطبيتان (ي18.5). بما ان:

$$\det \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

فإنه يمكننا اختيار العددين r وθ كاحداثيتين جديدتين في جوار كل نقطة تخالف النقطة $r=0$ $(x_2=x_1=0)$؛ نلاحظ عند هذه النقطة بالذات، $r=0$، ان خاصية تقابل التطبيق المعتبر غير قائمة.

إذا كان هناك تفاتشاكل $y = f(x):G\subset R_n \to R_n$، حيث:

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \ , \ i = 1,\dots,n$$

فإنه تبين، من ب، ان كل تابع قابل للإشتقاق $z = \varphi(x):G \to Z$ يمكن تمثيله كتابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ $yl(g$، اي بالنسبة لِـ $yl(f_1, \dots, f_n(x)$:

$$z = \psi(x) = g(f_1(x),\dots,f_n(x))$$

د. نفرض مرة اخرى انه توجد توابع قابلة للإشتقاق:

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \quad , \ i = 1,\dots,n \qquad (1)$$

تعينفي ساحة $R_n \supset G$ الاحداثيات الجديدة $\{y\} = \{y_1,\dots,y_n\}$، حيث $\det\| \quad \| \neq 0$. يسمى سطر L_j من النعادلات:

$$y_i = f_i(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n) \ , \ i = 1,\dots,n$$

السطر رقم j من احداثيات الجملة $\{y\}$ المارة بالنقطة a. نلاحظ أن الاشعة الموجهة الموافقة لذلك:

$$g_j = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_j} \right\} , \ j = 1, \dots, n,$$

مستقلة خطيا؛ تشكل هذه الاشعة، تعريفا، **الاساس المحلي لجملة الاحداثيات** $\{y\}$ **عند النقطة** b. يمكن نشر أي شعاع $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ وفق اشقة الاساس المحلي:

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j$$

نحصل على عبارات η_j بدلالة ξ_i بالطريقة التالية. نرمز $p_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ ونرمز بِـ r_{jk} لعناصر المصفوفة المقلوبة؛ ينتج عندئذ من العلاقات: $g_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ ان $e_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} g_j$ وان $\sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j = \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i q_{ij} g_j$، ومنه ينتج، بفضل الاستقلال الخطي للأشعة g_j، أن:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\xi_i \qquad (3)$$

تمر خطوط الاحداثيات المماثلة بكل نقطة x من الساحة G، ويمكننا انشاء، عند كل نقطة $G \ni x$، اساس محلي؛ نشير الى ان الاساس المحلي $\{g_i(x)\}$ يتغير، عموما، بتغير x وهذا خلافا للأساس الثابت $e_1,...,e_n$ لـ R_o.

1 .75. حالة التوابع العددية.

إذا كان التابع $z = \Phi(x,y)$ الوارد في نص النظرية 1 .35 تابعا عـــدديـــا لمتغير $X \supset E \ni x$ وللمتغير العـــددي $R \supset F \ni y$، فـــإن المؤثـــر $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y}$ يمثل الضرب في عدد، اما قابليته للقلب فتكافيء القول $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} \neq 0$. نستطيع في هذه الحالة تقديم برهان آخر على النظرية لا يستخدم مبدأ التوابع المقلصة لكنه ينطلق من كوْن الاعداد الحقيقية مرتبة.

البرهـــان هـــو التـــالي. نفـــرض، لتثبيـــت الافكـــار، أن $\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y} > 0$. بما ان $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ مستمر، يمكن القول ان $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} > 0$ اينما كان في جوار W للنقطة $(b\text{-}c)$ صغير بكفاية، بامكاننا اختيار هذا الجوار كجداء كرة $v = \{x \in X: |x-a| \leqslant r\}$ في مجال مغلـــق $b_2 \leqslant y \leqslant b_1$ (الرسم 1 .5_1). لما كـــان $\Phi(a,b) = 0$ فـــإن $0 < \Phi(a,y)$ من اجل $b < y$ و$0 > \Phi(a,y)$ من اجل $b > y$. بصفة خاصة: $0 < \Phi(a,b_1)$ و$0 > \Phi(a,b_2)$. باستطاعتنا ايجاد، بفضل استمرار التابع $\Phi(x,y)$ في الكرة V، جوارين في V للنقطة a:

$$V_+ = \{x: |x-a| < \delta_1\}$$

$$V_- = \{x: |x-a| < \delta_2\}$$

بحيث يكون $0 < \Phi(x,b_1)$ من اجل $V_+ \ni x$، و$0 > \Phi(x,b_2)$ من اجل $V_- \ni x$.

ليكن $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$؛ نضع:

$$U_\delta = \{x : |x-a| < \delta\}$$

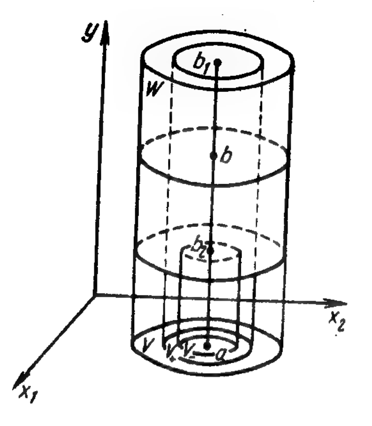
لنثبت انه بالإمكان اعتبار U_δ بمثابة الجوار المطلوب. ليكن $U_\delta \ni x$. بما ان $0 > \Phi(x, b_2)$ و $0 < \Phi(x, b_1)$ والتابع $\Phi(x,y)$، كتابع للمتغير y فقط، متزايد الى المجال $b_2 y \leqslant b_1$ (حسب الشرط $0 < \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ في W)، فإنه توجد قيمة وحيدة $y = y(x)$ تحقق $\Phi(x, y(x)) = 0$ (ي22.5 و ي23.5). بذلك نكون قد اثبتنا وجود ووحدانية حل المعادلة $0 = \Phi(x,y)$ من اجل كل $U_\delta \ni x$. يبقى اثبات استمرار التابع المحصل عليه $y = y(x)$. نشير، حسب التعريف، الى أن التابع $y(x)$ يحقق المتراجحة $b_2 \leqslant y(x) \leqslant b_1$.

لو لم يكن التابع $y(x)$ مستمرا عند نقطة $U_\delta \ni c$ لوجدت متتالية $x_1, \ldots, x_m, \ldots$ من نقاط U_δ متقاربة نحو، مع عدم تقارب المتتالية $y(x_m)$ نحو $y(c)$. بالامكان استخراج من المتتالية الاولى متتالية جزئية $x'_1, \ldots, x'_m, \ldots$ بحيث تكون للمتتالية $y(x_m)$ نهية A تخالف $B = y(c)$؛ ينتج حينئذ من $b_2 \leqslant y(x_m) \leqslant b_1$ ان $b_2 \leqslant A \leqslant b_1$. ثم إن $x_m \to c$ و $\Phi(x_m, y(x_m)) = 0$، إذن: $\Phi(c, A) = 0$ بفضل استمرار التابع $\Phi(x,y)$. لكن $\Phi(c,B) = \Phi(c, c(c)) = 0$.

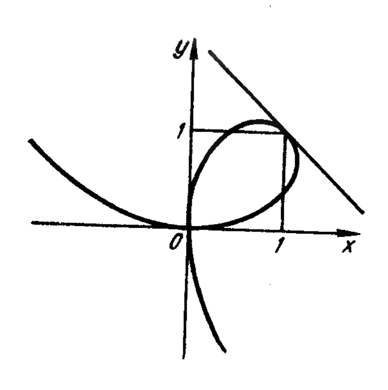
وهكذا فإن التابع $\Phi(c,y)$ ينعدم عند نقطتين A و B على العمود $x=c$، $b_2 \leqslant y \leqslant b_1$، وهو امر مستحيل حسب الانشاء. إذن فإن التابع $y(x)$ مستمر، وينتهي بذلك البرهان.

في حالة تابع عددي، يمكن كتابة المشتق $y'(a)(x \to R_1)$ على الشكل (55.1):

$$y'(a) = -\frac{\partial \Phi(a,b)/\partial x}{\partial \Phi(a,b)/\partial y}$$



الرسم 1 .5_1



الرسم 1 .5_2

85.1 . امثلة اولية

أ . يمر المنحنى:

$$x^3+y^3-2xy = 0 \quad (1)$$

في المستوى $\{x,y\}$ بانقطة $(1,1)$ [الرسم 1 .5_2]. أوجد المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1,1)$.

نضع $\Phi(x,y) = x^3+y^3-2xy(R_2 \to R_1)$ ؛ إن التابع $\Phi(x,y)$ يقبل، بطبيعة الحال، الإشتقاق وكذا مشتقاه $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ و $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ولدينا $\Phi(1,1) = 0$ ، كما ان

$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(1,1) = 3y^{2-2}X|_{(1,1)} = 1 \neq 0$. يمكننا إذن تطبيق النظرية الخاصة بالتابع الضمني: يوجد تابع $y = y(x)$ حل للمعادلة $\Phi(x,y) = 0$ في جوار للنقطة $(1,1)$، يحقق $y(1) = 1$. إن هذا التابع يقبل الإشتقاق، وبما ان:

$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(1,1) = 3x^{2-2}Y|_{(1,1)} = 1$، فإن:

$$y'(1) = -\frac{\partial\Phi(1,1)/\partial x}{\partial\Phi(1,1)/\partial y} = -1$$

وبالتالي فإن معادلة المماس تأخذ الشكل:

$$y-1 = -(x-1) \qquad (2)$$

أو بدلالة التفاضليات ($dx = x-1$، $dy = y-1$):

$$dy = -dx$$

نستطيع، من الناحية الشكلية، التوصل الى نفس النتيجة مباشرة باشتقاق المعادلة (1)، وهو الامر الذي يعطينا المساواة:

$$3x^2dx+3y^2dy-2x\ dy-2y\ dx = 0$$

ومنه تأتي، من اجل $x = y = 1$، العلاقة (3). لكن هذه الطريقة لا تصبح شرعية الّا بفضل النظرية حول التابع الضمني.

نشير الى ان نظرية التابع الضمني لا تجيب على السؤال المطروح إذا اعتبرنا بدل النقطة (1,1) النقطة (0,0) لأن $\frac{\partial\Phi}{\partial y}(0,0) = 0$. ذلك، ان النقطة (0,0) نقطة مشتركة لفرعيْ المنحنى (1) (الرسم 2-5. 1).

ب. يمر السطح:

$$x^3+y^3+z^3-6xyz = 0 \qquad (4)$$

في الفضاء $\{x,y,z\}$ بانقطة $\{1,2,3\}$؛ اوجد المستوى الماس للسطح عند هذه النقطة.

نعتبر، كما ورد اعلاه، التابع:

$$\Phi(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-6xyz$$

من البديهي ان:

$$\Phi(1,2,3) = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}(1,2,3) = 3z^2-6xy|_{(1,2,3)} = 15 \neq 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(1,2,3) = 3x^2-6yz|_{(1,2,3)} = -33$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}(1,2,3) = 3y^2-6xz|_{(1,2,3)} = -6$$

بفضل النظرية الخاصة بالتابع الضمني، يوجد تابع $z = z(x,y)$ حل للمعادلة $\Phi(x,y,z) = 0$ في جوار للنقطة $x=1$، $y=2$ وبحيث $z(1,2) = 3$.

إن هذا التابع قابل للإشتقاق ولدينا:

$$\text{grad}z(1,2) = \{\frac{\partial z}{\partial x}(1,2), \frac{\partial z}{\partial y}(1,2)\}$$

$$= \{-\frac{\partial\Phi(1,2,3)/\partial x}{\partial\Phi(1,2,3)/\partial z}, -\frac{\partial\Phi(1,2,3)/\partial y}{\partial\Phi(1,2,3)/\partial z}\}$$

$$= \{\frac{33}{15}, \frac{6}{15}\}$$

وبالتالي، فإن المستوى المماس عند النقطة (1، 2، 3) ممثل بالمعادلة:

$$(5) \qquad z-3 = \frac{1}{5}[11(x-1)+2(y-2)]$$

أو بدلالة التفاضليات ($dx = x-1$، $dy = y-2$، $dz = z-3$):

$$(6) \qquad dz = \frac{1}{5}(11dx+2dy)$$

يمكن الحصول ايضا على هذه النتيجة بطريقة شكلية المعادلة (4):

$$3x^2dx+3y^2dy+3z^2dz-6dx.yz-6x\,dy.z-6xy.dz = 0 \tag{7}$$

نجد، من اجل $x=1$، $y=2$، $z=3$، العلاقة (6) من (7).

95.1 . حالة تابع $\Phi(x,y):R_{n+m}\to R_m$.

تقبل هنا النظرية حول التابع الضمني 35.1 كتابة بواسطة الاحداثيات يستحسن مقارنتها بالنظرية الخاصة بالجملة الخطية (25.1).

أ. نظرية. لتكن:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1=f_1(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m=f_m(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m) \end{array}\right. \tag{1}$$

جملة توابع معرفة في ساحة من الفضاء R_{n+m}. نفرض أن الشروط التالية محققة:

(1) توجد نقطة $\{a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\} = \{a,b\}$ بحيث:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_m)=0. \end{array}\right. \tag{2}$$

(2) يوجد جوار W للنقطة $\{a,b\}$ حيث تكون المشتقات الجزئية موجودة ومستمرة:

$$\frac{\partial f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m)}{\partial y_j},\quad i=1,\ \ldots,\ m;\quad j=1,\ \ldots,\ m.$$

(3) يعقوبي المصفوفة:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\left\|\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right\|$$

لا ينعدم ابداً في الجوار المذكور للنقطة $\{a,b\}$.

يوجد عندئذ جوار U_δ للنقطة $a = \{a_1,\dots,a_n\} \in R_n$ حيث تكون الجملة:

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_m = y_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

المؤلفة من توابع مستمرة، معرفة مع قيام العلاقات التالية:

$$(4) \quad y_1(a_1,\dots,a_n) = b_1 \quad ,\dots, \quad y_m(a_1,\dots,a_n) = b_m$$

$$(5) \quad \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0. \end{cases}$$

إن الجملة التي تتمتع بالخاصيات المذكورة اعلاه وحيدة.

إذا فرضنا وجود المشتق:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|,$$

في الجوار W، فإن التوابع $y_1,\dots,y_m$ تصبح قابلة للإشتقاق من اجل $x \in U_\delta$، ولدينا:

$$(6) \quad y'(x) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| = -\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right].$$

ب. **مثال.** يمر المنحنى المعرف في الفضاء $\{x,y,z\}$ بجملة المعادلتين

$$(7) \quad x^2 - yz = 0, \quad 3x^3 - y - 2z = 0$$

بالنقطة $\{1,1,1\}$؛ أوجد المماس لهذا المنحنى عند النقطة $\{1,1,1\}$.

الحل. نعتبر التابع $\Phi(x,y,z):R_3\to R_2$ المعرف بالدستور

$$\Phi(x,y,z) = \{u,v\}$$

حيث

$$u = x^2-yz$$

$$v = 3x^3-y-2z$$

من الواضح ان $\Phi(1,1,1) = \{0,0\}$. لدينا:

$$\frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial(y,z)} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial u(1,1,1)}{\partial y} & \frac{\partial u(1,1,1)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(1,1,1)}{\partial y} & \frac{\partial v(1,1,1)}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix},$$

$$\left[\frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial(y,z)}\right]^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

إن المصفوفة $\frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial(y,z)}$ قابلة للقلب ويمكننا تطبيق النظرية حول التابع الضمني: يوجد حل $y = y(x)$ ، $z = z(x)$ للجملة $u=0$ و$v=0$ يحقق $y(1) = 1$ و$z(1) = 1$. ثم ان

$$\frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial x} = \{2x,9x^2\}|_{\{1,1,1\}} = \{2,9\}$$

بحيث أن:

$$\{y'(1), z'(1)\} = -\left[\frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial(y,z)}\right]^{-1} \cdot \frac{\partial\Phi(1,1,1)}{\partial x} =$$

$$= -\begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}\{2,9\} = \{-5,7\}.$$

وبالتالي فإن معادلتي المماس عند النقطة $\{1,1,1\}$ هما:

$$\left\{\begin{array}{l} y-1 = -5(x-1), \\ z-1 = 7(x-1). \end{array}\right. \quad (8)$$

نحصل على الحل الشكلي بمفاضلة المعادلتين (7):

$$2xdx-dy.z-y.dz = 0$$

$$9x^2dx-dy-2dz = 0$$

وبنقل القيم $x=y=z=1$ في العلاقتين المحصل عليهما وبحل الجملة الناتجة عن

ذلك، بالنسبة لِـez وdz .بهذه الطريقة نجد:

$$dy = -5dx$$
$$dz = 7dx$$

وهي النتيجة المطابقة لِـ(8) عند وضع $x-1=dx$، $y-1=dy$، $z-1=dz$.

جـ. جذور معادلة جبرية كتوابع مستمرة وقابلة للإشتقاق بالنسبة لمعاملاتها.

نعتبر كثير حدود جبري من الدرجة n:

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n \tag{9}$$

حيث a_1، ...، a_n معاملات عقدية ونرمز لجذور كثير الحدود بِـ λ_1، ...، λ_n. بما أنه يمكن وصل كل مجموعة معاملات $C_n \ni a = (a_1,\dots,a_n)$ بمجموعة وحيدة من الجذور $C_n \ni \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$، فإن الامر يتعلق بالتابع $\lambda = \lambda(a): C_n \to C_n$. لنثبت ان هذا التابع مستمر (وقابل للاشتقاق) عند كل نقطة $C_n \ni a$ تكون من اجلها الجذور λ_1، ...، λ_n متخالفة مثنى مثنى.

ترتبط معاملات كثير الحدود (9) بالجذور وفق دساتير فيات (Viète)

$$\begin{cases} a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n, \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n; \end{cases} \tag{10}$$

من الواضح ان التابع المحصل عليه $a = a(\lambda)$ مستمر اينما كان وقابل للإشتقاق. إذا رمزنا لتزايد المتغير λ بِـ$(d\lambda_1 ,\dots, d\lambda_n)$ = $d\lambda$ فإن الجزء الخطي الرئيسي للتابع $a(\lambda)$ يعين بشكل طبيعي بِـ:

$$da(\lambda) = \frac{\partial(a_1, \dots, a_n)}{\partial(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} d\lambda, \tag{11}$$

حيث $\frac{\partial(a_1, \ldots, a_n)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}$ هي المصفوفة اليعقوبية العقدية للجملة (10). يقبل المؤثر (11) القلب إن كان معين $\frac{\partial(a_1, \ldots, a_n)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \neq 0$. يخالف الصفر. يمكننا في حالة تحقق ذلك تطبيق نظرية التابع العكسي 65.1 التي تضمن وجود واستمرار وقابلية اشتقاق التابع العكسي (أو المقلوب) $\lambda(a)$(*).

هكذا، فما علينا الآ ان نبين بأن العلاقة $\det \frac{\partial(a_1, \ldots, a_n)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \neq 0$ محققة في حالة اختلاف الاعداد $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مثنى مثنى.

نجري البرهان بالتدريج على $m=1$، 2، ...، n، ... . إن مقولتنا محققة من اجل $m = n\text{-}1$ لأن $\frac{\partial a_1}{\partial \lambda_1} = 1$. لنفرض انها محققة من أجل $m = n\text{-}1$. نتخذ الرمز:

$$\begin{cases} b_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-1}, \\ b_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}. \end{cases} \quad (12)$$

نلاحظ عند تشكيل كثير الحدود:

$$z^{n-1} - b_1 z^{n-2} + b_2 z^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} b_{n-1} \quad (13)$$

ان الاعداد λ_1، ...، λ_{n-1} تمثل جذورا له. إن كانت هذه الاعداد متخالفة مثنى مثنى فإن $\det \frac{\partial(b_1, \ldots, b_{n-1})}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})} \neq 0$ حسب فرض التدريج. وبالتالي إذا استكملنا الدساتير (12) بالدستور $\lambda_n = \lambda_n$ فإننا نحصل على:

$$\det \frac{\partial(b_1, \ldots, b_{n-1}, \lambda_n)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} \neq 0 \quad (14)$$

(*) قابلية الاشتقاق بالمفهوم العام 32.1 ـ أ؛ الواقع ان التابع $\lambda(a)$ اكثر من ذلك، فهو تابع تحليلي، اي يقبل الاشتقاق بالنسبة للمتغيرات العقدية $a_1,\ldots,a_n$، وهذا امر لا يستنتج، لحد الساعة، من اعتبارات 32.1 ـ أ.

بمراعاة (12)، نجد ان الدساتير (10) تأخذ الشكل:

$$a_1 = b_1+\lambda_n$$
$$a_2 = b_2+b_1\lambda_n$$
$$a_3 = b_3+b_2\lambda_n$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$a_n = b_{n-1}\lambda_n$$

ومنه يأتي:

$$\frac{\partial(a_1,\ldots,a_n)}{\partial(b_1,\ldots,b_{n-1},\lambda_n)}=\left\|\begin{matrix} 1 & & & & 1 \\ \lambda_n & 1 & & & b_1 \\ & \lambda_n & 1 & & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \lambda_n & 1 & b_{n-2} \\ & & & \lambda_n & b_{n-1} \end{matrix}\right\|.$$

لنحسب معين هذه المصفوفة. للقيام بذلك نطرح من كل سطر، ابتداء من السطر الثاني، السطر السابق مضروبا في λ_n؛ عندئذ نحصل على:

$$\det\frac{\partial(a_1,\ldots,a_n)}{\partial(b_1,\ldots,b_{n-1},\lambda_n)}=$$

$$=\left|\begin{matrix} 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & & & b_1-\lambda_n \\ & 0 & 1 & & b_2-b_1\lambda_n+\lambda_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & b_{n-1}-b_{n-2}\lambda_n+\ldots+(-1)^{n-1}\lambda_n^{n-1} \end{matrix}\right|=$$

$$=(-1)^{n-1}(\lambda_n^{n-1}-b_1\lambda_n^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}b_{n-1})\neq 0,$$

لأن λ_n يختلف، فرضا، عن كل عدد من الاعداد $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ وبالتالي فهو ليس جذرا لكثير الحدود (13). ثم نصل، بفضل (14)، الى:

$$\det\frac{\partial(a_1,\ldots,a_n)}{\partial(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}$$

$$=\det\frac{\partial(a_1,\ldots,a_n)}{\partial(b_1,\ldots,b_{n-1},\lambda_n)}\ \det\frac{\partial(b_1,\ldots,b_{n-1},\lambda_n)}{\partial(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},\lambda_n)}\neq 0$$

وهو المطلوب اثباته.

§ . البنية المحلية لتابع قابل للإشتقاق

ترتبط مسألة البنية المحلية لتابع قابل للإشتقاق $y = y(x):G\subset X\rightarrow Y$ ارتباطا وثيقا بنظرية التابع الضمني. نفرض فيما يلي ان الفضاءين X وY تامان.

إذا كان المؤثر $f'(a)$ قابلا للقلب عند نقطةمعطاة $G\ni a$ فإن التابع $f(x)$ يطبق جوارا للنقطة a، بصفة تقابلية، على جوار للنقطة $Y\ni f(a) = b$ مع العلم ان f ومقلوبه يقبلان الإشتقاق. ذلك ما ينتج من النظرية 65.1 حول التابع الضمني. كيف يكون الامر إن لم يكن المؤثر $f'(a):X\rightarrow Y$ قابلا للقلب؟

16.1 . سنعتبر بعض الحالات. نبين في البداية توطئة تتعلق بالنظرية العامة للمؤثرات الخطية المستمرة في الفضاءات النظيمية.

توطئة. نفرض ان اقتصار مؤثر خطي مستمر $A:X\rightarrow Y$ على فضاء جزئي مغلق $X\supset X_1$ يمثل تطبيقا قابلا للقلب من x_1 على كل الفضاء Y. يوجد عندئذ فضاء جزئي مغلق $X\supset X_2$ بحيث يشكل المجموع المباشر لـ X_1 وX_2 الفضاء X باكمله وبحيث يكون اقتصار المؤثر A على X_2 المؤثر المنعدم.

البرهان: نضع:

$$X_2 = \{x\in X:Ax = 0\}$$

من البديهي ان X_2 فضاء جزئي مغلق في X. ثم ان X_2 لا يشترك مع الفضاء X_1 الا بالعنصر 0. ذلك انه إذا كان $X_1\cap X_2\ni x_0$ فإن $0 = Ax_0 = z_0\in AX_1$، ومنه $x_0 = A^{-1}z_0 = 0$. اخيرا لدينا من اجل كل $X\ni x$: $Ax = Ax_1$ حيث $X_1\ni x_1$. ليكن $x_2 = x-x_1$؛ لدينا $Ax_2 = Ax-Ax_1 = 0$ إذن $X_2\ni x_2$؛ وبالتالي فإن التفكيك $x = x_1+x_2$، حيث $X_1\ni x_1$ و$X_2\ni x_2$،

موجود من اجل كل $x\ni X$. التفكيك السابق وحيد لأن $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. انتهى برهان التوطئة.

26.1 . ندرس هنا وفي النقطتين المواليتين بعض الحالات التي يكون فيها المؤثر $f'(a)$ غير قابل للقلب.

أ. نعتبر حالة اولى تكون فيها عدم قابلية المؤثر $f'(a)$ للقلب ناتجة عن كوْن الفضاء Y «اصغر بكثير» من الفضاء X وكوْن ساحة قيم $f'(a)$ «تغطي Y عدة مرات».

نفرض، على وجه التحديد، وجود فضاء جزئي مغلق $X\supset X_1$ بحيث يطبق المؤثر المشتق الجزئي $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ (أ –74.1) X_1 على كل Y وبحيث يكون هذا المؤثر قابلا للقلب. تسمى النقطة a هذه نقطة **عادية** (أو **اعتيادية**) من سطح المستوى الموافق لها $f(x) = C$ (حيث $f(a) = C$).

يوجد، استنادا الى التوطئة 16.1، فضاء جزئي مغلق $X\supset X_2$ يشكل مجموعة المباشر مع X_1 الفضاء X. لا يهمنا فيما يلي الشكل الصريح لِـ X_2 المشار اليه في التوطئة 16.1؛ ليكن X_2 اي فضاء جزئي مغلق يشكل مجموعة المباشر مع X_1 كل الفضاء X. نرمز للمتغير $x = x_1+x_2$ (حيث $X_1 \ni x_1$ و $X_2 \ni x_2$) بثنائية $\{x_1,x_2\}$ بحيث ان $a = \{a_1,a_2\}$. نضع، كما ورد اعلاه، $b = f(a)$. نثبت الآن النتيجة: يمثل «سطح المستوى» $P = \{x\in X:f(x) = b\}$ بجوار النقطة العادية $x=a$ المحل الهندسي الذي تعتبر عنه معادلة ذات الشكل $x_1 = \varphi(x_2)$، حيث $\varphi(x_2)(X_2\to X_1)$ تابع قابل للإشتقاق في جوار للنقطة $X_2\ni a_2$، $a = \{a_1,a_2\}$.

ها هو البرهان.

بعد اعتبار التفكيك $X = X_1+X_2$، نكتب التابع «لمتغير واحد» $f(x)$ على شكل تابع «لمتغيرين» $y = f(x) = F(x_1,x_2)$، حيث ان

$\frac{\partial F(a_1, a_2)}{\partial x_1}$ مؤثر قابل للقلب فرضا. يمكن، حسب نظرية التابع الضمني، حل المعادلة $y = F(x_1, x_2)$ بالنسبة لـ x_1 بجوار النقطة a_1، وهو ما يؤدي بنا الى معادلة من الشكل:

$$x_1 = g(x_2, y)$$

مع العلم ان $a_1 = g(a_2, b)$ ومشتقات التابع $g(x_2, y)$ مستمرة. نضع $y=b$ فنحصل على معادلة «سطح المستوى» P:

$$x_1 = g(x_2, b)$$

المحلولة بالنسبة للإحداثية x_1، وهو المطلوب.

ب. حالة التوابع العددية.

ليكن $y = f(x): G \subset X \to R_1$ تابعا قابلا للاشتقاق بحيث $f'(a) \neq 0$ من اجل نقطة $G \ni a$ حيث $f(a) = b$. يعني ذلك وجود شعاع $X \ni h$ بحيث $f'(a)h \neq 0$. في الحالة الراهنة، يمثل المؤثر $f'(a)$ تابعية خطية (42.1) ساحة قيمها هي R_1؛ ينتج من المتراجحة $f'(a)h \neq 0$ ان الفضاء الجزئي الوحيد البعد المولد عن الشعاع h، نفسه يطبق المؤثر $f'(a)$ على كل الفضاء R_1. يمكننا إذن اختيار هذا الفضاء الجزئي الوحيد البعد الفضاء الجزئي X_1 الوارد في أ. نستطيع اتخاذ، كفضاء X_2 (حسب التوطئة 16.1)، الفضاء الجزئي الذي تعدمه التابعية $f'(a)$. نحصل، وفق الاحداثيتين x_1 وx_2، على المعادلة التالية لسطح المستوى $f(x) = b$:

$$x_1 = g(x_2)$$

حيث $g(x_2)$ تابع قابل للإشتقاق. بصفة خاصة، لدينا، من اجل $a = (a_1, a_2)$، $a_1 = g(a_2)$. بمقدورنا كذلك حساب القيمة $g'(a_2)$ باشتقاق العلاقة $f(g(x_2), x_2) \equiv b$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} g'(x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

بما ان $\frac{\partial f(a)}{\partial x_2} = 0$ و $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \neq 0$ فـــــــإن $g'(a_2) = 0$ وهذا بوضع a: $(x_1,x_2) = (a_1,a_2) = a$.

إن المنوعة X_2، في هذه الحالة، مستو ماس $f(x) = b$ (1 .93ـ ج).

ج. مثال. ليكن $y = f(x):R_3R_2$ تابعا شعاعيا معرفا بمعادلتين عدديتين:

$$\begin{cases} y_1(x) = f_1(x_1, x_2, x_3), \\ y_2(x) = f_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (1)$$

من المؤكد ان المشتق:

$$f'(a) \cong \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_3} \end{Vmatrix}$$

ليس مؤثرا قابلا للقلب. نفرض الاصغري:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

غير منعدم. حينئذ يكون المؤثر المشتق الجزئي بالنسبة للمستوى $X_1 = \{x_1,x_2\}$ قابلا للقلب. إذا اخترنا، كفضاء X_2، الفضاء الوحيد البعد $\{x_3\}$، تأخذ المعادلتان (1) الشكل التالي الذي سبقت رؤيته:

$$x_1 = \varphi_1(x_3;y_1,y_2)$$
$$x_2 = \varphi_2(x_3;y_1,y_2)$$

بتثبيت $y_1=b_1$ و $y_2=b_2$ في المعادلتين السابقتين نحصل على شكل «سطح المستوى» للتابع $y = f(x)$:

$$x_1 = \varphi_1(x_3;b_1,b_2)$$
$$x_2 = \varphi_2(x_3;b_1,b_2)$$

1 .36ـ أ. نعتبر، بعد حالة 1 .26ـ أ، حالة ثانية تكون فيها عدم قابلية

انه منحن في الفضاء R_3. لنرمز له بـP.

يمثل « المستوى الماس » للمنحنى P المستقيم الماس له. يعبر تعامد التذرج على المستوى الماس (1 .93ـ ج) كوْن المؤثر $f'(x)$ يعدم الشعاع الماس للمنحنى P؛ وهو الامر الذي يمكن ملاحظته مباشرة باستخدام دساتير اشتقاق تابع ضمني.

المؤثر $f'(a)$ للقلب ناتجة عن كوْن الفضاء Y « اكبر بكثير » من الفضاء X، وكون ساحة قيم المؤثر $f'(a)$ لا تغطي كل الفضاء Y.

ليكن $Y \supset Y_1$ و $Y \supset Y_2$ فضاءين جزئيين مغلقين مجموعهما المباشر هو Y باكمله. حينئذ، يمكننا بإستخدام التفكيك $y = y_1 + y_2$ ($Y_1 \ni y_1$ و $Y_2 \ni y_2$) التعبير عن التابع $y = f(x)(X \to Y)$ بتابعين:

$$y_1 = f_1(x) \quad (X \to Y_1) \tag{1}$$

$$y_2 = f_2(x) \quad (X \to Y_2) \tag{2}$$

إن هذه التوابع تقبل الإشتقاق مع $f(x)$ (1 .23ـ جـ).

لنفرض ان التابع $f_1(x)$ يضمن قابلية المؤثر $f_1'(a)$ $(X \to Y_1)$ للقلب. ينتج عندئذ من نظرية التابع العكسي، اننا نستطيع حل المعادلة (1) بالنسبة لـy_1؛ بنقل العبارة $x = \varphi(y_1)$ الموافقة لها في المعادلة (2) نجد العلاقة التالية بين y_1 وy_2:

$$y_2 = f_2[\varphi(y_1)] \tag{3}$$

إن هذه العلاقة تمثيل لصورة التابع $f(x)$، وهذه الصورة ليست مساوية للفضاء Y باكمله، في الحالة المعتبرة، بل هي منوعة (فقط) من Y يمثلها بيان التابع (3) القابل للإشتقاق.

ب. مثال. نفرض ان لدينا تابعا $R_2 \to R_3$: $y = f(x)$ معطى بجملة المعادلات:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2), \\ y_3 = f_3(x_1, x_2). \end{cases} \tag{4}$$

مشتق هذا التابع هو:

$$f'(a) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_3(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(a)}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|$$

وهو، بالتأكيد، غير قابل للقلب. دعنا نفرض على الأقل ان الاصغري:

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} \end{matrix} \right|$$

غير منعدم. حينئذ يكون المؤثر $F'(a)$، باعتبار التابع $y = f(x)(R_2 \rightarrow R_2)$:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

مؤثرا قابلا للقلب. بالاستناد الى ما برهنا عليه سابقا فإنالمعادلتين الاولى والثانية في (4) نستطيع حلهما بالنسبة لِـ x_1 وx_2 في جوار للنقطة a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2), \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2), \end{array} \right. \tag{5}$$

حيث مشتقات التابعين φ_1 وφ_2 مستمران. ثم بنقل العبارتين (5) الى المعادلة الاخيرة في (4) نجد:

$$y_3 = f_3[\varphi_1(y_1, y_2), \varphi(y_1, y_2)]$$

إنها معادلة سطح في الفضاء R_3 يُمثل ساحة قيم التابع $y = f(x)$.

46.1 . هناك اسباب اخرى تجعل المؤثر $f'(a)$ غير قابل للقلب.

أ. لإبراز تلك الاسباب وطرح المسألة بشكل سليم، نعتبر في البداية تحويلا خطيا $y = Ax: R_n \rightarrow R_m$ معرفا (ضمن اساسين مثبتين لهذين الفضاءين) بالدساتير:

$$y_i = \sum a_{ij} x_j \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{1}$$

عندما ترسم النقطة x الفضاء R_n فإن الشعاع $y = Ax$ لا يرسم، عموما، كل الفضاء R_m؛ إن الصورة للفضاء R_n بواسطة التطبيق (1) فضاء جزئي $I_mA = R \subset R_m$. من الطبيعي ان يطرح السؤالان المواليان في الحين: ما هو بعد الفضاء الجزئي R؟ كيف يمكن وصف R بدلالة الاحداثيات y_i؟ هناك سؤال آخر مرتبط ارتباطاً وثيقاً بالسؤالين السابقين. نلاحظ انه إذا كانت $y = (y_1,...,y_m)$ نقطة معطاة من R فإن هناك، عموما، اكثر من نقطة (في R_n) تتحول بواسطة التطبيق (1) الى y. تسمى مجموعة النقاط (في R_n) التي تتحول بواسطة A الى النقطة y **الصورة العكسية التامة للنقطة** z ونرمز لها بـ$A^{-1}z$(*). فيما يتعلق بالنقطة $y = 0$ فإن المجموعة $A^{-1}y$ فضاء جزئي $R_0 \subset R_n$ يسمى نواة التطبيق A ويرمز له بـ$\text{Ker}A$(**). اما من اجل نقطة اخرى $y \in I_mA$، فإن الصورة العكسية التامة لها هي انسحاب الفضاء الجزئي R_0 وفق شعاع معين (وهذا استنادا الى النظرية المعروفة القائلة: إن الحل العام لجملة خطية غير متجانسة يساوي مجموع حل كيفي لهذه الجملة والحل العام للجملة المتجانسة الموافقة للجملة المعتبرة). وهكذا، فإن الصور العكسية التامة لنقاط مختلفة منوعات خطية لها نفس البعد. ما هو هذا البعد؟ كيف يمكن وصف هذه المنوعات الخطية بدلالة الاحداثيات x_j؟

يقدم الجبر الخطي جوابا على السؤالين السابقين: إن الفضاء الجزئي $R = I_mA$ مولد عن اعمدة المصفوفة $A \cong \|A_{l2}\|$؛ اما بعد R فهو يساوي العدد الاعظمي للأعمدة المستقلة خطيا في المصفوفة A، اي انه يساوي لمرتبة المصفوفة. ثم إن $R_0 = \text{Ker}A$ هو الفضاء المؤلف من حلول الجملة الخطية المتجانسة الموالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \ , \ i = 1,...,n \qquad (2)$$

(*) نشير، في هذه الحالة، ان المؤثر A^{-1} غير موجود عموما.

(**)الرمز هذا مصدره كلمة Kernel الانكليزية التي تعني نواة

اما بعد هذا الفضاء فهو $n-r$، حيث يمثل r مرتبة المصفوفة A (راجع مثلا ل.3 .15).

نفرض، بغية تثبيت الافكار، ان اصغري اساس للمصفوفة A يقع في الاسطر الاولى (البالغ عددها r) والاعمدة الاولى (البالغ عددها r). حينئذ يكتب كل سطر، ابتداء من السطر $(r+1)$، في المصفوفة A كعبارة خطية للاسطر الاولى البالغ عددها r؛ بامكاننا كتابة ذلك كما يلي:

$$a_{sj} = C_{s1}a_{1j}+\dots+C_{sr}a_{rj} \quad (s = r+1,\dots,m) \tag{3}$$

حيث $C_{s1},\dots,C_{sr}$ معاملات معرفة بطريقة وحيدة. ينتج من ذلك ان الكميات $y_1,\dots,y_m$ تحقق العلاقات:

$$y_s = C_{s1}y_1+\dots+C_{sr}y_r \quad (s = r+1,\dots,m) \tag{4}$$

من جهة اخرى، هناك الكميات $y_1,\dots,y_m$ التي تربطها العلاقات (4)، ومنه ينتج وجود قيم $x_n,\dots,$
العلاقات (1)؛ للبرهان على ذلك يمكن وضع: 0 = , =...= 1+غ
وتعيين $x_1,\dots,x_r$ من المعادلات الاولى (البالغ عددها r) في الجملة (1)؛ إن العناصر y_i المعطاة والعناصر x_i المحصل عليها بهذه الطريقة تحقق المعادلات الاولى (البالغ عددها r) في (1)، بعد ذلك تكون المعادلات المتبقية (البالغ عددها $m-r$) محققة بفصل الدساتير (3). وبالتالي توفر العلاقات (3) وصفا كاملا للفضاء الجزئي $Y\supset R$. كما تصف المعادلات (2)، بدورها، الفضاء الجزئي $X\supset R_0$ وصفا كلملا.

ب. نناقش الآن الاسئلة المماثلة المتعلقة بتابع كيفي قابل للإشتقاق $y = (x)$ يعمل من ساحة $G\subset X = R_n$ في الفضاء $Y = R_m$. يُمثَل التابع $y = (x)$ بدلالة الاحداثيات، بجملة معادلات ذات الشكل:

$$y_i = f_i(x_1,\dots,x_n) \quad (i = 1,\dots,m)$$

حيث $f_i(x)$ توبع معرفة ومستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة في الساحة

G. نطرح الاسئلة الموالية: ما هو بعد صورة جوار نقطة $G\{b$؟ ما هي المعادلات، بدلالة الاحداثيات y_i، التي تصف هذه الصورة؟ ما هو بعد الصورة العكسية التامة للنقطة $b = f(a)$؟ ما هي المعادلات، بدلالة الاحداثيات x_i، التي تصف هذه الصورة العكسية؟ المقصود من مفهوم البعد الوارد في الاسئلة السابقة هو التالي: سنبين ان المجموعتين الوارد ذكرهما آنفا يمكن وصف كليهما بواسطة جملة توابع لعدة متغيرات حقيقية مستقلة؛ عدد هذه المتغيرات المستقلة هو الذي نسميه بعد المجموعة المعتبرة.

نجيب عن كل هذه الاسئلة بافتراض ان مرتبة المصفوفة اليعقوبية:

$$f'(x) \cong \begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

قيمة ثابتة r في جوار U للنقطة a.

نلاحظ ان مرتبة المصفوفة اليعقوبية تتغير عموما بتغير النقطة المعتبرة؛ إذا اعتبرنا نقطة a_0 تأخذ فيها هذه المرتبة قيمتها الاعظمية r_0، فإن اي اصغري من الرتبة r_0 غير منعدم عند a_0 سيكون غير منعدم في جوار للنقطة a_0، وذلك بفضل الاستمرار. وهكذا فإن افتراضنا القائل ان المرتبة ثابتة بجوار للنقطة a متوفر من اجل بعض النقاط $G \ni a$.

يمكننا، دون المس بعمومية المسألة، افتراض ان اصغري اساس المصفوفة $f'(x)$، من اجل كل $U \ni x$، يقع في السطور والاعمدة الاولى من المصفوفة. ذلك اننا نستطيع وضعه هناك من اجل نقطة a بإجراء تبديل، إذا لزم الامر، في الاحداثيات في R_n وR_m؛ ونظرا لاستمرار المصفوفة اليعقوبية، يبقى هذا الاصغري غير منعدم في جوار للنقطة a.

نظرية المرتبة. لدينا ضمن الافتراضات المنصوص عليها:

1) من اجل جوار $a \in U$، فإن مجموعة كل قيم التابع $f(x)$ في جوار للنقطة

$b = f(a)$ موصوفة بجملة المعادلات ذات الشكل:

$$y_s = \varphi_s(y_1,\dots,y_r) \ , \ s = r+1,\dots,m$$

حيث $\varphi_{r+1},\dots,\varphi_m$ توابع قابلة للإشتقاق، وتتعين إذن بواسطة r وسيطاً حراً $y_1,\dots,y_r$.

2) يوجد في جوار V للنقطة b بحيث تكون كل نقطة من المجموعة $I_m f \cap V$ صورة مجموعة نقاط x موصوفة، داخل الجوار U، بجملة من الشكل:

$$x_j = \psi_j(x_{r+1},\dots,x_n) \qquad (j = 1,\dots,r)$$

حيث ψ_j توابع قابلة للإشتقاق، وتتعين إذن بواسطة $(n-r)$ وسيطا حرا $x_{r+1},\dots,x_n$.

نقدم البرهان على نظرية المرتبة ضمن 1 .66.

56.1 . النظرية المجردة للمرتبة (لونغ Lang).

ليكن $X = X_1+X_1$ و$Y = Y_1+Y_2$ فضاءين نظيميين تامين يمثلان مجموعتين مباشرين لفضاءات جزئية مغلقة. إذن، من اجل كل $X \ni x$ و$Y \ni y$، يوجد تفكيكان معينان بطريقة وحيدة: $x = x_1+x_2$ و$y = y_1+y_2$ حيث $X_1 \ni x_1$، $X_2 \ni x_2$، $Y_1 \ni y_1$، $Y_2 \ni y_2$. يمكن وضع كل تابع $y = f(x): X \to Y$ في شكل ثنائية معادلتين:

$$y_1 = F_1(x_1,x_2): X \to Y_1$$

$$y_2 = f_2(x_1,x_2): X \to Y_2$$

يوافق المشتق $f'(x)$ المصفوفة المؤثرية:

$$f'(x) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|$$

نثبت النقطتين $\bar{A}_1+a_2$ A و $b = b_1+b_2$ $= f(a) \ni Y$.

نظرية. نفرض ان التابع $f(x)$ يقبل الإشتقاق في ساحة $X \supset G$ تحوى النقطة a وتحقق الشرطين التاليين:

1) $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x)h = 0$ يستلزم $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x)h = 0$

2) $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)$ تطبيق قابل للقلب من X_1 على Y_1.

يوجد عندئذ ثلاثة جوارات $X \ni U(a)$ و(ةَ)لاّ ةُ و$X_2 \ni W(a_2)$ بحيث:

أ) من اجل $U(a) \ni x$ و $V(b_1) \ni y_1$، فإن ساحة قيم التابع $y = f(x)$ يمكن ان تعرّف بمعادلة من الشكل $Y_2 = \varphi(y_1)$.

ب) من اجل كل $f(U) \ni y$. فإن الصورة العكسية التامة $f^{-1}(y)$ يمكن تعيينها بواسطة معادلة من الشكل $x_1 = \psi(x_2)$، حيث $W(a_2) \ni x_2$. يقبل هنا التابعان φ وψ في الجوارين المعتبرين مشتقات مستمرة.

البرهان

نعتبر التابع

$\Phi(y_1, x_1, x_2) = F_1(x_1, x_2) - y_1 (G + Y_1 \to Y_1)$. من البديهي ان $\Phi(b_1, a_1, a_2) = 0$ وان المؤثر $\frac{\partial \Phi(b_1, a_1, a_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ قابل للقلب. استناداً الى النظرية 35.1 حول التابع الضمني، توجد ثلاثة جوارات $Y_1 \supset V(b_1)$، $X_2 \supset W(a_2)$، $X_1 \supset W(a_1)$ وتابع $g(x_2, y_1): W(a_2) \times V(b_1) \to W(a_1)$ قابل للإشتقاق باستمرار بحيث تكون المعادلة $F^1(x_1, x_2) - y_1 = 0$ مكافئة للمعادلة $x_1 = g(x_2, y_1)$. بعبارة اخرى، لدينا:

$$F_1(g(x_2, y_1), x_2) \equiv y_1 \qquad (1)$$

نضع $U(a) = W(a_1) \times W(a_2) \cap \{x : F_1(x) \in V(b_1)\}$. يمكننا الآن

وضع المعادلة:

$$y_2 = F_2(x_1,x_2)$$ ،

من اجل $U(a)\ni x$ ، على الشكل:

$$y_2 = F_2(g(x_2,y_1),x_2) \tag{2}$$

لنثبت ان الطرف الايمن لا يتعلق بـ x_2. باشتقاق (1) و(2) بالنسبة لـ x_2 نحصل على:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}+\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_2}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}=\frac{\partial y_2}{\partial x_2}. \tag{4}$$

ينتج من (3) ان قيمة المؤثر $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x}$ عند الشعاع $\left\{\frac{\partial g}{\partial x_2}h_2, h_2\right\}$ منعدمة مهما كان $X_2\ni h_2$. لكن الفرض (1) في النظرية يستلزم نفس النتيجة بخصوص قيمة المؤثر $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x}$ عند نفس الشعاع؛ لدينا إذن $\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$ والطرف الثاني من (2) لا يتعلق بـ x^2. وبالتالي، تأخذ المعادلة (2)، من اجل $V(b_1)\ni y_1$ ، الشكل:

$$y_2 = \varphi(y^1)$$

علما ان التابع $\varphi(y_1)$ يقبل مشتقا مستمرا والامر كذلك F_2 و g.
(انتهى برهان أ).

نعالج الآن الصورة العكسية التامة لنقطة: $f(U)\ni f(x) = y = \{y_1,y_2\}$. كنا رأينا ان مثل هذا التابع $\{y_1,y_2\}$ معين تماما بالمركبة الاولى y_1. ثم، عند تعاطي x_2 و ه، نعيّن تماما وبطريقة وحيدة في الجوار المذكور $W(a_2)\times V(b_1)$ المركبة $x_1 = g(x_2,y_1)$ التي تمثل، من اجل y_1 مثبت، تابعا لـ $W(a_2)\ni x_2$ له مشتق مستمر. انتهى برهان النظرية.

66.1 ـ أ. برهان نظرية المرتبة (46.1 ـ ب).

كنا تعاطينا في نص النظرية المعتبرة تابعا قابلا للإشتقاق: $y = f(x)(G\subset R_n \to R_m)$ ، يكتب بدلالة الاحداثيات:

$$y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

فرضنا ان مرتبة المصفوفة اليعقوبية:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

عدد ثابت r في جوار U لنقطة $R_n \ni a$ وان هناك اصغري اساس لهذه المصفوفة واقع في السطور والاعمدة الاولى (البالغ عدد كل منها r) من هذه المصفوفة.

نثبت نظرية المرتبة كنتيجة من 56.1 . نضع في 56.1 $X = R_n$ و$Y = R_m$. نُعرف بعد ذلك الفضاء الجزئي $R_n = Y \supset Y_1$ بالاشعة الاولى، البالغ عددها r ، من اساس للفضاء R_m ، كما نعرّف الفضاء الجزئي Y_2 بالاشعة المتبقية، البالغ عددها $m-r$ ، من هذا الاساس. عندئذ تُصبح المساواة $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x} h = 0$ مكافئة لجملة المعادلات:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \qquad (i = 1,\ldots,r) \tag{1}$$

كما ان المساواة $\frac{\partial F_2(x)}{\partial x} h = 0$ تكافيء الجملة:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} h_j = 0 \qquad (i = r+1,\ldots,m) \tag{2}$$

بما ان سطور المصفوفة $f'(x)$، ابتداء من السطر $(r+1)$ ، عبارات خطية للسطور السابقة، فإن المعادلات (2) تأتي من المعادلات (1). نعرف الآن الفضاء الجزئي $R_n = X \supset X_1$ بالاشعة الاولى، البالغ عددها r ، من

اساس لِلفضاء R_n والفضاء الجزئي X_2 بالاشعة المتبقية، البالغ عددها $n-r$، من هذا الاساس. عندئذ يكون المؤثر $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)$ المعرف بالمصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{matrix} \right\|$$

قابلا للقلب لأن معين هذه المصفوفة غير منعدم؛ وبالتالي فإن الفرض (2) في النظرية 56.1 متوفر ايضا. يبقى ان نصيغ خلاصة النظرية في الحالة المعتبرة: توجد ثلاثة جوارات $R_n \supset U(a)$ و $R_r = Y_1 \supset V(b_1)$ و $R_{n-r} = X_2 \supset W(a_2)$ بحيث يمكن، من اجل $U(a) \ni x$ و $V(b_1) \ni (y_1, \ldots, y_r)$، تمثيل مجموعة قيم التابع $y = f(x)$ بالمعادلات ذات الشكل:

$$y_{r+1} = \varphi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r) \ , \ \ldots \ , \ y_m = \varphi_m(y_1, \ldots, y_r)$$

ثم، من اجل كل $f(U) \ni y$، يمكن تمثيل الصورة العكسية التامة $f^{-1}(y)$ بالمعادلات ذات الشكل:

$$x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \ldots, x_n) \ , \ \ldots \ , \ x_r = \psi_r(x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

حيث $W(a_2) \ni \{x_{r+1}, \ldots, x_n\}$ وحيث φ_i و ψ_j توابع قابلة للإشتقاق باستمرار في الجوارين الموافقين لها.

نلاحظ حينئذ ان هذه الخلاصة هي النتائج المطلوبة في النظرية 46.1، وبذلك يتم البرهان.

يمكن صياغة نظرية المرتبة بدلالة الابعاد (المقصود من البعد هنا هو العدد الاصغري للوسيطات اللازمة لتمثيل مجموعة معطاة بواسطة توابع قابلة للإشتقاق) كما يلي: إن بعد صورة جوار نقطة بواسطة التطبيق $y = f(x)$، يساوي r، اما بعد الصورة العكسية التامة $f^{-1}(y)$ لكل نقطة y من صورة $U(a)$ فتساوي $n-r$.

ب. نستطيع تمديد صلاحية مفهوم عدم الاستقلال الخطي للاشعة (سطور اعداد اشكال خطية..الخ) المعروف في الجبر الخطي، الى التوابع وذلك بالطريقة التالية:

ليكن $y = f(x)$ $(G \to R_m)$ تابعا معرفـاً وقابلا للإشتقاق باستمرار في ساحة $R_n \supset G$ بحيث تقبل كل المركبات:

$$y_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة لِـ x_1 و x_n. نفرض بعد ذلك ان المرتبة للمصفوفة اليعقوبية:

$$f'(x) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

ثابتة في الساحة G. اذا كان، زيادة على ذلك، $r = m$، نقول عن التوابع $f_1(x), f_m(x)$ انما مستقلة في G؛ واذا كان $r < m$ نقول عنها انها غير مستقلة في G. تسمح نظرية المرتبة 46.1-ب بوصف الخاصيات الهندسية للتوابع المستقلة وغير المستقلة وهكذا فإن التوابع $f_1(x), .., f_n(x)$ التي تنجز تفاتشاكلاً من الساحة G. على $f(G)$ توابع مستقلة لان مصفوفتها $f'(x)$ غير منحلة. $r = m = n$. اما القضية العكسية للنتيجة السابقة فهي قائمة في شكل ضعيف: اذا كان $r = m = n$، فإن التوابع $f_1(x) . .., f_n(x)$ تنجز تفاتشا كلاً من جوار $U(a)$ لكل نقطة $G \ni a$ على الجوار الموافق له للنقطة $f(G) \ni f(a)$. إذا كان زيادة على ذلك، التطبيق $y = f(x)$ تقابليا (من G على $f(G)$. فإن التوابع $f_1(x), f_n(x)$ تنجز تفاتشاكلا من G على $f(G)$. عندما يكون $r = m < n$ فإن التوابع (المستقلة)

$$f_1(x), \;..,\; f_m(x)$$

تطبق جوارا لكل نقطة $G \ni a$ على الجوار الموافق له للنقطة $f(a)$، لكن هذا التطبيق ليس تقابلياً ذلك ان الصور العكسية للنقاط $f(x)$ ذات بعد $(n - m)$ في G. اخيرا، اذا كان $r < m$، فإن التوابع (غير المستقلة)

$f_1(x), .., f_m(x)$ تطبق جوارا $U(a)$ لكل نقطة a ذ G على سطح في R_m ذي بعد r معادلته $y_{r+1} = \varphi(y_1, \ldots, y_r)$، بحيث ان التوابع $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ ترتبط فيها بينها في $U(a)$ (بعد اتخاذ ترقيم مناسب للإحداثيات) بعلاقات من الشكل:

جـ. من اجل كل تفاتشاكل $\pi: G \subset R_n \to V \subset Z (=R_n)$، تصبح التوابع المستقلة $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ هي التوابع المستقلة $\varphi_1(z) = f_1(\pi^{-1}z), \ldots, \varphi_m(z) = f_m(\pi^{-1}z)$ ذلك ان المصفوفة اليعقوبية للتطبيق $\varphi(z) = \{\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)\}$ هو الجراء للمصفوفة اليعقوبية $(n \times m)$ غير المنحلة للتفاتشاكل π^{-1} في المصفوفة $(n \times m)$ للتطبيق $f(x) = \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$؛ ؟ ثم إننا نعلم بأن مرتبة مصفوفة لا تتغير بضربها في اية مصفوفة غير منحلة (ل.76.4) .

76. 1 . مسألة تكافؤ.

إن لمسألة البنية المحلية لتابع قابل للإشتقاق طابعا هاما آخر؟ ندرس في البداية كما هو الحال في 46.1ـ أ حالة تابع خطي $y = f(x): X \to R_n \to Y = R_m$ معطى بالعلاقات:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

نفرض ان من حقنا الانتقال، في الفضاءين XوY ، الى الاحداثيات الجديدة بواسطة اي تحويل خطي غير منحل؟ نتساءل عندئذ عن ابسط شكل ممكن نستطيع وضع عليه المعادلات (1)؟

للإجابة عن هذا السؤال، نفرض مرة اخرى ان مرتبة الجملة (1) هي r وان هناك 1صغري اساس للمصفوفة $A = \|a_{ij}\|$ يقع في الاسطر والاعمدة الاولى، البالغ عدد كل منها r. حينئذ تكون الكميات $y_1, \ldots, y_m$ كما سبق ان رأينا، مرتبطة فيما بينها بالمعادلات 46. 1 (4):

$$y_s = C_{s1}y_1 + \ldots + C_{sr}y_r \quad (s = r + 1, \ldots, m). \tag{2}$$

ندخل في الفضاء X الاحداثيات الجديدة $\xi_1, \ldots, \xi_n$ وفق الدساتير:

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_r = a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n, \\ \xi_{r+1} = x_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = x_n. \end{cases}$$

يمكن بالفعل استخدام الكميات $\xi_1, \ldots, \xi_n$ كاحداثيات جديدة لان معين الجملة (3) يساوي، بطبيعة الحال، اصغري اساس المصفوفة A، وعليه فهو غير منعدم. ندخل في الفضاء Y الاحداثيات الجديدة $\eta_1, \ldots, \eta_m$ وفق الدساتير:

$$(4) \quad \begin{cases} \eta_1 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_r = y_r, \\ \eta_{r+1} = -C_{r+1,1}y_1 - \ldots - C_{r+1,r}y_r + y_{r+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_m = -C_{m1}y_1 - \ldots - C_{mr}y_r + y_m. \end{cases}$$

إن معين هذه الجملة يساوي 1، ويمكن بالفعل استخدام $\eta_1, \ldots, \eta_m$ كاحداثيات جديدة في الفضاء Y نلاحظ بفضل (2)، ان العلاقات (1) تكتب على النحو:

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \eta_r = \xi_r, \\ \eta_{r+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \eta_m = 0. \end{cases}$$

من الواضح ان هذا الشكل هو ابسط الاشكال التي يمكن ان نضع عليها التحويل الخطي (1) وذلك بالانتقال الى الاحداثيات الجديدة في الفضاءين X و Y

ب. لندرس المسألة المماثلة المتعلقة بتابع قابل للإشتقاق $y = f(x)$ يعمل من $R_n = X \supset G$ في $R_n = Y$ يكتب هذا التابع بدلالة الاحداثيات كما يلي:

$$(6) \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, m).$$

نتساءل عندئذ عن ابسط شكل ممكن نستطيع وضع عليه التابع $y = f(x)$ عندما يكون من حقنا الانتقال؟ بجوار نقطة معطاة $G \ni a$ وبجوار النقطة $b = f(a)$، الى الاحداثيات الجديدة بواسطة اي تحويل قابل للإشتقاق وقابل للقلب.

للإجابة عن هذا السؤال، نفرض ان فرض نظرية المرتبة 46.1 ـ ب متوفر. ندخل في الفضاء X الاحداثيات الجديدة وفق الدساتير:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\xi_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_r = f_r(x_1, \ldots, x_n), \\
\xi_{r+1} = \qquad x_{r+1}, \\
\xi_n = \qquad\quad x_n.
\end{array}
\right. \tag{7}
$$

يمكن بالفعل استخدام الكميات $\xi_1, \ldots, \xi_n$ كاحداثيات جديدة في جوار النقطة a، لان اليعقوبي $\frac{\partial(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{\partial(x_1, \ldots x_n)}$ يساوي اصغرى اساس للمصفوفة A عند النقطة a، وعليه فهو غير منعدم فرضا ثم استناداً الى نظرية المرتبة 46.1ـ ب، فإن الكميات $y_1, \ldots, y_m$ ترتبط فيما بينها، في جوار $V_0(b)$ للنقطة $b = f(a)$، بالمعادلات:

$$
y_s = \varphi_s(y_1, \ldots, y_r), \quad s = r+1, \ldots, m. \tag{8}
$$

ندخل الكميات التالية:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\eta_1 = y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_r = \qquad\qquad\qquad y_r, \\
\eta_{r+1} = -\varphi_{r+1}(y_1, \ldots, y_r) + y_{r+1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_m = -\varphi_m(y_1, \ldots, y_r) + y_m.
\end{array}
\right. \tag{9}
$$

لدينا هنا $\frac{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$، وبالتالي يمكن اختيار الكميات $\eta_1, \ldots, \eta_m$ كاحداثيات جديدة في جوار $V_1(b)$. نلاحظ الآن، بالنظر الى (7)، ان العلاقات (6) تكتب على الشكل:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\eta_1 = \xi_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_r = \quad \xi_r, \\
\eta_{r+1} = \qquad 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\eta_m = \qquad 0.
\end{array}
\right. \tag{10}
$$

من الواضح ان هذا الشكل هو ابسط الاشكال التي يمكن ان نضع عليها التابع $y = f(x)$ وذلك باجراء التحويلات القابلة للإشتقاق والقابلة للقلب. بجوار النقطتين a و b.

ج. نصيغ فيا يلي نظرية تعمم الانشاءات الواردة في أ و ب لتشمل حالة ساحات في فضاء باناخي (نسبة الى Banach. من المؤكد اننا لن نستطيع استخدام الاحداثيات في هذه الحالة؟ ولذا سيعتمد التعميم المذكور الى مفهوم **تكافؤ تطبيقين**.

ليكن X, Y, Ξ, H فضاءات باناخية و $y = \varphi(x): U \subset X \to V \subset Y$ و $\xi = \psi(\eta): M \subset \Xi \to N \subset H$ تابعين قابلين للإشتقاق. ليكن بعد ذلك $\omega: U_0 \subset U \to M_0 \subset M,\ \omega(a) = \alpha$ و $\pi: V_0 \subset V \to N_0 \subset N,\ \pi(b) = \beta$ تفاتشاكلين. نقول عن التطبيقين φ و ψ انهما **متكافئان** إذا تحققت المساواة التالية من اجل كل

$$(11) \quad \pi\varphi(x) = \psi(\omega x).$$

نرسم احيانا «رسمة التطبيقات»:

$$\begin{array}{ccc} N_0 & \xleftarrow{\psi} & M_0 \\ \uparrow \pi & & \uparrow \omega \\ V_0 & \xleftarrow{\varphi} & U_0 \end{array}$$

يمكن معالجة العلاقة (11) كانها «خاصية التبديل» هذه الرسمة: عند الانطلاق من نقطة $x \in U_0$ في اتجاه سهمين φ و π نصل الى نفس النقطة من الساحة N_0 التي نصل اليها باتباع اتجاه سهمي ω و ψ. في حالة البعد المنتهي، نلاحظ ان تكافؤ تطبيقين ψ و φ يعني امكانية الانتقال من ψ الى φ بواسطة تحويل، قابل للإشتقاق وقابل للقلب، للإحداثيات وذلك في جوار $U_0 \subset U$ وجوار $V_0 \subset V$.

د. لنثبت نظرية التكافؤ التالية:

نظرية. نحتفظ بفرض النظرية 56.1. يوجد جواران $U_0 \subset U(a)$ و

$V(b) \supset V_0$ بحيث يكون التطبيق $y = f(x)$ مكافئا (في هذين الجوارين) للتطبيق $\psi: M_0 \subset \Xi = Y_1 + X_2 \to N_0 \subset H = Y_1 + Y_2$
المعرف بالدستور $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$.

البرهان. نعتبر التطبيقين:

$$\omega(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), x_2): U \subset X \to \Xi,$$
$$\pi(y_1, y_2) = (y_1, -\varphi(y_1) + y_2): V \subset Y \to H.$$

تكتب المصفوفة المؤثرية $\frac{d\omega}{dx}$ على الشكل:

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ 0 & E_2 \end{Vmatrix}$$

وبما ان $\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}$ قابل للقلب فرضا فإن $\frac{d\omega(a)}{dx}$ يقبل القلب (1 .41ـ ع).

إذن، واستنادا الى نظرية التابع العكسي 1 .65، فإن التطبيق ω تفاتشاكل من جوار $U \supset U(a)$ على جوار $\Xi \supset M_0$. بطريقة مماثلة نرى ان المصفوفة المؤثرية للتطبيق $\frac{d\pi}{dy}$ تكتب على الشكل:

$$\begin{Vmatrix} E_1 & 0 \\ -\varphi'(y_1) & E_2 \end{Vmatrix}$$

ومنه يأتي حسب 1 .41ـ ع، ان المؤثر $\frac{d\pi}{dy}$ هو ايضا قابل للقلب إذن فإن التطبيق π هو ايضا تفاتشاكل من جوار $V \supset V_0(b)$ على جوار $H \supset N_0$

نضع $\psi(y_1, x_2) = (y_1, 0)$، ونثبت، من اجل كل $x \in U_0(a)$، ان $\pi f(x) = \psi(\omega x)$.

ذلك انه ينتج من $\omega(x) = (F_1(x_1, x_2), x_2)$ ان:

$$\psi(\omega(x)) = (F_1(x_1, x_2), 0)$$

لكن المساواة $f(x) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2))$ تستلزم $y_2 = \varphi(y_1)$؛ إذن: $\pi f(x) = (F_1(x_1, x_2), 0) = \psi(\omega(x))$.

وعليه فإن التطبيقين f و ψ متكافئان؟ ينتهي بذلك البرهان.

86. 1 . الثنايا. كنا اثبتنا نظرية المرتبة بافتراض ان مرتبة المؤثر $f'(x)\ (R_n \to R_m)$ ثابتة في جوار للنقطة المعتبرة. إن كانت مرتبة $f'(a)$ تساوي r عند النقطة a ، فإنه يوجد، عموما بفضل الاستمرار؟ جوار لا تكون فيه هذه المرتبة اصغر من r ، رغم ذلك إذا كان $r < \min(n, m)$ فإنه توجد نقاط x قريبة بالقدر الذي نريد من النقطة a بحيث تكون مرتبة $f'(x)$ عندها تتجاوز r دعنا نقدم اضافات اخرى.

نعالج في البداية حالة التطبيق $y = f(x): R_2 \to R_2$ المعطى بالدستورين

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = x_2^2 \tag{1}$$

والذي مشتقته:

$$f'(x) \cong \begin{Vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{Vmatrix}$$

إن مرتبة هذه المصفوفة تساوي 2 من اجل $x_2 \neq 0$ و 1 من اجل $x_2 = 0$ (اي على المحور x_1) يحول التطبيق (1) كل المستوى $x = \{x_1, x_2\}$ الى نصف المستوى الاعلى $0 \leqslant y_2$ بشكل يجعل كل نقطة $y = \{y_1, y_2\}$ من نصف المستوى الاعلى (حيث $0 < y_2$) صورتين عكسيتين (فقط) هما: $x_1 = y_1,$ و $x_2 = \pm\sqrt{y_2}$ احداهما في نصف المستوى الاعلى من المستوى x، وثانيتهما في النصف الاسفل من نفس المستوى لنعالج الشاقولي $x_1 =$ ثابتا $-\infty < x_2 < +\infty$ بمزيد من التفصيل عندما تنزل النقطة $\{x_1, x_2\}$ وفق هذا المستقيم من $+\infty$ الى $-\infty$ فإن صورتها تنزل بادىء الامر وفق الشاقول $y_1 = x_1$ من $y_2 = +\infty$ الى النقطة $y_2 = 0,$ ثم تصعد وفق نفس المستقيم نحو $y_2 = +\infty.$ من الطبيعي ان نسمي هذا التطبيق ثنية.

ننتقل الى الحالة العامة المتعلقة بتطبيق $y = f(x), G \subset R_n \to R_n.$ نفرض ان اليعقوبي $J(x)$ للتطبيق $f(x)$ ينعدم عند نقطة $a \in G.$. إن سلوك التطبيق $f(x)$ بجوار هذه النقطة جد معقد عموما؟ سنبين ضمن بعض

الافتراضات الاضافية، ان التطبيق $f(x)$ من نمط الثنية. على وجه التحديد. سنرى انه إذا كان $\text{grad}\, J(a) \neq 0,$ أو كان $\text{grad}\, J(a)$ لا ينتمي الى « الفضاء الجزئي للتدرج » من الفضاء $X = R_n$ (يأتيك التعريف بعد حين) وانزاحت النقطة $x \ni X$ على طول منحنى يخرق السطح $S = \{x \in X,\ J(x) = 0\}$ في جوار للنقطة $a,$ فإن النقطة $y = f(x)$ الموافقة لها تنزاح وفق منحنى وتصل الى السطح $f(S) \subset Y = R_n,$ ثم ترجع على نفس المنحنى. ليكن $f = f(x): X = R_n \to Y = R_n$ تطبيقا يقبل ضمن اساس $e_1, \ldots, e_n$ حيث $x = \sum_1^n x_k e_k),$ التمثيل التحليلي التالي:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

نفرض ان $J(a) = 0.$ ينتج عن ذلك ان الاشعة:

$$\text{grad}\, f_1(a) = \left\{ \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{grad}\, f_n(a) = \left\{ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \right\}$$

غير مستقلة خطيا، وبالتالي فهي تولد فضاء جزئيا ذاتيا Z من الفضاء X. يسمى الفضاء الجزئي للتدرج (او التدريجي) نفرض عد ذلك، ان $\text{grad}\, J(a) \neq 0.$ نحن نعلم (ي 7 .41ـ) ان مشتق معين من الرتبة n يساوي مجموع n معينا (المعين ذو الرقم i من هذه المعينات لا يختلف عن المعين الابتدائي الا بعموده ذي الرقم i المشكل من مشتقات العمود ذي الرقم i في المعين المعطى). إذن إذا كانت كل الاصغريات من الرتبة $n - 1$ في المصفوفة $\| f'(a) \|$ منعدمة فإن لدينا $\frac{\partial J(a)}{\partial l} = 0,$ مهما كان الاتجاه $l,$ ، ذلك لان كل معين من المجموع المذكور ينشر وفق العمود الذي يحوي المشتقات اما معاملات هذا النشر فتساوي اصغريات معلومة من المعين الابتدائي. لكن الحالة التي نحن بصدد دراستها تفرض أن $J(a) \neq 0$ ، وبالتالي يوجد اتجاه l يحقق $\frac{\partial J(a)}{\partial l} \neq 0$ يوجد إذن

اصغري $B(x)$ من الرتبة $n-1$ للمصفوفة $\|f'(x)\|$ يساوي عند $x=a,$ عدداً $B\neq 0.$ نفرض قصد تثبيت الافكار، ان هذا الاصغري يقع من الاسطر والاعمدة الاولى البالغ عددها $n-1$ ، من المصفوفة $f'(a).$ نعتبر بجوار النقطة $a=(a_1,\ldots,a_n),$ التوابع:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= f_1(x_1,\ldots,x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_{n-1} &= f_{n-1}(x_1,\ldots,x_n),\\ \xi_n &= x_n. \end{aligned}$$

من الواضح ان المساواة $\frac{\partial(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}=B(x)\neq 0$ قائمة لذا يمكن استخدام الكميات $\xi_1,\ldots,\xi_n$ كاحداثيات جديدة في جوار للنقطة a (65.1 ـ جـ) يكتب التطبيق f ضمن هذه الاحداثيات، على الشكل

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ y_{n-1} &= \xi_{n-1},\\ y_n &= \varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n), \end{aligned}$$

حيث $\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=f_n(x_1(\xi),\ldots,x_{n-1}(\xi),\xi_n).$ لدينا ايضا طبقا لِ 33.1، $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx}$ و

$$J(x)=\det\left\|\frac{dy}{dx}\right\|=\det\left\|\frac{dy}{d\xi}\right\|\cdot\det\left\|\frac{d\xi}{dx}\right\|=B(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\xi_n};\quad \frac{\partial\varphi(a)}{\partial\xi_n}=0.$$

ثم بالرمز $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_n}=\psi$ وباستخدام 43.1 ـ د نجد:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} J(a) &= \operatorname{grad} B(a)\cdot\psi(a)+B(a)\cdot\operatorname{grad}\psi(a)=B(a)\cdot\operatorname{grad}\psi(a)=\\ &= B(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\operatorname{grad}\xi_1(a)+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}\operatorname{grad}\xi_n(a)\right)=\\ &= B(a)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\operatorname{grad} y_1(a)+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_{n-1}}\operatorname{grad} y_{n-1}(a)+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_n}e_n\right). \end{aligned}$$

لو كان لدينا $\frac{\partial\psi(a)}{\partial\xi_n}=0,$ لكان بالأمكان التعبير عن $\operatorname{grad} J(a)$ خطيا بواسطة $\operatorname{grad} y_1,\ldots,\operatorname{grad} y_{n-1},$ وهـذا غير صحيـح فـرضـا إذن $\frac{\partial\psi(a)}{\partial\xi_n}\neq 0.$ ينتج عن ذلك حسب نظرية التابع الضمني، ان المعادلة $J(x)=0$ او المعادلة $\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$ قابلة للحل بالنسبة لِـ ξ_n بحيث يمكن

ضمن الاحداثيات $\xi_1, \ldots, \xi_n$ وضع السطح $\{x: J(x)=0\}=$ على الشكل $(\xi_n = \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ حيث ω تابع له مشتقات مستمرة بالنسبة لكل المتغيرات المستقلة بجوار النقطة $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. لدينا خارج السطح S $J(x) \neq 0$; لنفرض مثلا ان $J(x) \geqslant 0$ « فوق » السطح S (أي من اجل $\xi_n > \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$) عندئذ يكون $J(x) < 0$ « تحت » السطح S، اي من اجل $\xi_n << \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. وذلك لأن $\text{grad } J(a) \neq 0$

لتكن $c = (c_1, \ldots, c_n)$ نقطة من السطح S، داخل الجوارين (الواردين اعلاه) للنقطة a ان القطعة المستقيمة $l = \{\xi_1 = c_1, \ldots, \xi_{n-1} = c_{n-1}, \xi_n$ $c_n + t\}$ (حيث $|t| \leqslant \varepsilon$) تخرق السطح S عند النقطة $t = 0$ من جهة اخرى فإن صورة القطعة المستقيمة l في الفضاء Y تقع على المستقيم:

$$L = \{y_1 = c_1, \ldots, y_{n-1} = c_{n-1}, y_n = \varphi(c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + t)\}.$$

زيادة على ذلك لدينا $J(x)$ $\frac{\partial y_n}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_n} = \frac{1}{B}$ بحيث ان $\frac{\partial y_n}{\partial t} > 0$ من اجل $t > 0$ et $\frac{\partial y_n}{\partial t} < 0$ من اجل $t < 0$. نلاحظ إذن عند تغير t من 4 الى 4-2 اي عندما ترسم النقطة $\xi(t) = \{c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n + t\}$ القطعة المستقيمة l « من الاعلى الى الاسفل » ان النقطة $f(\xi(t))$ الموافقة لها تنزل وفق المستقيم L حتى السطح $f(S)$ لما $t \searrow 0$ ثم تصعد وفق نفس المستقيم عندما يواصل t تناقصه. يعني ذلك ان التطبيق $y = f(x)$، في جوار للنقطة a من نمط الثنية. تحظى شواذ التطبيقات القابلة للإشتقاق (اي النقاط التي ينعدم عندما اليعقوبي في الوقت الراهن باهتمام كبير. انظر مثلا ف. 1. آرنولد: الشواذ المرنه للتطبيقات، ي. م. ن. المجلد 23، كراسة 1 (139) و « شواذ التطبيقات القابلة للمفاضلة » « مير »، موسكو، 1968، (بالروسية).

7.1 . القيم المستقرة للتوابع العددية

17.1 . القيم القصوى

ليكن تابعا عدديا معرفا في ساحة G من فضاء نظيمي X نقول عن نقطة a داخل G انها نقطة قيمة صغرى محلية (او

نسبية) للتابع $f(x)$ إذا تحققت المتراجحة $f(x) \geqslant f(a)$ اينما كان في جوار للنقطة a بطريقة مماثلة نقول عن نقطة b داخل G انها **نقطة قيمة عظمى محلية** (او نسبية) للتابع $f(x)$ إذا تحققت المتراجحة اينما كان في جوار للنقطة b تسمى نقاط القيم الصغرى المحلية والقيم العظمى المحلية **نقاط القيم القصوى المحلية.**

اذا كانت لدينا نقطة قيمة قصوى محلية، فهي في نفس الوقت نقطة قيمة قصوى محلية على طول كل مستقيم يمر بهذه النقطة. وبالتالي اذا كان التابع $f(x)$ قابلا للإشتقاق فإن مشتقة وفق اي اتجاه ينعدم عند نقطة القيمة القصوى المحلية (72.1 .) نستخلص، عندما نتذكر العبارة 72.1 (1) للمشتق وفق اتجاه، ان المساواة $f'(a)h = 0$ محققة من اجل كل نقطة a تمثل نقطة قيمة قصوى محلية للتابع $f(x)$ ومن اجل كل شعاع $h \in X$؟ بعبارة اخرى فإن المؤثر $f'(a)$ يصبح مؤثرا منعدما عند كل نقطة قيمة قصوى محلية.

$$f'(a) = 0. \qquad (1)$$

تسمى النقاط a التي تتحقق عندها العلامة (1) **نقاط مستقرة للتابع** ينعدم عند كل منها الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع وبالتالي فإن تزايد النابع لا متناهى الصفر من رتبة عالية بالنسبة الى h.

إن ذلك لا عني لحد الآن، عموما، ان هناك قيمة قصوى عند النقطة a لكن من المؤكد ان النقاط القصوى (أي نقاط القيم القصوى) المطلوبة توجد من بين النقاط المستقرة. بعد ايجاد النقاط المستقرة يجب معالجة كل منها حتى نرى هل هي نقطة قصوى ام لا.

ب. نعالج الحالة $X = R_n$، $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. إن المعادله (1) تكافى في هذه الحالة جملة n معادلة ذات n مجهولا: $a_1, \ldots, a_n$

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_n} = 0,$$

ويرّد البحث عن النقاط المستقرة الى حل هذه الجملة.

جـ. مثال تحقق النقاط المستقرة للتابع $(R_2 \to R_1)$ $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3$ جملة المعادلتين:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \equiv 3x_2 - 3x_1^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \equiv 3x_1 - 3x_2^2 = 0.$$

تقبل هذه الجملة حلين:

$$a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = 0,$$
$$a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = 1.$$

إن النقطة الاولى $a_1^{(1)} = a_2^{(1)} = 0$ ليست نقطة قيمة قصوى؛ بالإضافة الى ذلك فإنه لاتوجد نقطة قيمة قصوى على المستقيم $x_2 = 0$, لأن التابع $f(x_1, x_2)$ يكتب على هذا المستقيم على النحو $f(x_1, 0) = -x_1^3$.

بخصوص النقطة الثانية $a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = 1$ لدينا $f(x_1, x_2) = 1$ بتعويض x_1 par $1 + t_1$, x_2 par $1 + t_2$, نحصل على

$$f(x_1, x_2) - 1 = 3t_1t_2 - 3t_1^2 - 3t_2^2 - t_1^3 - t_2^3.$$

الآن ان $t_1t_2 - t_1^2 - t_2^2 = -\left(t_1 - \frac{1}{2} t_2\right)^2 - \frac{3}{4} t_2^2 < 0$ من اجل كل $t = \{t_1, t_2\} \neq 0$ والحدود من الرتبة الثالثة لا يمكن ان تغيّر شيء من اجل $|t|$ صغيرة بكفاية وبالتالي، فإن النقطة $(1, 1)$ نقطة قيمة قصوى، وهي نقطة قيمة عظمى محلية.

نشير الى ان الطريقة «الاولية» (في تحليل النقاط المستقرة) التي استخدمناها آنفا بعيدة كل البعد عن حل المسائل من هذا النوع.

سنرى في الفصل الموالي (51.2) قواعد اخرى اكثر شمولا لدراسة النقاط المستقرة لتابع متعدد المتغيرات (عددها منته).

27.1 . القيم القصوى المقيدة.

أ. **تعاريف**. هناك نوع آخر من المسائل التي تطرح بشأن التوابع العددية لمتغير متعدد الابعاد، تسمى مسائل القيم القصوى المقيدة نطرح الآن هذا النوع من المسائل. ليكن كما جاء آنفا، $(G \subset X \to R_1)$ $y = f(x)$ تابعا

عدديا قابلا للإشتقاق. نعتبر من جهة اخرى فضاء نظيميا جديدا Z وتابعا شعاعيا قابلا للإشتقاق $\varphi(x): G \to Z$ نثبّت احدى القيم $C \in Z$ التي يأخذها هذا التابع في الساحة G ان الشرط:

$$\varphi(x) = C \tag{1}$$

يعين في G « سطحا » P. تسمى نقطة $a \in G$ **نقطة قيمة صغرى محلية مقيدة للتابع** $f(x)$ من أجل الشرط (1) إذا كان $\varphi(a) = C$ وكانت المتراجحة $f(x) \geqslant f(a)$ قائمة من اجل كل نقطة x تحقق الشرط (1) وتنتمي الى جوار للنقطة a. بعبارة اخرى، تكون نقطة a من « السطح » (1) نقطة قيمة صغرى محلية مقيدة للتابع $f(x)$ إذا تحققت المتراجحة $f(x) \geqslant f(a)$ من اجل نقاط هذا « السطح » القريبة بكفاية من النقطة a. نشير الى انه من غير المطلوب ان تكون المتراجحة $f(x) \geqslant f(a)$ محققة من اجل النقاط x التي لا تنتمي الى « السطح » (1) سواء كانت هذه قريبة من النقطة a. ام لا.

نعرف نقطة قيمة عظمى مقيدة بطريقة مماثلة وذلك بتعويض فيما سبق $\geqslant$ par $\leqslant$.

تسمى نقاط القيم العظمى المقيدة والصغرى المقيدة **نقاط القيم القصوى المقيدة**.

سنجد فيما يلي شرطا لازما لوجود قيمة قصوى مقيدة. نفرض ان النقطة المعتبرة a نقطة عادية من السطح $\varphi(x) = C$ (26.1) اي انه يوجد فضاء جزئي $X_1 \subset X$ بحيث يكون المؤثر $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_1}(X_1 \to Z)$ قابلا للقلب عندئذ يكون المؤثر $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_2}$ كما رأينا اعلاه (16.1)، منعدما على فضاء جزئي $X_2 \subset X$ ويشكل مجموع X_1 و X_2 مجموعا مباشرا يمثل الفضاء X.

ب. **توطئة**. لتكن a نقطة عادية تمثل نقطة قيمة قصوى للتابع $f(x)$, لدينا عندئذ $f'(a) h_2 = 0$ مهما كان $h_2 \in X_2$.

البرهان: نفرض ان $f'(a) h_2 \neq 0$ من اجل عنصر $h_2 \in X_2$. لنثبت في هذه الحالة انه يمكن من اجل كل $\alpha \in R_1$ صغير بكفاية، ايجاد عنصر

$h_1 \in X_1$ بحيث تكون النقطة $a + \alpha h_2 + h_1$ منتمية الى « السطح» (1)
اي ان:

$$\varphi (a + \alpha h_2 + h_1) = C, \qquad (2)$$

حيث h_1 لامتناهي الصغر بالنسبة ل α نعتبر التابع التالي α و h_1 :

$$\Phi (\alpha, h_1) \equiv \varphi (a + \alpha h_2 + h_1) - C \quad (R_1 \times X_1 \to Z).$$

ينعدم هذا التابع من اجل $0 = \alpha$ و $0 = h_1$ ثم إن المؤثر:

$$\frac{\partial \Phi (0, 0)}{\partial h_1} = \varphi' (a) \frac{\partial x}{\partial h_1}\Big|_{x=a} = \frac{\partial \varphi (a)}{\partial x_1}$$

يقبل القلب فرضا. نطبق نظرية التابع الضمني 35.1 فيكون بامكاننا حل المعادلة (2) بالنسبة لـ h_1 ، ومنه تأتي العبارة:

$$h_1 = \psi (\alpha) \quad (R_1 \to X_1)$$

حيث $\psi (\alpha)$ تابع قابل للإشتقاق (55.1) لدينا، زيادة على ذلك

$$\psi' (0) = -\left[\frac{\partial \varphi (a)}{\partial x_1}\right]^{-1} \frac{\partial \Phi (0, 0)}{\partial \alpha} = -\left[\frac{\partial \varphi (a)}{\partial x_1}\right]^{-1} \varphi' (a) h_2 = 0,$$

لأن $\varphi' (a) h_2 = 0$ et $h_2 \in X_2$ وبالتالي يمثل $h_1 = \psi (\alpha)$ لامتناهي الصفر بالنسبة لـ α .

نعتبر بعد ذلك $f (a + \alpha h_2 + h_1)$ حيث يمثل h_1 الكمية $\psi (\alpha)$ التي سبق ايجادها لدينا.

$$f (a + \alpha n_2 + h_1) - f (a) = f' (a) (\alpha h_2 + h_1) + o (\alpha h_2 + h_1) =$$
$$= \alpha f' (a) h_2 + f' (a) h_1 + o (\alpha h_2 + h_1).$$

يمثل الحد الاول في الطرف الاخير تابعا عدديا خطيا لِـ α، حيث $f(\acute{a})h2$ هو المعامل الزاوي $(f' (a) h_2 \neq 0)$. اما الحدان الثاني والثالث من نفس الطرف فهما لا متناهيا الصفر بالنسبة لِـ α مع h_1 نلاحظ عندئذ ان التابع $f (x)$ لا يقبل قيمة قصوى مقيدة من اجل $\alpha = 0$ و $h_1 = h_1 (\alpha) = 0$ تنتمي النقطة $x = a + \alpha h_2 + h_1$ الى « السطح » (1) وهي قريبة بشكل كيفي من النقطة a ، مع العلم ان الفرق $f (x) - f (a)$ ذو اشارة متغيرة بتغير α .

إذن $f'(a)\,h_2 = 0$ من اجل كل $h_2 \in X_2$ ، وهو المطلوب في التوطئة

بصفة عامة، نقول عن نقطة عادية a من السطح (1) انها **نقطة مستقرة مقيدة** للتابع $f(x)$ **من اجل القيد** $\varphi(x) = C$ عندما يكون $f'(a)\,h_2 = 0$ من اجل كل $h_2 \in X_2$ حيث X_2 هو الفضاء الجزئي المنعدم للمؤثر $\varphi'(a)$. إن كل نقطة قيمة قصوى مقيدة للتابع $f(x)$ يمثل نقطة مستقرة مقيدة لهذا التابع؛ لكن ليس من الضروري ان تكون كل نقطة مستقرة مقيدة نقطة قيمة قصوى مقيدة (كما هو الحال فيما يخص القيم القصوى غير المقيدة)

جـ - نستطيع الآن صياغة شرط لازم لنقطة مستقرة مقيدة وبالتالي، لنقطة قيمة قصوى محلية مقيدة ايضا).

نظرية: اذا كانت a نقطة مستقرة مقيدة لتابع $f(x): G \subset X \to R_1$ من اجل القيد (1)، فانه توجد تابعية خطية مستمرة $\lambda(z)$ معرفة على الفضاء Z بحيث يكون لدينا:

$$f'(a)\,h = \lambda\,[\varphi'(a)\,h]. \tag{3}$$

وذلك من اجل كل $h \in X$

البرهان: نعرف التابعية $\lambda(z)$ باستخدام الدستور (3) وقابلية المؤثر $\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}$ للقلب:

$$\lambda(z) = f'(a)\left[\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1} z. \tag{4}$$

ينتج استمرار التابعية $\lambda(z)$ من استمرار المؤثرين $\left[\frac{\partial\varphi(a)}{\partial x_1}\right]^{-1}$ و $f'(a)$.

إستنادا الى التوطئة ونظرا لكون $h = h_1 + h_2$ حيث $h_1 \in X_1$ و $h_2 \in X_2$ ، لدينا $\varphi'(a)\,h_2 = 0$ و $f'(a)\,h_2 = 0$ يكفي ان نثبت العلاقة (3) بخصوص الاشعة $h_1 \in X_1$ ؛ نلاحظ ان هذه العلاقة تنتج من (4) مباشرة من اجل $h = h_1$.

د . توفر النظرية جـ، في نفس الوقت، وسيلة للبحث عن النقاط المستقرة

المقيدة لتوضيح ذلك نعتبر تابعية خطية $(Z \to R_1)$ $\lambda(z)$ غير معينة لحد الساعة ونشكل التابع:

$$F(x) = f(x) - \lambda[\varphi(x)].$$

لدينا، عند النقطة المستقرة المقيدة a التي نبعث عنها، المعادلة (3):

$$f'(a) - \lambda[\varphi'(a)] = 0,$$

يعبّر ذلك عن كون a نقطة مستقرة (في كل الساحة G) للتابعية $F(x)$ بذلك ترد مسألة البحث عن قيمة قصوى مقيدة الى البحث عن النقاط المستقرة العادية لتابع آخر مع التابعية المجهولة $\lambda(z)$.

إن كل نقاط القيم القصوى المقيدة موجودة من بين النقاط المستقرة المقيدة؛ ويتطلب الفصل بين تلك النقاط، كما هو الحال فيما يخص القيم القصوى غير المقيدة دراسة خاصة لكل نقطة مستقرة مقيدة.

1 .37 . حالة قيد عددي في فضاء ذي بعد n .

أ ليكن $X = R_n$ و $y = f(x): R_n \to R_1$ و $z = \varphi(x): R_n \to R_1$ نلاحظ في هذه الحالة ان التابعية $\lambda(z): R_1 \to R_1$ هي الضرب في عدد (مجهول في بادى الامر) λ يرد حل مسألة القيم القصوى المقيدة للتابع $f(x)$ مع الشرط:

$$\varphi(x) = C \in R_1 \tag{1}$$

الى البحث عن النقاط المستقرة للتابع العددي:

$$F(x) = f(x) - \lambda\varphi(x).$$

لحل هذه المسألة الاخيرة، نكتب المعادلة

$$F'(x) = f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0,$$

أي ضمن الاحداثيات:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} - \lambda \dfrac{\partial\varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

علينا ان نعين بفضل الجملة المؤلفة من $n+1$ معادلة (1) و (2) المجاهيل $x_1, \ldots, x_n, \lambda$. البالغ عددها $n+1$.

ب ـ مثال: نبحث عن النقاط المستقرة المقيدة للتابع:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 \quad (R_n \to R_1) \quad (0<b_1<\ldots<b_n \tag{3}$$

على سطح الكرة:

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2-1=0. \tag{4}$$

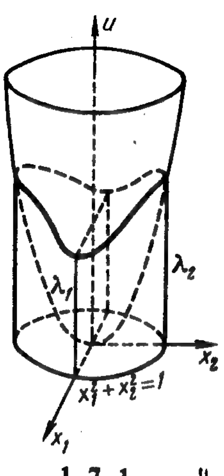
ننشيء التابع:

$$F(x)=f(x)-\lambda\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\lambda \tag{5}$$

الذي ينبغي علينا ايجاد نقاطه المستقرة العادية؛ للقيام بذلك نعدم مشتقاته الجزئية الاولى:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}=2b_j x_j-2\lambda x_j=0 \quad (j=1, \ldots, n). \tag{6}$$

إذا كان العدد λ يخالف كل الاعداد $b_1, \ldots, b_n$ فإنه ينتج من المعادلات (6) ان $x_1=\ldots=x_n=0$ وهو ما يناقض الشرط (4). لنفرض إذن ان $\lambda=b_m$ من اجل عدد صحيح $m=1, \ldots, n$ نجد حينئذ ان $x_j=0$ من اجل $(j\neq m)$ بما ان x ينتمي الى سطح الكرة (4) فإن لدينا حتما $x_m=\pm 1$ وهكذا فإن النقاط المستقرة المقيدة للتابع $f(x)$ على السطح (4) هي $\pm e_m=\pm(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. يبلغ التابع $f(x)$ قيمته الصغرى المقيدة عند النقطتين $\pm e_1$ ويبلغ قيمه العظمى المقيدة عند النقطتين $\pm e_n$. اما النقاط المستقرة المقيدة الاخرى فهي لا تمثل نقاط قيم قصوى؛ ذلك اننا إذا انزحنا انطلاق من النقطة e_m $(1<m<n)$ على طول الدائرة في المستوى المعرف بالمتغيرين x_{m-1}, x_m، فإن التابع $f(x)$ يتناقص؛ أما اذا انزحنا على طول الدائرة في المستوى المعرف بالمتغيرين x_m, x_{m+1}، فإن $f(x)$ يتزايد. يمثل الرسم 1.7.1 الحالة $n=2$



الرسم 1.7_1

1. 47 . حالة k قيدا عدديا في فضاء ذي بعد n .

أ . ليكن $X = R_n$ ، $y = f(x): G \subset R_n \to R_1$ ، $z = \varphi(x): G \to R_k$. يكتب إذن القيد $\varphi(x) = C$ على شكل k علاقة عددية:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = C_k.\end{array}\right. \quad (1)$$

تعرف التابعية الخطية $\lambda(z): R_k \to R_1$ بتعاطي k عددا $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ، وبواسطة الدستور:

$$\lambda(z) = \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_k z_k.$$

حيث

$$R_k \ni z = \{z_1, \ldots, z_k\}$$

يرد حل مسألة القيم القصوى المقيدة الى البحث عن النقاط المستقرة للتابع:

$$F(x) \equiv f(x) - \lambda[\varphi(x)] = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n).$$

تسمى الاعداد λ_i مضاريب لاغرانج (Lagrange) . علينا أن نحل المعادلة

$$F'(x) \equiv f'(x) - \lambda\varphi'(x) = 0.$$

اي بدلالة الاحداثيات جملة المعادلات

$$
(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} - \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}
$$

إذن، ردت المسألة الى حل جملة $n + k$ معادلة (1) و (2)، اما المجاهيل فيها فهي $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ البالغ عددها $n+k$.

ب ـ مثـــال: اوجـــد على المنحنـــى $y = x^2, z = x^2$ في الفضـــاء $R_3(x, y, z)$ النقطة $a = (x, y, z)$ التي تبعد عن النقطة $c = (0, 0, 1)$ باصغر مسافة ممكنة. علينا ان نجد القيمة الصغرى للتابع:

$$
|c - a|^2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2
$$

المقيدة بالشرطين:

$$
\varphi_1(x, y, z) \equiv y - x^2 = 0,
$$
$$
\varphi_2(x, y, z) \equiv z - x^2 = 0.
$$

يجب إذن انشاء التابع

$$
F(x, y, z) \equiv |c - a|^2 - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2 = \\ = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - \lambda_1(y - x^2) - \lambda_2(z - x^2)
$$

واعدام مشتقاته الجزئية بالنسبة x, y, z :

$$
\frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + 2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x = 0,
$$
$$
\frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y - \lambda_1 = 0,
$$
$$
\frac{\partial F}{\partial z} \equiv 2(z - 1) - \lambda_2 = 0.
$$

ومنه يأتي $\lambda_1 = 2y$ و $\lambda_2 = 2(z - 1)$ ؛ يبقى ان نحل الجملة التالية:

$$
y - x^2 = 0,
$$
$$
z - x^2 = 0,
$$
$$
2x + 4xy + 4(z - 1)x = 0.
$$

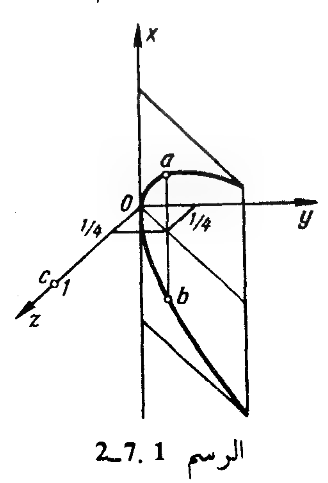
هناك حل يأتي مباشرة وهو: $x = y = z = 0$ اذا كان $x \neq 0$, نستطيع تعويض المعادلة الثالثة ب:

$$
1 + 2y + 2(z - 1) = 0.
$$

تعطى المعادلتان الاولى والثانية $y = z$ ومنه:

$$4y = 1, \quad y = \frac{1}{4}, \quad z = \frac{1}{4}, \quad x = \pm \frac{1}{2}.$$

إن مربع المسافة بين النقطة $c = (0, 0, 1)$ وكل من النقطتين b و المحصل عليهما تيناوي $1 > \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$ إذن فإن التابع $f(x)$ يبلغ قيمته الصغرى المطلوبة عند هاتين النقطتين؛ اما النقطة $(0, 0, 0)$ فهي نقطة القيمة العظمى المحلية للمسافة المعتبرة (الرسم 1 .7ـ2).



الرسم 1 .7ـ2

1 .8 . المعادلات التفاضلية (نظريات محلية)

كنا قدمنا (ي 13ـ53) النظرية الاساسية الخاصة بوجود ووحدانية حل معادلة تفاضلية عادية $y'(t) = \Phi(t, y)$، مع الشرط الابتدائي $y(t_0) = y_0$ وبعض الشروط الاخرى على التابع $\Phi(t, y)$. نعود هنا الى هذه النظرية لتوضيح ارتباط الحل بوسيطات محتملة. تستند هذه الدراسة على النظرية 1 .35 حول التابع الضمني والنظرية 1 .55 حول مشتق تابع ضمني.

1 .18 . لتغطية حاجيات البرهان على النظرية الخاصة باستمرار الحل بالنسبة للوسيط الذي سوف نعتبر، يكفي ان يتوفر لدينا مبدأ النقطة الصامدة (او الثانية) (ي 13ـ22).

أ ـ مبدأ النقطة الصامدة: ليكن M فضاء متريا تاما $A : M \to M$ تطبيقا يحقق الشرط:

$$\rho(A(u), A(v)) \leqslant \theta\rho(u, v) \text{ و } u, v \in M$$

حيث θ («ثابت التقلص») عدد ثابت يحقق $0 \leqslant \theta < 1$ توجد عندئذ نقطة (وحيدة) صامدة للتطبيق A ، اي نقطة $u_A \in M$ بحيث:

$$A(u_A) = u_A.$$

إذا كان لدينا تطبيقان $A(u)$ و $B(u)$ بنفس ثابت التقلص θ فإن المسافة بين النقطتين الصامدتين لهذين التطبيقين تحقق المتراجحة:

$$\rho(u_A, u_B) \leqslant \frac{1}{1-\theta} \sup_{u \in M} \rho[A(u), B(u)].$$

لدينا إذن: إذا ارتبط تطبيق $A = A_\lambda (M \to M)$ بوسيط λ يتجول في فضاء متري Λ ، وإذا كان هذا الارتباط مستمرا عند $\lambda = \lambda_0$ اي إذا كان:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{u \in M} \rho[A_\lambda(u), A_{\lambda_0}(u)] = 0, \tag{1}$$

مع العلم ان ثابت التقلص θ يبقى هو ذاته من اجل كل المؤثرات A_λ ، فإن النقطة الصامدة u_λ للمؤثر A_λ مستمرة بالنسبة لـ λ عند $\lambda = \lambda_0$ ، اي ان

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} u_\lambda = u_{\lambda_0}. \tag{2}$$

ب ـ ليكن Λ فضاء متريا تاما و Y فضاء شعاعيا نظيميا تاما. نرمز ب Λ_ρ (Y_r) على التوالي للكرة ذات نصف القطر ρ (r) على التوالي) المتمركزة في النقطة المثبتة $\lambda_0 \in \Lambda$ ($y_0 \in Y$) على التوالي)، وبـ T_h للمجال $|t - t_0| \leqslant h$ من المستقيم الحقيقي.

نظرية: ليكن $\Phi(t, y, \lambda): T_h \times Y_r \times \Lambda_\rho \to Y$ تابعا مستمرا محددا بثابت C ويحقق شرط ليبشيتز

$$|\Phi(t, y_1, \lambda) - \Phi(t, y_2, \lambda)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|$$

؛ ثم ليكن $\varphi(\lambda): \Lambda_\rho \to Y$ تابعا مستمرا بحيث $\varphi(\lambda_0) = y_0$. يوجد عندئذ عددان $\sigma \leqslant \rho$, $\delta \leqslant h$, وتابع $y(t, \lambda): T_\delta \times \Lambda_\sigma \to Y_r$ مستمر بالنسبة لِـ λ

وقابل للاشتقاق بالنسبة لـ t يحقق المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy(t, \lambda)}{dt} = \Phi(t, y(t, \lambda), \lambda), \quad \{t, \lambda\} \in T_\delta \times \Lambda_\sigma \tag{3}$$

والشرط الابتدائي

$$y(t_0, \lambda) = \varphi(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_\sigma. \tag{4}$$

البرهان: نرمز بِـM_δ، من اجل $h \geqslant \delta$ ، للفضاء المتري المؤلف من التوابع المستمرة $u(t): T_\delta \to Y_r$ والمزود بالمسافة المعتادة:

$$\rho(u_1(t), u_2(t)) = \sup_{T_\delta} |u_1(t) - u_2(t)|.$$

إن الفضاء M_δ تام (ي 12ـ32 ـ س). نعتبر على M_δ المؤثر

$$A_\lambda(u(t)) \equiv \varphi(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, u(\tau), \lambda)\, d\tau. \tag{5}$$

انه يحول التوابع $u(t) \in M_\delta$ الى توابع $T_\delta \to Y$ التي تأخذ قيما عموما في الكرة Y_r الآن ان لدينا، من اجل كل قيم $\lambda \in \Lambda_\sigma$:

$$|A_\lambda(u(t)) - y_0| \leqslant |A_\lambda(u(t)) - \varphi(\lambda)| + |\varphi(\lambda) - y_0| =$$
$$= \left| \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, u(\tau), \lambda)\, d\tau \right| + |\varphi(\lambda) - y_0| \leqslant C\delta + |\varphi(\lambda) - y_0|,$$

$$|A_\lambda(u_1(t)) - A_\lambda(u_2(t))| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\Phi(\tau, u_1(\tau), \lambda) - \Phi(\tau, u_2(\tau), \lambda)|\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant L \sup_{T_\delta} |u_1(\tau) - u_2(\tau)|\, \delta,$$

إذا اخترنا الآن العددين $\delta \leqslant h \text{ et } \sigma \leqslant \rho$ صغيرين بكفاية بحيث يتحقق

$$C\delta \leqslant r/2,$$
$$|\varphi(\lambda) - y_0| \leqslant r/2 \quad \text{pour} \quad \lambda \in \Lambda_\sigma,$$
$$L\delta \leqslant \theta < 1,$$

فإننا نجد:

$$|A_\lambda(u(t)) - y_0| \leqslant r,$$
$$\rho[A_\lambda(u_1(t)), A_\lambda(u_2(t))] \leqslant \theta\rho[u_1(t), u_2(t)].$$

وهكذا، بعد اختيار δ و σ، يطبق المؤثر $A_\lambda(u(t))$، من اجل كل $\lambda \in \Lambda_\sigma$ مثبت، الفضاء M_δ في نفسه مع الملاحظة ان هذا المؤثر مقلص في M_δ ينتج من الفرع أ ان المؤثر A_λ يقبل نقطة صامدة في الفضاء $M\delta$، وهذا يكافيء، في حالتنا هذه، وجود تابع $y(t, \lambda)$ يحقق

$$y(t, \lambda) = \varphi(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau. \tag{6}$$

ينتج من هذه العلاقة ان التابع $y(t, \lambda)$ يقبل الاشتقاق بالنسبة لـ t، من اجل λ مثبت *(P-36.125)*؛ نرى، بفضل الاشتقاق، ان التابع $y(t, \lambda)$ يحقق العلاقة (3). إذن التعويض $t = t_0$ في (6) يؤدي الى الشرط الابتدائي (4).

لإثبات استمرار الحل المحصل عليه بالنسبة لـ λ اي لإثبات قيام العلاقة:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{t \in T_\delta} |y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)| = 0$$

(من اجل λ_0 مثبت)، يكفي التأكد من (1) من اجل المؤثر A_λ ليكن $u(t) \in M_\delta$. عندئذ:

$$A_\lambda(u(t)) - A_{\lambda_0}(u(t)) =$$

$$= \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0) + \int_{t}^{t_0} [\Phi(\tau, u(\tau), \lambda) - \Phi(\tau, u(\tau), \lambda_0)]\, d\tau. \tag{7}$$

نبحث من اجل $\varepsilon > 0$ معطى عن $\eta > 0$ (حيث $\sigma \leqslant \eta$) بحيث:

$$|\Phi(t, u, \lambda) - \Phi(t, u, \lambda_0)| < \varepsilon,$$
$$|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)| < \varepsilon$$

وهذا من اجل $\rho(\lambda, \lambda_0) < \eta$ ومن اجل كل $t \in T_\delta,\ u \in Y_r$. بعد ذلك، ينتج من (7) ان:

$$|A_\lambda(u(t)) - A_{\lambda_0}(u(t))| \leqslant \varepsilon + \delta\varepsilon = \varepsilon(\delta + 1).$$

إن هذه المتراجحة قائمة من اجل كل تابع $u(t) \in M_\delta$، ولذا

$$\sup_{u(t) \in M_\delta} |A_\lambda(u(t)) - A_{\lambda_0}(u(t))| \leqslant \varepsilon(\delta + 1),$$

ومنه:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{u(t) \in M_\delta} |A_\lambda(u(t)) - A_{\lambda_0}(u(t))| = 0,$$

وهو المطلوب؛ انتهى برهان النظرية.

1 .28 . ان حل المعادلة 18.1 (1) مع الشرط 181 (2) المحصل عليه في 18.1 وحيد بالمفهـــــوم التالي: ليكن $y_1(t, \lambda): T_{\delta_1} \times \Lambda_{\sigma_1} \to Y_r$ و $y_2(t, \lambda): T_{\delta_2} \times \Lambda_{\sigma_2} \to Y_r$ et حلين يحققان الشرط $y_1(t_0, \lambda) = y_2(t_0, \lambda) = \varphi(\lambda)$ ؛ عندئذ لدينا، من اجل $\{t, \lambda\} \in T_\delta \times \Lambda_\sigma$

حيث

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2), \ \sigma = \min(\sigma_1, \sigma_2) \ on \ a \ y_1(t, \lambda)$$

لإثبات ذلك، نشير أولا الى ان المتطابقة 18.1 (3) القائمة من اجل كل النقاط $\{t, \lambda\} \in T_\delta \times \Lambda_\sigma$ قائمة ايضا في كل ساحة $T\sigma \times \Lambda\sigma$ ، $T_{\delta'} \times \Lambda_{\sigma'}$ حيث $\delta' \leqslant \delta, \sigma' \leqslant \sigma$ ولذا فإن اقتصاد التابع $y(t, \lambda)$ على هذه الساحة الاخيرة هو النقطة الصامدة للمؤثر الموافق لها $A_\lambda \equiv A_\lambda^{(\delta')}$ في الفضاء $M_{\delta'}$. إذا كان $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ فإن المؤثر $A_\lambda^{(\delta)}$ يطبق الفضاء M_δ في نفسه، اذن واستنادا الى ماسبق ان رأينا، فإن هذا المؤثر يقبل نقطة صامدة $y^{(\delta)}(t, \lambda)$. في M_δ . ثم إن اقتصادي التابعين $y_1(t, \lambda)$ و $y_2(t, \lambda)$ هما ايضا نقطتان صامدتان للمؤثر $A_\lambda^{(\delta)}$ ؛ نظرا لوحدانية النقطة الصامدة لمؤثر مقلص نستنتج المساواة $y(t, \lambda) = y_1(t, \lambda) = y_2(t, \lambda)$ ؛ $(\{t, \lambda\} \in T_\delta \times \Lambda_\sigma)$، وهو المطلوب.

1 .38 . نظرية. نفرض، زيادة على افتراض 18.1 ـب، ان التابع $\Phi(t, y, \lambda)$ يحقق في $T_h \times Y_r \times \Lambda_\rho$ شرط ليبشيتز المدعم:

$$|\Phi(t, y_1, \lambda_1) - \Phi(t, y_2, \lambda_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| + B\rho(\lambda_1, \lambda_2),$$

وان التابع $\varphi(\lambda)$ يحقق في Λ_ρ شرط ليبشيتز:

$$|\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)| \leqslant A\rho(\lambda_1, \lambda_2).$$

عندئذ يحقق الحل $y(t, \lambda)$ ، من اجل $\{t, \lambda\} \in T_\delta \times \Lambda_\sigma$، شرط ليتشيتز بالنسبة لـ λ:

$$|y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)| \leqslant C\rho(\lambda_1, \lambda_2), \quad C \leqslant \frac{A + B\delta}{1 - L\delta}.$$

البرهان: بوضع في 18.1 (6): $\lambda = \lambda_1$ و $\lambda = \lambda_2$ وبطرح العلاقتين المحصل عليهما الواحدة من الاخرى نجد:

$$|y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)| \leqslant |\varphi(\lambda_1) - \varphi(\lambda_2)| +$$
$$+ \left| \int_{t_0}^{t} [\Phi(\tau, y(\tau, \lambda_1), \lambda_1) - \Phi(\tau, y(\tau, \lambda_2), \lambda_2)]\, d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant A\rho(\lambda_1, \lambda_2) + \int_{t_0}^{t} [L\,|y(\tau, \lambda_1) - y(\tau, \lambda_2)| + B\rho(\lambda_1, \lambda_2)]\, d\tau \leqslant$$
$$\leqslant (A + B\delta)\,\rho(\lambda_1, \lambda_2) + L\delta \sup_{T_\delta} |y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)|,$$

ومنه يأتي:

$$\sup_{T_\delta} |y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)| \leqslant$$
$$\leqslant (A + B\delta)\,\rho(\lambda_1, \lambda_2) + L\delta \sup_{T_\delta} |y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)|;$$

وبالتالي، إذا كان $L\delta < 1$ فإن :

$$\sup_{T_\delta} |y(t, \lambda_1) - y(t, \lambda_2)| \leqslant \frac{A + B\delta}{1 - L\delta}\,\rho(\lambda_1, \lambda_2),$$

وهو المطلوب.

48.1 . نهتم فيما يلي بقابلية الحل $y(t, \lambda)$ للإشتقاق بالنسبة للوسيط λ ؛ يجب بطبيعة الحال، افتراض ان الفضاء Λ الذي ينتمي اليه الوسيط λ فضاء متري ونظيمي ايضا، وان التابع $\Phi(t, y, \lambda)$ يقبل الاشتقاق بالنسبة لِـ λ نبدأ بتدعيم نظرية النقطة الصامدة بشكل مناسب.

أ ـ ليكن X و Λ فضاءين نظيميين تامين و $M \subset X$ و $\Delta \subset \Lambda$ كرتين مغلقتين. ليكن $A_\lambda(u): M \times \Delta \to M$ تطبيقا يقبل، من اجل كل $\lambda \in \Delta$ نقطة صامدة وحيدة $u = y(\lambda) \in M$، بحيث $A_\lambda(y) = y$. نفرض ان التطبيق $A_\lambda(u)$ قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ u عند النقطة $u = y(\lambda)$ وان المؤثر $E - \frac{\partial A_\lambda(y)}{\partial u}$ قابل للقلب.

نظرية: نتخذ الافتراضات السابقة. إن قابلية التابع $A_\lambda(u)$ للإشتقاق بالنسبة للفضاء $X \times \Lambda$ تستلزم قابلية التابع $y(\lambda)$ للإشتقاق.

البرهان: نثبت $\lambda = \lambda_1 \in \Delta$. إن المعادلة

$$\Phi(u, \lambda) \equiv u - A_\lambda(u) = 0$$

محققة فرضا، من اجل $\lambda = \lambda_1$ ، $u = y(\lambda_1)$ إن للتابع $\Phi(u, \lambda)$ مشتقا بالنسبة لـ u هو:

$$\frac{\partial \Phi(u, \lambda)}{\partial u} = E - \frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u}$$

الذي يمثل مؤثرا قابلا للقلب. وهكذا نجد انفسنا ضمن فرض النظرية الخاصة بالتابع الضمني 35.1 ؛ بتطبيقها نرى انه يوجد حل $u = u(\lambda)$ للمعادلة (2) يطابق $y(\lambda_1)$ من اجل $\lambda = \lambda_1$. بما ان النقطة الصامدة وحيدة فإن $y(\lambda) \equiv u(\lambda)$. إن التابع $y(\lambda)$ مستمر حسب 35.1 ؛ ثم إن قابلية $A_\lambda(u)$ للإشتقاق يستلزم قابلية $y(\lambda)$ للإشتقاق (55.1)، وهو المطلوب.

إذا كان المشتقان $\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u}$ و $\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial \lambda}$ مستمرين فإن $y'(\lambda)$ مستمر ايضا حسب 55.1 ـ ب.

ب ـ نشير الى ان المتراجحة: $\left\|\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u}\right\| < 1$ تمثل شرطا كافيا لقابلية المؤثر $E - \frac{\partial A_\lambda(y)}{\partial u}$ للقلب (ي 12 28).

58.1 نطبق القضية التي برهنا عليها على المعادلة التفاضلية العادية 18.1 (3) ذات الوسيط λ :

$$\frac{dy(t, \lambda)}{dt} = \Phi(t, y(t, \lambda), \lambda) \qquad (1)$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(t_0, \lambda) = \varphi(\lambda). \qquad (2)$$

بخصوص التابع $\Phi(t, y, \lambda)$ ، نفرض انه معرف ومستمر في الساحة $T_h \times Y_r \times \Lambda_\rho$ (كما هو الحال في 18.1 ـ ب) وانه يحقق شرطا ليبشيتز بالنسبة لـ y :

$$|\Phi(t, y_1, \lambda) - \Phi(t, y_2, \lambda)| \leqslant L\,|y_1 - y_2|$$

وان قيمة تنتمي الى الكرة Y_r من الفضاء النظيمي Y ؛ نفرض ان التابع $\varphi(\lambda)$ مستمر في Λ_ρ.

رأينا، ضمن 18.1 ـ ب، في الفضاء $M = M_\delta$ المؤلف من كل التوابع المستمرة $u = u(t): T_\delta \to Y_r$ (وهو كرة مغلقة من الفضاء $Y(T_\delta)$ المؤلف من التوابع المستمرة $u(t): T_\delta \to Y$) ان المؤثر:

$$A_\lambda(u) \equiv \varphi(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, u(\tau), \lambda)\, d\tau \qquad (3)$$

يقبل نقطة صامدة وحيدة $y = y(t, \lambda)$ عندما يكون δ صغيرا بكفاية تمثل هذه النقطة الصامدة حل المعادلة (1) مع الشرط (2). إذا كان المؤثر تابعاً قابلا للإشتقاق بالنسبة لِـ u و λ فإن الحل $y(t, \lambda)$، حسب 48.1 أ، يكون تابعا قابلا للإشتقاق بالنسبة لِـ λ. يبقى إذن ايجاد الشروط التي تضمن قابلية المؤثر (3) للإشتقاق بالنسبة لِـ u و λ. لنثبت انه يمكن اختيار تلك الشروط كما يلي:

(1) التابع $\Phi(t, y, \lambda): T_h \times Y_r \times \Lambda_\rho \to Y$ له مشتق مستمر بالنسبة لِـ u.

(2) التابع $\Phi(t, y, \lambda)$ له مشتق مستمر بالنسبة لِـ λ.

(3) التابع $\varphi(\lambda): \Lambda_\rho \to Y$ له مشتق مستمر بالنسبة λ .

نظرية. نتخذ الافتراضات 18.1 ـ ب والشروط (1)، (2)، (3) السابقة عندئذ يكون للحل $y(t, \lambda)$ مشتق مستمر بالنسبة λ .

البرهان. استنادا الى الافتراض 84.1 أ ـ ب والى افتراضنا يتبين ان المؤثر $A_\lambda(u)$ له مشتق مستمر بالنسبةل u ، لدينا:

$$\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi(\tau, u(\tau), \lambda)}{\partial u}\, d\tau.$$

من الواضح، من اجل δ صغير بكفاية، ان:

$$\left\| \frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial u} \right\| \leqslant \sup_{\tau, u, \lambda} \left\| \frac{\partial \Phi(\tau, u, \lambda)}{\partial u} \right\| \cdot \delta < 1.$$

بالاعتماد على 84.1 ـ د، نرى ان المؤثر يقبل مشتقا مستمرا بالنسبة لـ λ:

$$\frac{\partial A_\lambda(u)}{\partial\lambda} = \varphi'(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\Phi(\tau, u(\tau), \lambda)}{\partial\lambda} d\tau.$$

ثم إن المؤثر $A_\lambda(u)$ يقبل الاشتقاق في $\Lambda_\rho \times M_\delta$ بالنسبة لكل الفضاء $\Lambda \times Y(T_\delta)$ وذلك حسب 74.1 أ ـ ب. بتطبيق 48.1 أ نرى ان الحل $y(t, \lambda)$ له مشتق، مستمر، بالنسبة لِ λ. انتهى البرهان.

68.1 ـ أ. يمكن ايجاد مشتق الحل $y(t, \lambda)$ بالنسبة لِ λ للمعادلة 58.1 (1) مع الشرط 58.1 (2) بالإشتقاق المباشر للمعادلة المؤثرية 18.1 (6):

$$y(t, \lambda) = \varphi(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau.$$

نحصل عندئذ على:

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial\lambda} = \varphi'(\lambda) + \int_{t_0}^{t} \left[\frac{\partial\Phi(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)}{\partial y} \frac{\partial y(\tau, \lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Phi(\tau, y(\tau, \lambda), \lambda)}{\partial\lambda} \right] d\tau \quad (1)$$

ينتج عن ذلك ان التابع $z(t, \lambda) = \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial\lambda}$ يحقق المعادلة الخطية التفاضلية ذات الوسيط λ:

$$\frac{dz(t, \lambda)}{dt} = \frac{\partial\Phi(t, y(t, \lambda), \lambda)}{\partial y} z(t, \lambda) + \frac{\partial\Phi(t, y(t, \lambda), \lambda)}{\partial\lambda} \quad (2)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$z(t_0, \lambda) = \varphi'(\lambda). \quad (3)$$

ب. نعتبر هنا بعض الحالات الخاصة البسيطة. نفرض ان $\Lambda = Y$ و $\varphi(\lambda) = \lambda$ و $\Phi(t, y, \lambda) \equiv \Phi(t, y)$ لايتعلق بـ λ. يتعلق الامر في هذه الحالة بقابلية التابع $y(t, \lambda)$ للإشتقاق بالنسبة لقيمتها الابتدائية λ. نرى، من اجل تابع $\Phi(t, y)$ له مشتقان بالنسبة لِy و t مستمران، ان الحل $y(t, \lambda)$ له مشتق مستمر بالنسبة لِ λ. يعطى الدستور 68.1 (1):

$$\frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial\lambda} = E + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial\Phi(\tau, y(\tau, \lambda))}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(\tau, \lambda)}{\partial\lambda} d\tau.$$

بصفة خاصة، من اجل δ صغير بكفاية و $|t - t_0| < \delta$ ؛ فإن المؤثر $\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}$ قابل للقلب. ينتج من ذلك ومن 65.1 أ ـ ب ، من اجل $t - t_0$ صغير بكفاية، ان التطبيق $y(t, \lambda)$ تفاتشاكل من جوار $U \subset Y$ للنقطة λ على جوار V للنقطة $y(t, \lambda)$ ؛ نرى، مثلا ان النقطة $y(t, \lambda)$ تقبل جوارا، V يمر بكل نقطة منه منحنى تكاملي ينطلق من الجوار U . توافق كل ازاحة $\Delta\lambda$ للنقطة الابتدائية λ في الجوار U لازاحة:

$$\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}\Delta\lambda + o(\Delta\lambda) = \Delta\lambda + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi(\tau, y(\tau,\lambda))}{\partial y}\frac{\partial y(\tau,\lambda)}{\partial \lambda} d\tau + o(\Delta\lambda) =$$

$$= \Delta\lambda + \frac{\partial \Phi(t_0,\lambda)}{\partial y}\Delta\lambda\Delta t + o(\Delta t)\,\Delta\lambda + o(\Delta\lambda)$$

للحل $y(t, \lambda)$. تطابق الازاحة الاخيرة، بتقدير لا متناهيات في الصفر من رتب عالية، مجموع الازاحة $\Delta\lambda$ والكمية $\frac{\partial \Phi(t_0,\lambda)}{\partial y}\Delta\lambda\,\Delta t$. يحقق المشتق $\frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda} = z(t, \lambda)$ المعادلة الخطية المتجانسة التي تستنتج من (2):

$$\frac{dz(t,\lambda)}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t,\lambda))}{\partial y} z(t,\lambda) \quad (4)$$

مع الشرط الابتدائي:

$$z(t_0, \lambda) = E. \quad (5)$$

إذا كان $z(t, \lambda)$ تابعا عدديا فإن المسألة (4) ـ (5) تقبل الحل التالي الذي يلاحظ مباشرة:

$$z(t,\lambda) = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{\partial \Phi(\tau, y(\tau,\lambda))}{\partial y} d\tau} . \quad (3)$$

جـ نفرض ان $y_0 = \varphi(\lambda)$ لايتعلق بـ λ بحيث لايرد الوسيط λ في الطرف الثاني من المعادلة 58.1 (1). بعد هذا، يحقق التابع $z(t,\lambda) = \frac{\partial y(t,\lambda)}{\partial \lambda}$ المعادلة 68.1 (2) مع الشرط الابتدائي:

$$z(t_0, \lambda) = 0. \quad (4)$$

78.1 . الجملة الديناميكية المحلية: يفسر كل حل $y = y(t)$ لمعادلة $\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y)$ بطبيعة الحال، على انه منحنى في الفضاء $T \times Y$ لكننا نستطيع

ايضا النظر اليه كمنحنى في الفضاء Y باعتبار t وسيطا. نستنتج هذا المنحنى الاخير $y(t)$ من المنحنى $\{t, y(t)\} \in T \times Y$ بإسقاط $\{t, y(t)\}$ على الفضاء Y. إذا اعتبرنا المتغير t ممثلا للزمن فإن الحل $y(t)$ يمثل قانون حركة نقطة متحركة في الفضاء Y بالسرعة $\Phi(t, y)$. لهذا السبب، سميت مجموعة الحلول $y = y(t)$ جملة ديناميكية او، باعتبار الوضع المحلي، جملة ديناميكية محلية. تصبح المسألة اكثر بساطة إذا لم يتعلق $\Phi(t, y)$ بـ t، بحيث تكون المعادلة الابتدائية ذات الشكل:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \quad (G \subset Y \to Y). \tag{1}$$

نفرض فيما يلي ان التابع $\Phi(y)$ له مشتق مستمر. يمكن، في الحالة المعتبرة النظر الى الجملة الديناميكية المحلية بمثابة حركة وسط مستمر، سرعة كل نقطة منه معطاة بالشعاع $\Phi(y)$ الذي لا يتعلق بالزمن. تسمى المنحنيات في الفضاء Y الموافقة للحلول $y = y(t)$ مسارات الجملة. يستنتج من 18.1 و 28.1 ان كل مسارين اما ان يكونا متطابقين تماماً(*) واما ان يكونا غير متقاطعين. إذا كان $\Phi(y_0) = 0$ من اجل عنصر y_0 فإن $y \equiv y_0$ ثابتا حل بديهي للمعادلة (1)؛ نلاحظ ان المسار الموافق له ينحل عند نقطة واحدة. ليكن $\Phi(y_0) = z_0 \neq 0$؛ لدينا بسبب الاستمرار $\Phi(y) \neq 0$ في جوار للنقطة y_0؛ ليست هناك نقطة ثابتة (غير متحركة) في هذا الجوار، لأن كل النقاط تتحرك بالفعل، مع الزمن، على مساراتها. نفسر حالة خاصة لجملة من هذا النوع كحركة نقاط جسم صلب يخضع لإنسحاب منتظم الآن انه يتبين بأن الحالة العامة تستنتج من الحال الخاصة السابقة بواسطة تفاتشاكل في الفضاء Y يحول الجملة الديناميكية بجوار النقطة y_0 الى جماعة قطع مستقيمة متوازنة ترسم بسرعة ثابتة. لرؤية ذلك، نفرض ان $y_0 = 0$ (وهو ما يمكن دوما الحصول عليه بواسطة

(*) إذا كان $Y \ni p = y_2(t_1) = y_1(t_1)$ فإن $y_1(t_1+t) = y_2(t_2+t)$ لان الطرفين في المساواة الاخيرة بوصفهما تابعين لـ t، يحققان نفس المعادلة $\frac{dy}{dt} = \Phi(y)$ مع الشرط الابتدائي المشترك $y(0) = p$.

انسحاب) وانه توجد تابعية خطية مستمرة $f(y): Y \to R_1$ بحيث $f(z_0) \neq 0$ (عندما يكون Y فضاء هيلبرتياً يمكن وضع $f(y) = (y, z_0)$؛ اما في فضاء باناخي فإن وجود مثل هذه التابعية مضمون بفضل نظرية هان ـ باناخ (Hahn - Banach) راجع مثلا ج.أ شيلوف: التحليل الرياضي، دروس خاصة، ط.ج، موسكو، 1961، ملحق 2 § ص. 426.
نعتبر الفضاء الجزئي $H = \{h \in Y: f(h) = 0\}$؛ انه مغلق ولا يحوى z_0 ليكن بعد ذلك، L فضاء جزئيا وحيد البعد مولداً عن الشعاع z_0 نؤكد على ان الفضاء Y هو المجموع المباشر لـ L وH. بالفعل،
من اجل كل $y \in Y$ و $h = y - \frac{f(y)z_0}{f(z_0)}$، لدينا $f(h)=0$ بحيث أن: $h \in H$ و $y=h+z$ حيث $z = \frac{f(y)z_0}{f(z_0)} \in L$، وبما أن لـ$L$ وH نقطة مشتركة وحيدة O فإن هذا التفكيك وحيد، نعتبر في الفضاء الجزئي H الكرة $H_\rho = \{h \in H: |h| \leqslant \rho\}$ وفي الفضاء الجزئي L القطعة المستقيمة $T_\delta = \{tz_0: |t| \leqslant \delta\}$. نصل كل ثنائية $T_\delta \times H_\rho$ ∋ (t, h) بالنقطة $y(t, h)$ التي تمثل حل المعادلة (1) من اجل القيمة الابتدائية $y(0, h) = h$ إذا كان δ و ρ صغيرين بكفاية فإن الكمية $y(t, h)$ معرفة حسب 18.1 ـ ب. لنثبت ان التطبيق $(t, h) \to y(t, h)$ هو التفاتشاكل المطلوب. لدينا $y(t, h) = \eta(t, h) + \lambda(t, h) z_0$ حيث $\eta(t, h) \in H$ و$\lambda(t, h) \in R_1$.

نلاحظ ان التابع $y(t, h)$ مستمر بالنسبة للمجموعة (t, h) (لأننا اثبتنا، في 18.1 ـ ب، استمرار التابع $y(t, h)$ بالنسبة لـ h في الفضاء المؤلف من التوابع $y(t, h)$ والمزود بمسافة الحد الاعلى بالنسبة لـ t)؛ ينتج من ذلك الاستمرار بالنسبة لـ (t, h) للمركبتين $\eta(t, h)$ و $\lambda(t, h)$. يقبل التابع $y(t, h)$ مشتقا بالنسبة لـ t يساوي $\Phi(y)$ حسب المعادلة (1)؛ وبالتالي فإن التابعين $\eta(t, h)$ و $\lambda(t, h)$ يقبلان ايضا الاشتقاق بالنسبة لـ t؛ وهذان المشتقان مساويان لمركبتي $\Phi(y)$ الموافقتين لها: إن هذين المشتقين مستمرين بطبيعة الحال؛ مع Φ يأخذ هذان المشتقان من اجل

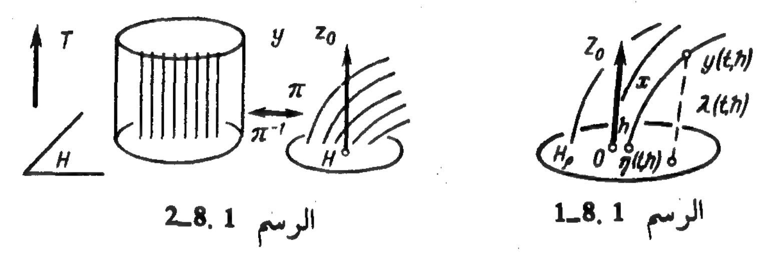
$t = 0, h = 0$ بوصفهما مركبتي الشعاع $z_0 = \Phi(0)$ ، القيمتين 0 و 1 على التوالي. ثم إن التابع $y(t, h)$ يقبل، بدوره مشتقا بالنسبة لـ h (68.1 ب) مستمـــرا بـــالنسبـــة لـ (t, h) . ينتـــج مـــن المساواة $y(0, h) = h$ ان $\frac{\partial \eta(0, h)}{\partial h} = \frac{\partial y(0, h)}{\partial h} = E_H$ (يرمز للمؤثر المطابق في H). إن التابع $y(t, h)$ يقبل الاشتقاق بالنسبة لِ (t, h) حسب 84.1 ؟ يكتب هذا المشتق كمصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \lambda(t, h)}{\partial t} & \frac{\partial \lambda(t, h)}{\partial h} \\ \frac{\partial \eta(t, h)}{\partial t} & \frac{\partial \eta(t, h)}{\partial h} \end{matrix} \right\|.$$

تأخذ هذه المصفوفة، من اجل $t = 0$ و $h = 0$ ، الشكل:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial \eta(0, 0)}{\partial t} & E_H \end{matrix} \right\|$$

وهي قابلة للقلب حسب 41.1 ـ ع. ينتج الآن من 65.1 ـ ب، ان التطبيق $(t, h) \to y(t, h)$ يمثل تفاتشاكلا من جوار للصفر في الفضاء $T \times H$ على جواد للصفر في الفضاء Y . يحوّل التفاتشاكل المقلوب π^{-1} مسارات الجملة الديناميكية المحلية المنشأة حسب المعادلة (1) الى قطع «شاقولية» يمثل فيها t الاحداثية الرئيسية بحيث تُرسم هذه القطع، من وجهة النظر الديناميكية، بسرعة ثابتة (تساوي 1)؟ وهو ما ذهبنا اليه.



الرسم 2.8.1 الرسم 1.8.1

88.1 . التكاملات الاولى. ا. نعتبر مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \qquad (1)$$

في جواد V لنقطة $y_0 \in Y$ بحيث $\Phi(y_0) \neq 0$. يسمى كل تابع عددي $z(y)$ معرف ومستمر وله مشتق مستمر $z'(y)$ في V **تكامل اولا**

للمعادلة (1) [على وجه التحديد : تكاملا اولا محليا] اذا كان (y) 2 ثابتا على كل مسار لهذه المعادلة. باستخدام التفاتشاكل π المنشأ في 78.1 ؟ يمكن الحصول على وصف متميز لكل التكاملات الاولى للمعادلة (1). بصفة خاصة فإن التفاتشاكل π^{-1} يحوّل كل تكامل اول $z(y)$ الى تابع $z(t, h): T_\delta \times H_\rho \to R_1$ ثابت على القطع المستقيمة الشاقولية للمجموعة $T_\delta \times H_\rho$ ويقبل، هو ايضا، مشتقا مستمر (بالسنبة للمتغير (t, h)). يُعَيَّن مثل هذا التابع بطريقة وحيدة بواسطة قيمة من اجل $t = 0, z(0, h) = \psi(h)$ حيث $\psi(h): H_\rho \to R_1$ تابع قابل للإشتقاق باستمرار بالنسبة لِـ $h \in H$. وبالعكس اذا كان $\psi(h): H_\rho \to R_1$ تابعا قابلا للاشتقاق باستمرار معطى، فإن التابع $z(t, h) = \psi(h): T_\delta \times H_\rho \to R_1$ له مشتق مستمر بالنسبة للمتغير (t, h)، ثم إن التفاتشاكل π يحوّل هذا التابع الى تابع $z(y)$ قابل باستمرار بالنسبة لِـ y، ثابت على المسارات، اي انه تكامل اول للمعادلة (1). نلاحظ ان التفاتشاكل π يحوّل المجموعة H_ρ الى المجموعة ذاتها بشكل تطابقي، وعليه نرى بان كل تكامل اول للمعادلة (1) معين بقيمه على H_ρ التي تشكل تابعاً قابلا للاشتقاق باستمرار ؟ اما قيمه عند النقاط الاخرى y المنتمية للجوار V فتنتج من كوْن التكامل الاول ثابتا على كل مسار.

ب . اذا كان $Y = R_n$ بحيث يمكننا وضع $H = R_{n-1}$ فإن الحالة تزداد وضوحا. يتبين على وجه الخصوص انه يوجد، في جوار للنقطة $y_0 \in Y$ حيث $\Phi(y_0) \neq 0$، $n - 1$ تكــاملا اولا مستقلا (66.1 ـ ب) للمعادلة (1) ؟ من جهة اخرى، يمثل كل تكامل اول لهذه المعادلة في جوار للنقطة y_0، تابعا (قابلا للإشتقاق) لكل $n - 1$ تكاملا اولا مستقلا ومثبتا. للبرهان على الفرع الاول من هذه القضية نختار في H_ρ الاحداثيات الكيفية $h_1, \ldots, h_{n-1}$. إن التوابع (في $T_\delta \times H_\rho$ ($z_1(t, h) = h_1$ ، ... ، $z_{n-1}(t, h) = h_{n-1}$ ثابتة على

القطع المستقيمة الشاقولية وبطبيعة الحال، مستقلة؛ وبالتالي فإن صورها بواسطة التفاتشاكل π تمثل $n-1$ تكاملا اولا مستقلا للمعادلة (1).
من جهة اخرى يحوّل التفُاتشاكل π^{-1} التكاملات الاولى الكيفية $z_1(y)$، ...، $z_{n-1}(y)$ ، (المستقلة) الى توابع معينة $z_1(t, h)$ ، ...، $z_{n-1}(t, h)$ ثابتة على القطع المستقيمة الشاقولية، ومستقلة هي ايضا، بحيث انه مرتبة المصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \cdots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial t} & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{matrix} \right\|$$

تساوي $n-1$. يتشكل العمود الاول من هذه المصفوفة من اصفار؟ ولذا:

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_1} & \cdots & \frac{\partial z_1(0,0)}{\partial h_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n-1}(0,0)}{\partial h_{n-1}} \end{matrix} \right| \neq 0.$$

وهكذا تنجز التوابع $z_1(0, h)$ ، ...، $z_{n-1}(0, h)$ تفاتشاكلا من جوار $U(0) \subset H_0$ في ساحة $V \subset R_{n-1}$. وبالتالي يمكن كتابة كل تابع $\psi(h)$ قابل للإشتقاق في $U(0)$ على الشكل

$$F(z_1(0, h), \ldots, z_{n-1}(0, h))$$

(5.1، — حـ) حيـــث $F(z_1, \ldots, z_{n-1})$ يقبـل الاشتقـاق ليكن الآن، $z(y)$ اي تكامل اول للمعادلة (1)، إن التفاتشاكل π^{-1} يحوّل $z(y)$ الى تابع $z(t, h)$ لا يتعلق إلاّ بـِ h ، إذن، يضعه على الشكل

$$F(z_1(0, h), \ldots, z_{n-1}(0, h)) = F(z_1(t, h), \ldots, z_{n-1}(t, h))$$
$$= F(z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y))$$
، وهـو المطلـوب اثباته.

جـ. نشير الى ان كل مجموعة (حتى غير كاملة) مؤلفة من $k \leqslant n-1$ تكاملا اولا مستقلا تفيدنا بمعلومات اساسية حول مسارات الجملة. على وجه الخصوص، اذا كان لدينا $k \leqslant n-1$ تكاملا اولا مستقلا، مثلا $z_1(y), \ldots, z_k(y)$ ، وباعتبار اي اختيار لثوابت $c_1, \ldots, c_k$

(مـن جوار القيم $c_1^0 = z_1(y_0), \ldots, c_k^0 = z_k(y_0)$ فـإن المعادلات:

$$z_1(y) = c_1, \ldots, z_k(y) = c_k \tag{2}$$

تعين، حسب 66.1 ـ ب، منوعة ذات بعد $(n-k)$:

$$M(c_1, \ldots, c_k) \subset Y$$

زيادة على ذلك، إذا اشترك مسار للمعادلة (1) مع منوعة $M(c_1, \ldots, c_k)$ بنقاط، فإن هذا المسار محتوٍ باكمله في تلك المنوعة، ذلك لان التوابع $z_1(y), \ldots, z_k(y)$ تحتفظ بقيمها على هذا المسارعندما يكبر k فإن بعد المنوعات $M(c_1, \ldots, c_k)$ ينقص وتصبح بذلك المعلومات حول مواقع المسارات اكثر دقة. اخيرا، إذا كان $k = n - 1$ فإن المعادلات (2) تعين المنوعات الوحيدة البعد، اي المسارات نفسها.

د . يمكن في بعض الاحيان ايجاد $n - 1$ تكاملا اولا مستقلا بجوار نقطة معطاه y_0 ، بدون معرفة المسارات. تعين عندئذ المسارات بصفة ضمنية بواسطة المعادلات (2).

مثال. ليكن $Y = R_3$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$. نعتبر المعادلة

$$\frac{dy}{dt} = \{y_2 - y_3, y_3 - y_1, y_1 - y_2\}, \tag{3}$$

أو، باعتبار الشكل السلمي، جملة المعادلات:

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 - y_3, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3 - y_1, \quad \frac{dy_3}{dt} = y_1 - y_2. \tag{4}$$

نبحث عن مسارات المعادلة (3) أو، وهو الامر نفسه، الجملة (4) بجمع المعادلات (4) نحصل على:

$$\frac{d(y_1 + y_2 + y_3)}{dt} = 0.$$

ينتج من ذلك ان المساواة = $y_1 + y_2 + y_3$ ثابتا قائمة على كل مسار للجملة (4)، وهي تمثل إذن تكاملا اولا لهذه الجملة. ثم بضرب المعادلات

في (4) y_1, y_2, y_3 على التوالي وبجمع النتائج نحصل على:

$$\frac{y_1\,dy_1 + y_2\,dy_2 + y_3\,dy_3}{dt} = y_1(y_2 - y_3) + y_2(y_3 - y_1) + y_3(y_1 - y_2) = 0,$$

ومنه يأتي تكامل اول آخر $z_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$

إن للمصفوفة

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \frac{\partial z_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \frac{\partial z_2}{\partial y_3} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{matrix} \right\|$$

مرتبة تساوي 2 اينما كان باستثناء نقاط المستقيم $\gamma = \{ y \in R_3 : y_1 = y_2 = y_3 \}$. نلاحظ ان هذه النقاط هي بطبيعة الحال، نقاط غير متحركة من الجملة (4). ثم إن المسارات معينة محليا، بجوار كل نقطة $y \notin \gamma$ ، بواسطة المعادلتين:

$y_1 + y_2 + y_3 =$ ثابتا و $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 =$ ثابتا

ونحن نرى ان هذه المسارات هي الدوائر المتعامدة على المستقيم والمتمركزة على هذا المستقيم.

9. 8. 1 . المعادلات الخطية ذات المشتقات الجزئية. نفرض ان لدينا بجوار كل نقطة y من ساحة G في فضاء باناخي Y ، تابعا $\Phi(y)$ مستمرا وقابلا للإشتقاق باستمرار، فيمة في نفس الفضاء Y ، بعبارة اخرى، يمثل $\Phi(y)$ حقلا شعاعيا. نبحث عن تابع $z(y): G \to Z$ مستمر وقابل للإشتقاق باستمرار، انطلاقا من المعادلة:

$$z'(y)\,\Phi(y) = 0. \tag{5}$$

(نذكّر ان $z'(y)$ مؤثر خطي من Y في Z ، وبالتالي فإن الطرف الايمن من (5) يمثل صورة، بواسطة المؤثر $z'(y)$ ، للشعاع $\Phi(y)$ تعني المعادلة (5) طبقا لِـ 72.1 - أ ان مشتق التابع $z(y)$ وفق اتجاه الشعاع $\Phi(y)$ منعدم عند كل نقطة $y \in G$. نعتبر في الساحة G ، المعادلة

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y). \tag{6}$$

يصبح التابع المطلوب $z(y)$ على كل مسار للمعادلة (6) تابعا للوسيط t ، وبذلك تعني المعادلة (5) ان مشتق هذا التابع الاخير منعدم. هكذا يجب ان يكون التابع المطلوب $z(y)$ ثابتا على كل مسار للمعادلة (6) أي عليه ان يكون تكاملا اولا لهذه المعادلة. إن القضية العكسية بديهية: ان كل تكامل أول للمعادلة (6) حل للمعادلة (5). بالتالي ينحصر مسالة حل المعادلة (5) في ايجاد التكاملات الاولى للمعادلة (6). مثلا، وكما سبق ان رأينا ضمن 88.1 - ب، فإنه يوجد بجوار كل نقطة غير ثابتة للمعادلة (6) في الفضاء $Y = R_n$، $n-1$ تكاملا اولا مستقلا؟ نرمز لها بـ $z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y)$ وكل تكامل اول يكتب بدلالتها وفق الدستور:

$$z(y) = \psi(z_1(y), \ldots, z_{n-1}(y)),$$

حيث $\psi(z_1, \ldots, z_{n-1})$ تابع (مختار بشكل كيفي) قابل للإشتقاق باستمرار.

وهكذا إذا كانت لدينا المعادلة:

$$\frac{\partial z}{\partial y_1}(y_2-y_3)+\frac{\partial z}{\partial y_2}(y_3-y_1)+\frac{\partial z}{\partial y_3}(y_1-y_2)=0$$

في R_3 ، فإن الجملة الديناميكية الموافقة لها معينة بالمعادلة

$$\frac{dy}{dt}=\{y_2-y_3,\ y_3-y_1,\ y_1-y_2\}$$

الواردة ضمـــــــن 88.1 - د، ونحن نعلم خـارج المستقيم $\gamma=\{y \in R_3 : y_1=y_2=y_3\}$ تكامليها الاولين

$$z_1(y) = y_1 + y_2 + y_3 \quad \text{و} \quad z_2(y) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

وبالتالي فإن كل حل للمعادلة (7) يوصف، بجوار كل نقطة، $y \notin \gamma$ ، بالدستور:

$$z(y) = \psi(y_1 + y_2 + y_3,\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

حيث $\psi(z_1, z_2)$ تابع قابل للإشتقاق باستمرار.

ترد المعادلة غير المتجانسة:

$$z'(y)\,\Phi(y, z) = \psi(y, z) \quad (Y \times R_1 \to R_1)$$

بسهولة الى معادلة متجانسة في الفضاء $Y \times R_1$ (انظر التمرين 28).

§ 1.9. المعادلات التفاضلية (النظريات غير المحلية)

1.19. درسنا في الفقرة السابقة خواص معادلة تفاضلية بجوار نقطة؟

أما الآن فنهتم بخواص الحلول في ساحات كبيرة. ليكن Y فضاء باناخي؟ ولتكن في ساحة $R_1 \times Y \supset G$ (قد تكون غير محدودة)، معادلة تفاضلية:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y). \tag{1}$$

نقول عن ساحة جزئية $Q \subset G$ إنها **ساحة نظامية**، إذا وجد عدد $r > 0$ بحيث تكون كل كرة نصف قطرها، ومركزها نقطة $a \in Q$ محتواه باكملها في G. نفرض ان التابع $\Phi(t, y)$ (في (1)) مستمر في G ومحدود في كل ساحة جزئية نظامية $Q \subset G$:

$$|\Phi(t, y)| \leqslant A_Q \tag{2}$$

ويتتمتع بشرط ليبشيتز بالنسبة لـ y:

$$|\Phi(t, y_1) - \Phi(t, y_2)| \leqslant B_Q\,|y_1 - y_2|. \tag{3}$$

بفضل 1.28 - ب والفروض الواردة آنفا، فإنه يمر بكل نقطة $(t_0, y_0) \in G$ حل وحيد للمعادلة (1):

$$y(t) \equiv y(t; t_0, y_0), \quad y(t_0) = y_0. \quad [\text{to}, B) \tag{4}$$

قد يكون هذا الحل المعرف في مجال $|t - t_0| < \delta$ غير قابل للتمديد على مجال من محور الاعداد t، سبب ذلك قد يكون مثلا ان الحل بلغ من اجل قيمة منتهية $t = t_1$ حافة الساحة G. لنثبت ان ذلك هو السبب الوحيد الذي يجعل غير قابل للتمديد.

نظرية: . يمكن تمديد كل حل (4) في اتجاهين تغير t الى ان يخرج من كل ساحة جزئية نظامية $Q \subset G$.

البرهان. نبحث، من اجل حل معطي (4)، عن اكبر نصف مجال $[t_0, \beta)$ يكون فيه هذا الحل معرفا؟ نستطيع تعريف $[t_0, \beta')$ كاتحاد لكل انصاف المجالات التي يكون فيها الحل (4) موجوداً.

(نلاحظ هنا ان الكمية $y(t; t_0, y_0)$ ، إن كانت موجودة، معرفة بطريقة وحيدة لأن نظرية الوحدانية 26.1 تمنع تقاطع - اذا لم يكن هنا تطابقا - الحلول في الساحة G). لنفرض ان$\beta < \infty$؟ نعتبر اية متتالية $t_n \in [t_0, \beta)$ حيث $t_n \nearrow \beta$ والمتتالية الموافقة لها $(t_n, y(t_n))$

نفرض ان القوس $(t, y(t))$ يبقى، من اجل $t \in [t_0, \beta)$ ، في ساحة جزئية نظامية $Q \subset G$، بحيث تكون القيم $\Phi(t, y(t))$ محدودة (بالطويلة) بالثابت A_Q الوارد في (2). عندئذ يصبح لدينا، من اجل $n > m$:

$$|y(t_n) - y(t_m)| \leqslant \sup_{t_m < t < t_n} \left|\frac{dy(t)}{dt}\right| (t_n - t_m) \leqslant A_Q(t_n - t_m)$$

وهكذا فإن المتتالية $y(t_n)$ كوشية في الفضاء Y ؟ نرمز لنهايتها بـ $\bar{y}$. بما ان التابع $\Phi(t, y)$ مستمر فإن $\Phi(\beta, \bar{y}) = \lim_{n \to \infty} \Phi(t_n, y_n)$ ؛ وبالتالي إذا استكملنا القوس نصف المفتوح $(t, y(t))$ ، حيث $t \in [t_0, \beta)$ ، بالنقطة $(\beta, \bar{y})$ فإننا نجد قوسا مغلقا $(t, y(t))$ حيث $t \in [t_0, \beta]$ بمماس مستمر، أي حلا للمعادلة (1). يتبين من النظرية 18.1 - ب ان الحل يمكن تمديده من اجل قيم لِ t اكبر من $t = \beta$ ، وهذا يناقض الفرض. نرى إذن، انه اما ان يكون $\beta = \infty$ واما $\beta < \infty$ وفي الحالة الاخيرة تخرج النقاط $(t, y(t))$ ، من اجل $t \in [t_0, \beta)$ ، عن كل ساحة جزئية نظامية $Q \subset G$، وهو ما ذهبنا اليه في النظرية. يتم البرهان على هذه النظرية في الاتجاه $(t \to -\infty)$ بطريقة مماثلة للسابقة.

29.1 . نعمم فيما يلي النظريتين المتعلقتين باستمرار وبقابلية الحل للإشتقاق

بالنسبة للشرط الابتدائي الى الحالة التي يتغير فيها t في مجالات كبيرة. سنحتاج في ذلك الى التوطئة التالية:

توطئة. إذا حقق تابع $\varphi(t)$ ، مستمر وقابل للإشتقاق في مجال $[0, T]$ ، الشرط:

$$|\varphi(t)| \leqslant M\left(1 + k\int_0^t |\varphi(\tau)|\,d\tau\right), \tag{1}$$

فإنه يحقق ايضا الشرط التالية في المجال $[0, T]$:

$$|\varphi(t)| \leqslant Me^{kMt}. \tag{2}$$

البرهان. نضع:

$$\int_0^t |\varphi(\tau)|\,d\tau = v(t).$$

تأخذ عندئذ المتراجحة (1) الشكل:

$$v'(t) \leqslant M(1 + kv(t)), \tag{3}$$

أو:

$$\frac{v'(t)}{1 + kv(t)} \leqslant M.$$

بمكاملة طرفي هذه المتراجحة وبمراعاة كوْن $v(0) = 0$ ، نحصل على:

$$\ln(1 + kv(t)) \leqslant kMt$$

أو

$$1 + kv(t) \leqslant e^{kMt}.$$

وباستخدام (3) نتوصل الى:

$$v'(t) \leqslant Me^{kMt},$$

ومنه تأتي المتراجحة المطلوبة.

39. 1 . نكتب من أجل $t_0 = 0$: $y(t, y_0)$ بدل $y(t; t_0, y_0)$

توطئة. ليكن $\{t, y(t, y_1)\}$ ، حيث $0 \leqslant t \leqslant T$، المنحنى الذي يمثل حلا للمعادلة 19. 1 (1) والموجودة باكمله في ساحة جزئية نظامية Q من الساحة $G(\subset R_1 \times Y)$. يوجد عندئذ $\delta > 0$ بحث يكون كل حل $y(t, y_2)$ ، $|y_2 - y_1| < \delta$ معرفا ايضا من اجل $0 \leqslant t \leqslant T$

البرهان. نختار بحيث يكون الـ 24 ـ جوار للساحة Q محتويا في الساحة G. حينئذ بمثل الـ 4 ـ جوار H للساحة Q، مع Q، ساحة جزئية نظامية، بصفة خاصة فإن شرط ليبشيتز:

$$|\Phi(t, y) - \Phi(t, z)| \leqslant B_H |y - z|,$$

بثابت مثبت B_H، متوفر في اجل كل (t, y) و (t, z) في H
نضع $\delta = \varepsilon e^{-B_H T}$ ونعتبر حلا كيفيا $y(t, y_2)$، حيث $|y_2 - y_1| < \delta$. ليكن $[0, \beta)$ اكبر نصف مجال تبقى فيه النقطة $(t, y(t, y_2))$ ايضا في الساحة H؟ لنثبت ان $T \leqslant \beta$. نفرض ان $\beta < T$. يحقق الحلان $y(t, y_1)$ و $y(t, y_2)$ العلاقتين:

$$y(t, y_1) = y_1 + \int_0^t \Phi(\tau, y(\tau, y_1))\, d\tau,$$

$$y(t, y_2) = y_2 + \int_0^t \Phi(\tau, y(\tau, y_2))\, d\tau.$$

نستنتج من ذلك، من اجل $0 \leqslant t < \beta$:

$$|y(t, y_1) - y(t, y_2)| \leqslant |y_1 - y_2| + \int_0^t |\Phi(\tau, y(\tau, y_1)) -$$

$$- \Phi(\tau, y(\tau, y_2))|\, d\tau \leqslant \delta + B_H \int_0^t |y(\tau, y_1) - y(\tau, y_2)|\, d\tau.$$

لدينا، حسب التوطئة 29.1.

$$|y(t, y_1) - y(t, y_2)| \leqslant \delta e^{B_H \beta} \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

وهكذا نلاحظ، من اجل $0 \leqslant t \leqslant \beta$، ان المنحنى $\{t, y(t, y_2)\}$ يقع في الساحة الجزئية النظامية H. حينئذ يتبين، استنادا الى 19.1، ان الحل $y(t, y_2)$ يمكن تمديده خارج $t = \beta$، وهو ما يناقض الفرض. ينتهي بذلك البرهان على التوطئة.

49.1. نظرية حول الاستمرار الشامل. نعتبر قوسا $\{t, y(t, y_1)\}$، $0 \leqslant t \leqslant T$ يمثل حلا للمعادلة 19.1 (1) ومحتويا

في ساحة جزئية نظامية Q من الساحة G. يوجد، حسب 39.1، من اجل عدد $0 < \delta$ ومن اجل كل العناصر y_2، بحيث $|y_2 - y_1| < \delta$، حل $y(t, y_2)$، حيث $t \leqslant T$. عندئذ تكون النقاط $y(T, y_2)$ متعلقة باستمرار بـ y_2.

البرهان. يكفي اعتبار متتالية نقاط $y_2^{(1)}, \ldots, y_2^{(m)}, \ldots \to y_1$. والبرهان على ان $y(T, y_2^{(m)}) \to y(T, y_1)$. يُعطى التقدير 39.1 (1)، من اجل $y_2 = y_2^{(m)}$، $t = T$، $\delta = \delta_m = |y_2^{(m)} - y_1|$، ما يلي:

$$|y(T, y_1) - y(T, y_2^m)| \leqslant \delta_m e^{BT} \to 0,$$

وهو المطلوب.

59.1. نظرية حول الاشتقاق الشامل. اذا كان التابع $\Phi(t, y)$، ضمن افتراضات 19.1، له مشتق مستمر $\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y}$ فإن النقطة $y(T, y_0)$، ضمن افتراضات 49.1 وباعتبارها تابعا لِـ y_0، تقبل الاشتقاق بالنسبة لِـ y_0.

البرهان. ان الكمية $\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y}$، بفضل 54.1، تحقق في كل ساحة جزئية نظامية Q المتراجحة

$$\left\| \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} \right\| \leqslant B_Q.$$

حيث يمثل B_Q الثابت الوارد في شرط ليبشيتز. إن الإنشاءات التي سنقوم بها الآن صالحة في الساحة V التي تمثل اتحاد كل الكرات ذات نصف القطر δ (الوارد في التوطئة 39.1) والمتمركزة في نقاط المنحنى $y(t, y_0)$، $0 \leqslant t \leqslant T$. لتكن $(\bar{t}, \bar{y})$ نقطة على هذا المنحنى. رأينا في 58.1 ان الحل $y(t; \bar{t}, \bar{y})$ (الذي يطابق، في الواقع، الحل $\underline{y}(t, y_0)$ حسب نظرية الوحدانية) قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ y، وهذا مهما ابتعد t عن $\bar{t}$ شريطة ان تكون المسافة بينهما اصغر من $\delta_0 < \frac{1}{B} \leqslant \left(\sup_V \left\| \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} \right\|\right)^{-1}$. لنقسم المجال $[0, T]$

بالنقاط $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ بحيث يكون $t_{j+1} - t_j < \delta_0$

نحصل عندئذ على ان:

$y_1 = y(t_1, y_0)$ تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ y_0

$y_2 = y(t_2; t_1, y_1)$ تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ y_1

$y_m = y(t_m; t_{m-1}, y_{m-1})$ تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ y_{m-1}

باستخدام قاعدة اشتقاق تابع مركب عدة مرات نرى ان $y_m = y(T, y_0)$ تابع قابل للإشتقاق بالنسبة لِـ y_0 ، وهو المطلوب.

69. 1 . المعادلات القائمة في الفضاء باكمله. نفرض ان الساحة $G \subset R_1 \times Y$ الواردة في 19. 1 تطابق كل الفضاء $R_1 \times Y$ ليس هناك في هذه الحالة سوى احتمالين حسب 19. 1 : اما أن يكون الحل $y(t, y_0)$ معرفا من اجل كل t ، $0 \leqslant t < \infty$، واما ان يكون الحل $y(t, y_0)$ غير محدود من اجل قيمة منتمية $t = t_0$. (على سبيل المثال فإن المعادلة $\frac{dy}{dt} = y^2$ في $R_1 \times R_1$ تحقق الاحتمال الثاني: إن الحل الموافق للقيمة الابتدائية $y_0 = \frac{1}{a} > 0$ ، $t = 0$ ، يكتب على الشكل $y = \frac{1}{a-t}$ ولا يمكن تمديده الى القيمة $t = a$ في الاتجاه الموجب).

من الطبيعي ان نطرح السؤال التالي: ما هي الشروط التي ينبغي فرضها على التابع $\Phi(t, y)$ لكي يكون وجود الحل $y(t, y_0)$ مضمونا من اجل كل t $0 \leqslant t < \infty$. لنثبت ان مثل هذا الشرط معطى المتراجحة:

$$|\Phi(t, y)| \leqslant A_t + B_t |y| \tag{1}$$

حيث A_t و B_t ثوابت محدودة بانتظام في كل ساحة لِـ t محدودة. نعتبر، كما ورد اعلاه، أكبر نصف مجال $[0, \beta)$ يكون فيه الحل $y(t, y_0)$ معرفا؟ علينا ان نبين بأن $\beta = \infty$. ليكن $\beta < \infty$. ينتج من المعادلة:

$$y(t) = y_1 + \int_0^t \Phi(\tau, y)\, d\tau, \quad 0 \leqslant t < \beta$$

ومن (1) ان:

$$|y(t)| \leqslant |y_1| + \int_0^t (A_\tau + B_\tau |y|)\, d\tau \leqslant |y_1| + \overline{A}_\beta \cdot \beta + \overline{B}_\beta \int_0^t |y|\, d\tau$$

حيث $A_\beta = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \beta} A_t$ ، $\overline{B}_\beta = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \beta} \overline{B}_t$. بتطبيق التوطئة 29.1 نرى أن:

$$|y(t)| \leqslant (|y_1| + \overline{A}_\beta \beta)\, e^{\overline{B}_\beta \beta}$$

وهكذا فإن الكمية $y(t)$ محدودة في المجال $[0, \beta)$ ، وبالتالي تبقى النقطة $\{t, y(t)\}$ في ساحة جزئية نظامية من الساحة G ؟ لكن يتبين من 19.1 ، ان الحل (t, y_0) يمكن تمديده من اجل قيم t الاكبر من $t = \beta$ ، وهو ما يناقض الفرض. اخيرا ، لكي يكون الحل $y(t, y_0)$ قابلا للتمديد الى مالا نهاية بالنسبة لِـ t يكفي ان تتحقق المتراجحة بصفة خاصة فإن هذه المتراجحة محققة من اجل المعادلة الخطية:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + B(t) \qquad (2)$$

حيث $A(t): R_1 \to L(Y)$

و $B(t): R_1 \to Y$ معاملان مستمران (من اجل كل t).

وهكذا فإن كل حل للمعادلة الخطية (2) حيث A(t) و B(t) معاملان مستمران، يمكن تمديده على كل محور العناصر t ، $-\infty < t < \infty$.

97.1 . نفسر هنا، كما هو الحال في 88.1 ، الحلول $y = y(t, y_0)$ للمعادلة $\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y)$ بوصفها قانون حركة، في الفضاء Y ، لنقطة متحركة موقعها في اللحظة $t = 0$ هي النقطة y_0 ، اما $\Phi(t, y)$ فهي سرعة الحركة. نفرض هنا ايضا ، كما ورد في 88.1 ، ان $\Phi(t, y)$ لا يتعلق بِـ t بحيث ان المعادلة المعطاة تكتب على الشكل:

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(y) \qquad (1)$$

لنثبت ان لدينا العلاقة:

$$y(t, y(t_1, y_0)) = y(t + t_1, y_0) \qquad (2)$$

وذلك مهما كان العنصرين t_1 و t المقبولين في الطرف الايسر. بالفعل إذا كان لـ $y(t_1, y_0)$ معنى فإن الطرفين في (2) يتطابقان عند $t = 0$ وهما معرفان من اجل العناصر $t \neq 0$ الصغيرة، على الاقل. ان الطرفين يحققان بصفة بديهية، المعادلة التفاضلية (1) من تلك القيم لِـ t. نلاحظ عندئذ ان الطرفين متطابقان، حتما، من اجل كل العناصر t التي تجعلهما معرفين (ذلك ان نظرية الوحدانية 28.1 تمنع عدم تساويهما). إذا لم تستفد قيم t المذكورة ساحة تعريف الطرف الايمن (الايسر، على التوالي) فإننا نستطيع تعريف الطرف الايسر (الايمن، على التوالي) في النقاط المتبقية وذلك بوضعه مساويا للقيم الموافقة له في الطرف الايمن (الايسر على التوالي) ويبقى الطرف الايسر (الايمن، على التوالي) حلا للمعادلة (1) يأخذ عند $t = 0$ القيمة $y(t_1, y_0)$.

كنا بيّنا في 88.1 ان لِكل نقطة $y_0 \in Y$ بحيث $\Phi(y_0) \neq 0$ جوارا $V(y_0)$ وتفاتشاكلا π يحوّل اجزاء مسارات المعادلة (1) الواقعة في $V(y_0)$ الى قطع مستقيمة متوازية تُرسم (عند تغيّر t) بسرعة ثابتة.

سوف نعمم هذه النتيجة لتشمل حالة اجزاء كبيرة (بالنسبة لِـ t) من المسارات.

نعتبر بجوار نقطة $y_0 \in Y$ حيث $\Phi(y_0) \neq 0$، التفكيك $Y = L + H$ المنشأ في 88.1، حيث L فضاء جزيئي وحيد البعد وH فضاء جزئي مغلق من Y ، ولتكن $H_\rho = \{h \in H, \ |h| \leqslant \rho\}$ كرة في H بحيث يشكل جداء القطعة المستقية T_δ و H_ρ ساحة قيم التفاتشاكل π . هل يمكن تمديد التفاتشاكل π (المنشأ في 88.1 من اجل $|t| \leqslant \delta$) ليشمل قيما كبيرة t ؟ إن مسارات المعادلة (1) يمكن ان تدخل مرة اخرى، عند اخذها كاملة 2 في الكرة H_ρ ، ولذا فإن الجواب عن السؤال المطروح سيكون بالنفي ما لم نصف افتراضات اخرى. لنفرض على حلول المعادلة (1)

الشرط التالي:

شرط عدم رجوع المسارات على المجال $[-t_1, t_2]$ (حيث $(t_1, t_2 > 0)$: من اجل عدد $\rho > 0$ ، فإن مسار $y(t, h)$ (حيث $h \in H_\rho$ و $t \in [-t_1, t_2]$ يصبح (اي من اجل $t \neq 0$) بدون نقاط مشتركة مع الكرة H_ρ.

يتبين عندما يتحقق هذا الشرط ان تمديد التفاتشاكل ممكن:

نظرية. إذا كانت المسارات $y(t, h)$ معرفة من اجل $h \in H_\rho$ ، $t \in [-t_1, t_2]$ وإذا تحقق شرط عدم الرجوع على المجال $[-t_1, t_2]$, فإنه يوجد تفاتشاكل للمجموعة $[-t_1, t_2] \times H_\rho$ يحوّل كل نقطة (t, h) الى النقطة $y(t, h)$.

البرهان. لنبرهن على ان التطبيق $\pi: (t, h) \rightarrow y(t, h)$ تقابلي. لو كان $y(t_0, h_0) = y(t_1, h_1)$ من اجل $t_0 \leqslant t_1$ ، $h_0 \in H_\rho$ و $h_1 \in H_\rho$, لحصلنا بتطبيق (ح) على: $y(t_1 - t_0, h_1) = y(-t_0, y(t_1, h_1)) =$
$y(-t_0, y(t_0, h_0)) = y(0, h_0) = h_0$
وهو ما يناقض، من اجل $h_1 \neq h_0$ و $t_1 \neq t_0$, ، شرط عدم الرجوع. وبالتالي فإن التطبيق π تقابلي. ينشر بعد ذلك الى انه لا توجد نقطة ثابتة من بين النقاط $y(t, h)$ $(t \in [-t_1, t_2]$ ، $h \in H_\rho)$ ، وهو ما يأتي من نظرية الوحدانية)؟ وبالتالي (بفضل 88.1) فإن التطبيق π يمثل تفاتشاكلا من جوار كل نقطة (t, h) على الجوار المرافق له للنقطة $y(t, h)$. إذن، نرى ان التطبيق $\pi: (t, h) \rightarrow y(t, h)$ تقابلي وقابل للإشتقاق وكذا التطبيق العكسي M^{-1} ، أي انه تفاتشاكل، وهو المطلوب.

بصفة خاصة، إذا تحقق عدم الرجوع بعدد $\rho > 0$ ، في كل المستقيم العددي $-\infty < t < \infty$ فإننا نرى بأن مجموعة نقاط كل المسارات $y(t, h)$ ، $h \in H_\rho$ ، $-\infty < t < \infty$، تُطَبَّق بصفة تفاتشاكلية على مجموعة

نقاط المستقيمات المتوازية$-\infty < t < \infty$، $h \in H_0$، وذلك وفق الدستور:

$$y(t, h) \to (t, h)$$

نقول في هذه الحالة ان مجموعة المسارات $y(t, h)$ (حيث $-\infty < t < \infty$ ، $h \in H_0$) **قابلة للتعديل.**

تمارين

1 . اثبت ان التابع $f(x)\ (R_2 \to R_1)$ المعطى ضمن الاحداثيات القطبية φ و r بِ:

$f(x) = [r(1-r)]^{\varphi}$ من اجل $0 < \varphi \leqslant 2\pi$ ، $0 \leqslant r \leqslant 1$.

$f(x) = 0$ من اجل قيم φ و r الاخرى.

مستمر على كل نصف مستقيم ينطلق من مركز الاحداثيات، وغير مستمر عند مركز الاحداثيات.

2 . اثبت ان كل تابع $f(x)\ (R_2 \to R_1)$ مستمر على كل منحنى قابل للاشتقاق منطلق من مركز الاحداثات، تابع مستمر ايضا عند مركز الاحداثيات.

3 . ليكن $\lambda(\varphi)$ تابعا قابلا للإشتقاق ودوريا دورته 2π . اثبت ان التابع $f(x)\ (R_2 \to R_1)$ المعرف ضمن الاحداثيات القطبية φ و r بالدستور: $f(x) = \lambda(\varphi)\, r$

تابع أ يقبل الاشتقاق وفق كل نصف مستقيم ينطلق من مركز الاحداثيات ومشتقة هو $\lambda(\varphi)$.

ب) يقبل الاشتقا وفق المستقيم $\varphi = \varphi_0$ في حالة واحدة هي الحالة التي يكون فيها $\lambda(\varphi_0 + \pi) = -\lambda(\varphi_0)$.

حـ) يقبل الاشتقاق عند مركز الاحداثيات اذا وفقط إذا كان $\lambda(\varphi) = \alpha \sin(\varphi + \beta)$ ، حيث α و β ثابتان.

4 . اثبت انه لكي يعرّف تابع قابل للاشتقاق $w = f(z)\ (G \subset R_2 \to R_2)$ تابعا تحليليا $f(z)$ يلزم ويكفي ان يكون المؤثر $f'(z)$ ، من اجل كل نقطة $z \in G$ ، مؤثر الضرب في عدد عقدي (يتعلق بـ z).

5 . اكتب معادلة تفاضلية من اجل الخط الاسرع صعودا لتابع $y = f(x_1, x_2)$ $(R_2 \to R_1)$.

6 . عين من بين خطوط مستوى التابع $\rho(x, -a)\, \rho(x, a)$ $(R_2 \to R_1)$ خطوط المستوى المحدبة. وخطوط المستوى التي تقبل نقاط انعطاف وخطوط المستوى المشكلة من بويضتين

7 . إذا اخذ تابع عددي قابل للإشتقاق $f(x)$ $(G \subset X \to Y)$ نفس القيمة عند نقطتين a و b فإن المشتق ينعدم على الاقل، في نقطة من اي منحنى L يصل النقطتين a و b. أأت بمثال لتابع شعاعي من R_1 في R_2 (على الاقل) لا تقوم من اجله النتيجة السابقة.

8 . ليكن Q اصغر مجموعة محدبة مغلقة تحوي كل قيم التابع $f'(t)$ (حيث $a \leqslant t \leqslant b$، $f: [a, b] \to Y$ ، $f(a) = f(b)$. اثبت ان $0 \in Q$.

9 . نعتبر سطح مجسم ناقصي دوراني كسطح مستوى التابع $\rho(x, a) + \rho(x, b)$. اثبت ان الاشعة الضوئية المنطلقة من البؤرة a والتي يعكسها سطح المجسم الناقصي تلتقي في البؤرة الثانية b .

10 . نفرض ان التابع $F(t, \xi)$ $(R_2 \to R_1)$ له مشتق مستمر بالنسبة لـ ξ. اوجد النقاط المستقرة للتابعية:

$$f(x) = \int_a^b F(t, x(t))\, dt$$

المعرفة في الفضاء $R(a, b)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة $x = x(t)$ ، $a \leqslant t \leqslant b$.

11 . حلل النقاط المستقرة للتابعية الواردة في التمرين 10 في الحالة التي يكون فيها $a = 0$ و $b = 1$ ، $F(t, \xi) = \xi^3 - (t+1)^2 \xi$

12 . اوجد النقاط المستقرة المقيدة للتابعية:

$$f(x) = \int_0^1 x^3(t)\, dt, \quad x(t) \in C(0, 1)$$

الخاضعة للشرط $g(x) \equiv \int_0^1 x^2(t)\, dt = 1$

وادرس نوعيتها.

13 . تنحصر الطريقة التكرارية لحل المعادلة $f(x) = 0$ ، $(f: X \to Y)$ فيما يلي: لتكن $x_1 = a$ قيمة ابتدائية، حيث مؤثر قابل للقلب. نكتب المعادلة:

$$f(a) + f'(a)(x_2 - a) = 0 \quad (1)$$

بالنسبة لِـ x_2. تعطي هذه المعادلة جذرا دقيقا (أو مضبوطاً) للمعادلة $f(x) = 0$ عندما يكون $f(x)$ تابعا من الدرجة الاولى؛ اما في الحالة العامة فإن الحل x_2 للمعادلة (1) يمثل نقطة جديدة، قد تكون من اجله القيمة $f(x_2)$ اقرب الى 0 من قرب $f(a)$ الى 0. ينتج من (1) ان:

$$x_2 = a - [f'(a)]^{-1} f(a). \quad (2)$$

يوحي لنا الدستور (2) انه من اللائق اعتبار المتتالية:

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n),$$

أو المتتالية الاكثر بساطة

$$x_{n+1} = x_n - [f'(a)]^{-1} f(x_n) \quad (3)$$

اثبت انه إذا تحقق الشرطان:

$$\| f'(a) \|^{-1} \sup_{|x-a| \leq r} \| f'(x) - f'(a) \| < \frac{1}{2},$$

$$| [f'(a)]^{-1} f(a) | < \frac{r}{2}$$

فإن المتتالية (3) متقاربة نحو حل للمعادلة $f(x) = 0$, ينتمي الى الكرة ذات المركز a وذات نصف القطر r.

14 . اثبت ان التابع $y = | x | \ (X \to R_1)$ غير قابل للإشتقاق عند $x = 0$.

15 . اثبت ان التابع $y = | x |$ يقبل، في أي فضاء هيلبرتي، الاشتقاق عند $x \neq 0$.

16 . اثبت ان التابع $y = | x | \ (l_1 \to R_1)$ ، في الفضاء l_1 المؤلف من

المتتاليات $x = \{\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n, \ldots\}$ التي تحقق $|x| = \sum_1^\infty |\xi_k| < \infty$, لا يقبل الاشتقاق عند اية نقطة.

17. لكي نتعرف في R_2 عن مواقع فروع منحنى:

$$f(x, y) \equiv \sum_{0 \leq k, m \leq N} a_{km} x^k y^m = 0 \quad (1)$$

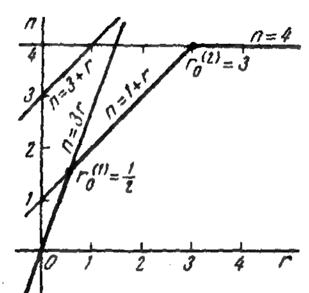
عندما $x \searrow 0$ * ، نستخدم القاعدة التالية. يجب ان نضع في (1) : $y = A x^r E$ حيث A و r ثابتان مجهولان و $E \to 1$ لما $x \searrow 0$ ؛ ثم ينبغي تعيين $r = r_0$ في المعادلة المحصل عليها:

$$\sum_{0 \leq k, m \leq N} a_{km} A^m x^{k+rm} E = 0 \quad (2)$$

انطلاقا من الشرط القائل أن اصغر أس من بين $k + r_0 m$، نرمز لهذا الاس بـ p نلتقي به مرتين على الاقل (لهذا الغرض يمكن استخدام مخطط للاسس (جمع اس) كما ورد في المثال ** 1.E-1)؛ ثم نقسم المعادلة (2) على x^p ونضع فيها $x = 0$ ؛ عندئذ يوافق كل جذر حقيقي بسيط $A_0 \neq 0$ للمعادلة المحصل عليها

$$\sum_{k + r_0 m = p} a_{km} A_0^m = 0 \quad (3)$$

فرعا حقيقيا للمنحنى (1) معادلته $y = A_0 x^{r_0} E$. اثبت هذه المقولة الاخيرة.



مخطط اسس المعادلة $x^4 + x^2 y - y^3 - xy = 0$

الرسم 1.م. 1 ـ 1

(*) معنى الرمز $x \searrow 0$ هو ان x يؤول الى الصفر وقيمته تتناقص.

(**) لمزيد من التفاصيل، انظر ج. أ. شيلوف: النقاط الشاذة، للمنحنيات الجبرية في المستوى، ي. م. ن. 5، كراسة 5 (1950)، ص 180ـ192 (بالروسية).

18 . (تتمة). إذا كان A_0 جذرا مضاعفا للمعادلة (3) فإن المنحنى (1) ليس له بالضرورة فرع معادلته $y = A_0 x^{r_0} E$. الآ أنه إذا وضعنا في (1) $y = A_0 x^{r_0} (1 + B x^s E)$ ووجدنا بطريقة مماثلة القيمتين، B_0 ، S_0 وكان B_0 جذرا بسيطا للمعادلة الموافقة له فإن المنحنى (1) يملك فرعا من الشكل:

$$y = A_0 x^{r_0} (1 + B_0 x^{s_0} E).$$

19 . اثبت أن التوابع $y = f(x)$ $(G \subset X \to R_1)$ التي تقبل مشتقا مستمرا $f'(x)$ $(G \to L(X))$ تشكل جبرا $\mathfrak{A}(G)$ مغلقا بالنسبة للنظيم:

$$\| f(x) \| = \sup_G \{ | f(x) | + \| f'(x) \| \}$$

20 . (تتمة) تتمثل المجموعة $J(a)$ المؤلفة من التوابع $f(x) \in \mathfrak{A}(G)$ التي تحقق عند نقطة معطاة $a \in G$ الشرطين $f(a) = 0$ و $f'(a) = 0$ مثاليا مغلقا في الجبر $\mathfrak{A}(G)$ اثبت ان جبر النسبة $\mathfrak{A}/J(a)$ متشاكل مع الفضاء X^* المؤلف من التابعيات الخطية المستمرة على X ، المزود بعملية الضرب المنعدم وبوحدة ندخلها بصفة شكلية.

21 . (تتمة). الاشتقاق الشكلي عند نقطة $x = a \in G$ هو، تعريفا، تابعية خطية D في الجبر $\mathfrak{A}(G)$ ، مستمرة بالنسبة لنظيم الجبر تحقق الشرط:

$$D[fg] = f(a) \cdot Dg + Df \cdot g(a)$$

أثبت ، في الحالة التي يكون فيها X فضاء هيلبرتيا، ان الشرط $f(x) \in J(a)$ يستلزم $Df = 0$

22 . (تتمة). اثبت في فضاء هيلبرتي تام $X = H$ ان اي اشتقاق شكلي عند $x = a$ في الجبر $\mathfrak{A}(G)$ هو الاشتقاق عند النقطة a وفق شعاع y :

$$Df = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + ty) - f'(a)}{t}.$$

أأت بمثال لتابع $f(x)$ $(G \subset X \to L(X, Y))$ بحيث يكون التابع $f(x)h$ $(G \to Y)$، من أجل كل $h \in X$ ، قابلا للإشتقاق ولا يكون التابع $f(x)$ كذلك.

24 . 11 أأت بمثال لتابع $f(x, y)$ $(R_2 \to R_1)$ لا يقبل الاشتقاق عند $x = 0$ لكنه يقبل مشتقا منعدما وفق كل اتجاه ينطلق من النقطة 0 . اثبت ان وجود

المشتق المنعدم لتابع $f(x)\,(R_n \to R_1)$ وفق كل منحنى (قابل للإشتقاق) ينطلق من النقطة 0 يستلزم قابلية $f(x)$ للإشتقاق عند هذه النقطة.

25 . أأت بمثال لتابع $f(x)\,(H \to R_1)$ (حيث H فضاء هيلبرتي بعده غير منته) غير قابل للإشتقاق عند $x = 0$ لكنه يقبل مشتقا منعدما وفق كل منحنى قابل للإشتقاق ينطلق من النقطة 0.

26 . اثبت ان مشتق مؤثر القلب $I(x) = \frac{x - x_0}{\| x - x_0 \|^2}$ (في فضاء هيلبرتي H) يكتب على الشكل $T(x)/\| x - x_0 \|^2$ حيث $T(x)$ مؤثر متعامد (أي أن $(T(x)\,p,\ T(x)\,q) = (p, q)$ مهما كان p و q في H).

27 . هل التابعان $y_1 = x_1$ و $y_2 = x_2^2$ من R_2 في R_2) مستقلان (أو غير مستقلين في جوار للنقطة $(0, 0)$؟.

28 . ليكن Y فضاء باناخي والتوابع $z(y): Y \to R_1$ ، $\Phi(y, z): Y \times R_1 \to Y$ ، $\Psi(y, z): Y \times R_1 \to R_1$.
لدينا المعادلة:

$$z'(y)\,\Phi(y, z) = \Psi(y, z) \tag{1}$$

اثبت أن كل حل $z(y)$ للمعادلة (1) يستنتج من حل $w(y, z)$ للمعادلة المتجانسة.

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Phi(y, z) + \frac{\partial w}{\partial z}\Psi(y, z) = 0 \tag{2}$$

في $Y \times R_1$ بفرض الشرط $w(x, z) = 0$ (والعكس بالعكس)

29 . ليكن M فضاء متريا غير متراص و$x_1, \ldots, x_n$ متتالية نقاط في M لا تقبل اية متتالية جزئية كوشية. اثبت وجود متتالية اعداد موجبة $P_1, \ldots, P_n, \ldots$ بحيث تكون الكرة:

$$S(x_n, p_n) = \{ x \in M : \rho(x, x_n) \leqslant p_n \}$$

غير متقاطعة مثنى مثنى.

30 . (تتمة). المطلوب انشاء تابع عددي مستمر $f(x)$ ، في فضاء متري غير متراص M ، بحيث يكون $\sup f(x) = \infty$

31 . (تتمة). المطلوب انشاء تابع مستمر لكنه غير مستمر بانتظام، في فضاء متري غير متراص M .

نبذة تاريخية

كان مؤسسو التحليل اللا متناهي قد فهموا ان اشتقاق التوابع يؤدي الى عبارات خطية بالنسبة لتزايد الاحداثيات، ولم تغب على اذهانهم هذه الامكانية في اختصار مسائل معقدة. بالفعل، فإن اكتشاف نيوتن (Newton) و ليبنيتز (Leibniz) يتمثل في فكرة الخطوطية وحل المَسألة على المستوى الخطي ثم الرجوع الى كميات منتهية بواسطة المكاملة. قام أولر (Euler)، خلال السنوات 1730، بتطوير تقنية التفاضليات الكلية. رغم ذلك فإن الاعمال المتعلقة بالخطوطية التي انجزت خلال القرنين 17 و 18، تبدو متناقضة لولا النظرية المتسلسلة للنهايات التي اسسها كوشي في بداية القرن 19؛ من المحتمل ان يكون الاعتقاد السائد عند رياضي ذلك العصر هو ان التوابع المعتبرة هي نفسها خطية خطوة خطوة وان تفاضلياتها ليست سوى تزايداتها الموافقة لتزايدات «صغيرة جدا» للمتغيرات المستقلة. من الطبيعي الاّ نتمكن من تطوير وجهة النظر هذه بصفة مقبولة، وهو الامر الذي يجعل من الصعب جدا بناء اسس التحليل، ويثير في نفس الوقت النقد القاتل من طرف الفلاسفة. فقد قال باركلاي (Berkeley)، مثلا، بعد ان انتقد «المغالطات المدهشة» الآتية من «جاديات» (المشتقات) النيوتينية «من كان بامكانه استيعاب «الجادية» الثانية أو الثالثة... فإنه لا يحتاج في اعتقادي الى لغة خاصة في أي موضوع من علم اللاهوت».

اما هيجل (Hegel)، الفيلسوف الذي له اتجاه آخر، فيربط طرق اللامتناهيات في الصغر بقوانين الفكر الجدلية التي اكتشفها، ويعالج الاشتقاق كنفي (لكمية منتهية) والمكاملة كنفي للنفي، يبدو التحليل، حسب وجهة النظر هذه، كتطبيق للجدلية على الرياضيات، ومن ثم يصبح من الواضح لماذا كانت كل «البراهين» الواردة في التحليل خلال ذلك العهد، غير مقبولة من وجهة نظر المنطق الشكلي: لا يمكن أن يكون الأمر غير ذلك إذا انطلقنا من قضايا غير شكلية. رغم ذلك فإن صحة ما ذهب

اليه هيجل في استدلالاته لم يساهم بأي قسط في تقدم التحليل اللامتناهي، هناك مرحلة يصبح فيها التقعيد (أو التقنين) الملموس للإنشاءات الاساسية امرا ضروريا للتطور المثمر لهذه الانشاءات. كان كبار رياضي القرن 18 امثال اولر ودالمبار (D'Alembert) ولاغرانج قد فكروا في امكانية إقامة تلك القواعد، فقد وصل امر انشاء قاعدة متينة من الناحية المنطقية، للتحليل الى أن اصبح موضوع مسابقات اكاديمية. رغم ذلك فلم ينجز كوشي وفايرشتراس (Weierstrass) التقعيد المطلوب الاّ خلال القرن 19 بعد ان تجمعت كمية كافية من المعلومات اصبح تحليل اللامتناهيات في الصغر، اثر تخلصه من التناقضات الشكلية العالقة به، محل اهتمام الكثير من الباحثين الذين ازدادوا عدداً، كما ان تطوره ازداد سرعة وفعالية بشكل مذهل. يتمثل فضل كوشي الاول في كونه اعتبر تفاضلية تابع بمثابة الجزء الرئيسي لتزايده بدل اعتبارها التزايد نفسه. إن التعريف المضبوط لهذا المفهوم، عند كوشي، يعتمد على مفهوم النهاية الذي يرتكز عليه كل الحساب اللامتناهي. اضاف فايرشتراس الى هذا المفهوم تفنية الاستدلالات بـ 4 و 5، الامر الذي سمح بتصحيح بعض النتائج المتسرعة التي كان كوشي قد توصل اليها. نشأت، خلال كل القرن 19 لدى العديد من المؤلفين من كوشي الى غورسا (Ctoursart)، افكار مختلفة في الحساب التفاضلي للتوابع المتعددة المتغيرات، بما فيها نظرية التوابع الضمنية والتوابع المستقلة وغير المستقلة والمعينات اليعقوبية (التي ادخلت من طرف جاكوبي (Jacobl) سنة 1833 للحصول على القاعدة العامة لتبديل المتغيرات في تكامل مضاعف، راجع الفصل 3).

اقترح، من سنة 1911 الى 1913 العديد من التعريفات التفاضلية تابعية (فريشي Fréchet، غاتو (Gateaux)، راجع ب. ليفي (P. Lévi)، ملموسه في التحليل التابعي، غويتي فيلار، باريس (1951)؛ عندما دخلت فكرة الفضاء النظيمي الى الرياضيات (1920 ـ 1922) فإن التعريف الذي ساد هو تعريف فريشي (32.1). فقد فتح هذا التعريف

المجال لتمديد الحساب التفاضلي على التوابع المعرفة في الفضاءات ذات الابعـاد اللامنتهيـة. قـدم هيلـدبـرانـدت (Hildebrandt) و غــرافس (Grares) [1927] تعميم نظرية التابع الضمني لتشمل الفضاءات السالفة الذكر.

يعود تاريخ استخدام الحساب التفاضلي في البحث عن القيم القصوى الى عهد نيوتن وليبنيتز (بل يعود الى قبل هذا التاريخ: فيرما (Fermat) سنة 1629). قدم لاغرانج سنة 1797 طريقة المضاريب في مسائل القيم القصوى المقيدة. اما فيما يخص تابعية على فضاء نظيمي او قيدا ذا بعد منته فإن لوستارنيك (Lusternik) هو الذي عرض هذه الطريقة سنة 1934

الفصل 2

المشتقات ذات الرتب العالية

هناك طريقتان لإنشاء نظرية المشتقات ذات الرتب العالية لتابع $y = f(x)$ $(G \subset X \to Y)$: اما أن نعرّف بالتدريج $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ ، واما ان نعتمد على الاجزاء الخطية الرئيسية من الدرجة الثانية والثالثة، الخ، لتزايد التابع. سنرى ضمن 4.2§ أن هاتين الطريقتين متكافئتان عندما نتخذ افتراضات مناسبة حول الاستمرار.

ندرس في البداية التوابع العددية لِـ n متغيرا حقيقيا (1.2§)؛ نحصل عندئذ على نتائج اصبحت معروفة وملموسة نعتمد عليها لوضع بعض المفاهيم والقضايا العامة. فيما يخص النظرية العامة حيث تأخذ المتغيرات المستقلة وغير المستقلة قيمها في فضاءات متعددة الابعاد، هناك حدث جديد: تنتمي قيم المشتقات من الرتب العالية الى فضاءات تبتعد عن بعضها البعض اكثر فأكثر، وفي نفس الوقت تكون التفاضليات ذات الرتب العالية مرتبطة بالاشكال المتعددة الخطية المتناظرة بالنسبة لتفاضليات المتغيرات المستقلة بدل ارتباطها بالاشكال الكثيرة الحدود. تؤدي هذه الاعتبارات الى نظرية فروبينيوس (Frobenius) (5.2§) التي تمثل نتيجة هامة: إن شرط حل المعادلة (التفاضلية) ذات الرتبة الاولى $y' = F(x, y)$ شرط مفروض على التابع $F(x, y)$ المرتبط ارتباطا وثيقا بخاصية تناظر التفاضلية الثانية بوصفها شكلا ثنائي الخطية. بما أن نظرية فروبينيوس تقدم، باستخدام المصطلح القديم، شروط تناسق جلة معادلات، من الرتبة الاولى، ذات مشتقات جزئية، فهي تمثل، كما هو الحال لنظرية التابع الضمني اداة من اقوى ادوات التحليل.

§2 .1 . المشتقات ذات الرتب العالية لتابع عددي ذي n متغيراً.

2 .11 . إذا كانت المشتقات الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ ، ... ، $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ لتابع عددي $f(x_1, \ldots, x_n): G \subset R_n \to R_1$ قابل للإشتقاق عند كل نقطة من المساحة G ، هي ايضا توابع قابلة للإشتقاق $(G \subset R_n \to R_1)$ يمكننا اعتبار المشتقات الجزئية الثانية التي نرمز لها بـ:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right) \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}$$

بمواصلة الاشتقاق (عندما يكون ذلك ممكنا) نحصل على المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}$ ، ومن الرتبة الرابعة

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}\right) \equiv \frac{\partial^4 f(x)}{\partial x_p \partial x_k \partial x_i \partial x_j}$$ الخ

ب. طبقا للتعريف الوارد اعلاه، يمكن لتابع ذي n متغيرا ان يقبل n مشتقا من الرتبة الاولى وn^2 مشتقا من الرتبة الثانية و n^3 من الرتبة الثالثة، الخ. الواقع ان عدد المشتقات المختلفة (أي التي لها قيم عند نقطة معطاة غير متساوية) من أية رتبة مثبتة عدد أصغر مما ذكرنا، يتبين بخصوص توابع ذات مرونة معينة انه بالامكان اجراء تبديل في ترتيب متغيرات الاشتقاق دون تغيير النتيجة، مثلا $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. لدينا بهذا الخصوص النظرية التالية:

نظرية: إذا وجد التابعان $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ في جوار لنقطة $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ وكانا مستمرين عند هذه النقطة، فإن:

$$\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i}$$

البرهان: بدون المس بعمومية المسألة، يمكننا وضع $i = 1$ ، $j = 2$. سوف لا نكتب فيما يلي سوى تعلق التابع $f(x)$ بالمتغيرين x_1 و x_2 أي اننا سنكتب $f(x_1, x_2)$. نعتبر العبارة:

$$w = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2). \quad (1)$$

انها تمثل تزايد التابع:

$$\Phi(x_1) = f(x_1,\ a_2 + h_2) - f(x_1,\ a_2)$$

عندما يتغير x_1 من a_1 الى $a_1 + h_1$ لدينا حسب نظرية لاغرانج:

$$w \equiv \Phi(a_1 + h_1) - \Phi(a_1) = \Phi'(a_1 + \theta_1 h_1)\, h_1 =$$
$$= \left[\frac{\partial f(a_1 + \theta_1 h_1,\ a_2 + h_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(a_1 + \theta_1 h_1,\ a_2)}{\partial x_1} \right] h_1$$

وهذا من اجل عدد θ_1، $0 < \theta_1 < 1$ نطبق من جديد نظرية لاغرانج بالنسبة لـ x_2 هذه المرة فنجد:

$$w = \frac{\partial^2 f(a_1 + \theta_1 h_1,\ a_2 + \theta_2 h_2)}{\partial x_2\, \partial x_1}\, h_2 h_1 \qquad (2)$$

وذلك من اجل عدد θ_2، $0<\theta_2<1$. ثم إنه يمكن اعتبار نفس الكمية w كتزايد للتابع:

$$\psi(x_2) = f(a_1+h_1,\ x_2) - f(a_1,\ x_2)$$

عندما يتغير x_2 من a_2 الى a_2+h_2. نعتمد مرة اخرى على نظرية لاغرانج فنجد:

$$w = \frac{\partial^2 f(a_1+\tau_1 h_1,\ a_2+\tau_2 h_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\, h_1 h_2$$

وذلك من اجل عددين τ_1 و τ_2، $0 < \tau_1 < 1$ و $0 < \tau_2 < 1$ بكتابة المساواة بين (2) و(3) والقسمة على $h_1 h_2$ نحصل على:

$$\frac{\partial^2 f(a_1 + \theta_1 h_1,\ a_2 + \theta_2 h_2)}{\partial x_2\, \partial x_1} = \frac{\partial^2 f(a_1 + \tau_1 h_1,\ a_2 + \tau_2 h_2)}{\partial x_1\, \partial x_2}$$

نجعل الآن h_1 و h_2 يؤولان الى الصفر فيأتي من استمرار التابعين $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$ و $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$ عند $x = a$ ان: $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2\, \partial x_1} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1\, \partial x_2}$

وهو المطلوب.

ج . فيما يخص المشتقات من رتب اكبر من اثنين، فإن امكانية تبديل ترتيب الاشتقاق تثبت (تحت فرض وجود واستمرار المشتقات المعتبرة عند النقطة $x = a$) بتطبيق النظرية السابقة عدة مرات. هكذا لدينا مثلا :

$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_1} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_2 \partial x_1^2}$$

د. إذا كان التابع $f(x_1, \ldots, x_n)$ كثير حدود لـ $x_1, \ldots x_n$ درجته اصغر من k، فمن الواضح ان كان مشتقاته التي رتبتها اكبر من k أو تساويه توابع منعدمة. بصفة خاصة، باعتبار التابع الخطي $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ فإن المشتقات الثانية لهذا التابع منعدمة كلها.

21. 2 . التفاضليات ذات الرتب العالية.

أ . يتبين من 1 .22 (3) ان التفاضلية الاولى التابع $G \subset R_n \to R_1$: $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ يساوي :

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \qquad (1)$$

ويمثل تابعا للمتغيرين : $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $dx = \{dx_1, \ldots, dx_n\}$ ، خطيا بالنسبة لـ dx . باعتبار (1) كتابع لـ x وحده نستطيع بطريقة مماثلة حساب تفاضليته الكلية الثانية $d(dy)$:

$$d^2 y \equiv d(dy) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (dy)}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i\right) dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \, dx_j$$

انها تابع للمتغيرات x_i و dx_i من الدرجة الثانية بالنسبة لـ dx_i. عندما نواصل بنفس الطريقة، نحصل على التفاضلية الكلية الثالثة :

$$d^3 y \equiv d(d^2 y) = d\left(\sum_{i, j=1}^{n} \frac{d^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \, dx_j\right) =$$

$$= \sum_{i, j, k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_i \, dx_j \, dx_k$$

وهي تمثل شكلا تكعيبيا للمتغير dx ، وهكذا على التوالي، نعرّف التفاضلية الكلية ذات الرتبة s للتابع $y = f(x)$ بالتدريج:

$$d^s y = d\,(d^{s-1} y)$$

وهي تمثل شكلا من الدرجة s بالنسبة لإحداثيات الشعاع dx نعتبر الى جانب التفاضليات الكلية dy، d^2y، d^3y الوارد تعريفها اعلاه، التفاضليات الجزئية من الرتب العالية. وهكذا نسمي العبارة:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2}\,dx_2\,dx_1$$

التفاضلية الجزئية الثانية للتابع $y = f(x)$ الموافقة للتفاضلتين dx_2 و dx_1 للمتغيرين المستقلين x^2 و x^1 . ننشىء التعريف العام للتفاضليات الجزئية بطريقة مماثلة.

ب. إذا كان التابع $(x_1, \ldots, x_n)$ كثير حدود لـ x_1 ، ... ، x_n درجته اصغر من k ، ينتج، طبقا لـ 11.2 ـ د، ان كل التفاضليات ذات الرتب الاكبر من k او تساويه للتابع $f(x)$ منعدمة. بصفة خاصة نجد باعتبار التابع الخطي $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ أن التفاضلية الكلية الثانية منعدمة. عادة ما تستعمل العلاقات $d^2 x_i = 0$. إن ما قلناه هنا قائم عندما تكون x_i متغيرات مستقلة، إذا كانت x_i توابع لمتغيرات اخرى فإن هذه الدساتير لا تقوم عموما

31.2 . دستور تايلور (Taylor). تستخدم التفاضليات ذات الرتب العالية لتحديد سلوك تابع بجوار نقطة معطاة. على وجه الخصوص، إذا كانت تلك التفاضليات موجودة فإن لدينا مجموعة الدساتير الموالية التي تزداد دقة اكثر فاكثر:

$$\Delta y \equiv f(a + dx) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\,dx_i + o\,(dx) \equiv dy\,(a) + o\,(dx),$$

$$\Delta y = dy\,(a) + \frac{1}{2}\,d^2 y\,(a) + o\,(|\,dx\,|^2),$$

. . . .

$$\Delta y = dy\,(a) + \frac{1}{2}\,d^2 y\,(a) + \ldots + \frac{1}{m!}\,d^m y\,(a) + o\,(|\,dx\,|^m),$$

. . . .

حيث $\lim_{dx\to 0} o(|dx|^m)/|dx|^m = 0$ تنتج كل هذه الدساتير من الدستور العام لتايلور وهو:

$$y(a+dx) = y(a) + dy(a) + \frac{1}{2} d^2y(a) + \ldots \tag{1}$$

$$\ldots + \frac{1}{m!} d^m y(a) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} y(a + \theta\, dx)$$

سنقدم دستور تايلور ضمن 14.2 . اما في 34.2 فسنثبت القضية التالية:

إذا حقق التابع $y(x)$ المساواة التالية في ساحة $G \subset R_n$ من اجل عدد m :

$$y(x+dx) = y(x) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, dx_i + \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \varphi_{ij}(x)\, dx_i\, dx_j + \ldots \tag{2}$$

$$\ldots + \frac{1}{m!} \sum_{i_1, \ldots, i_m=1}^{n} \varphi_{i_1, \ldots, i_m}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m} + o(|dx|^m)$$

حيث $\varphi_i(x)$ ، $\varphi_{ij}(x)$ معاملات مستمرة $o(|dx|^m)$ لا متناهي في الصغر منتظم، عندئذ يكون التابع $y = f(x)$ قابلا للإشتقاق في الساحة G ، ويمثل التفكيك (2) تفكيك تايلور للتابع $y = f(x)$

تبين هذه القضية تكافؤ التعريف المباشر للمشتقات ذات الرتب العالية مع التعريف المعتمد على الفصل بين الحدود الاولى والثانية، الخ، لرتب الصغر في تزايدات التابع.

41.2 . سلوك تابع عددي بجوار نقطة معطاة بتقدير لا متناهيات في الصغر من راتب اكبر من اثنين.

أ. من اجل $m = 2$، يمثل دستور تايلور تعريف تابع قابل للاشتقاق ويعين الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع.

من اجل $m = 1$، يعين دستور تايلور ذي الشكل:

$$y(a+dx) - y(a) - dy(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 y(a)}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i\, dx_j + o(|dx|^2) \tag{1}$$

الجزء التربيعي الرئيسي لما يتبقى بعد فصل الجزء الخطي الرئيسي من تزايد التابع. يُعطي هذا الجزء التربيعي الرئيسي بواسطة الشكل التربيعي:

$$Q(dx) = \frac{1}{2} \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 y(a)}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i\, dx_j \tag{2}$$

ب. يمكن ان يكون الشكل (2) موجبا من اجل كل $dx \neq 0$ كما هو الحال مثلا في:

$$Q(dx) = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

إذا كان الشكل التربيعي $Q(dx) = \sum_{i, j=1}^{n} q_{ij}\, dx_i\, dx_j$ موجبا، نرمز بـ $C > 0$ لقيمته الصغرى على سطح كرة الوحدة $|dx| = 1$، عندئذ يكون

$$Q\left(\frac{dx}{|dx|}\right) = \sum_{i, j=1}^{n} q_{ij} \frac{dx_i\, dx_j}{|dx|^2} \geqslant C \quad \text{لأن} \quad \left|\frac{dx}{|dx|}\right| = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$Q(dx) = \sum_{i, j=1}^{n} q_{ij}\, dx_i\, dx_j \geqslant C\,|dx|^2$$

وبالتالي، بمجرد ان تكون التفاضلية الثانية $d^2y\,(a)$ شكلا تربيعيا موجبا بالنسبة لـ dx فإننا نحصل على: من اجل $\varepsilon > 0$ معطى ومن اجل كل $dx \neq 0$ صغير بكفاية فإن:

$$\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2 y\,(a)}{\partial x_i\, \partial x_j} dx_i\, dx_j + o\,(|dx|^2) \geqslant (C - \varepsilon)\,|dx|^2 \geqslant C_1\,|dx|^2 > 0$$

إذن:

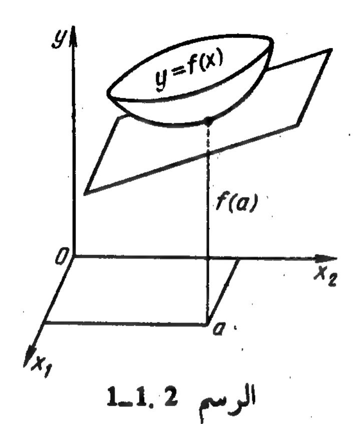
$$\Delta y - dy > 0, \qquad \Delta y > dy$$

يعني ذلك أن بيان التابع $y = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ بجوار النقطة $x = a$ يقع فوق المستوى الماس:

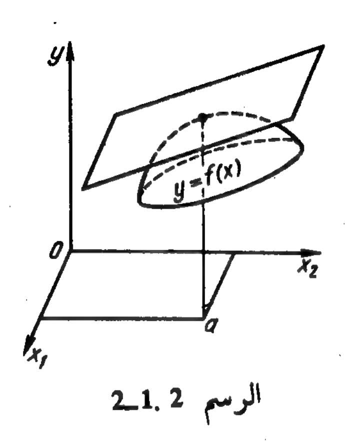
$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y\,(a)}{\partial x_i} dx_i$$

(راجع 62.1 ـ ب، وانظر الرسم 2.1ـ1).

ج. بطريقة مماثلة، إذا كان الشكل $d^2y\,(a)$ سالبا من اجل كل $dx \neq 0$ (مثلا $d^2y = -\sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$) فإن لدينا $\Delta y < dy$ من اجل $dx \neq 0$ صغير بكفاية، وعليه يقع بيان التابع $y = f\,(x_1, \ldots, x_n)$ تحت المستوى الماس (بجوار النقطة $x = a$) [انظر الرسم 2.1 ـ 2].

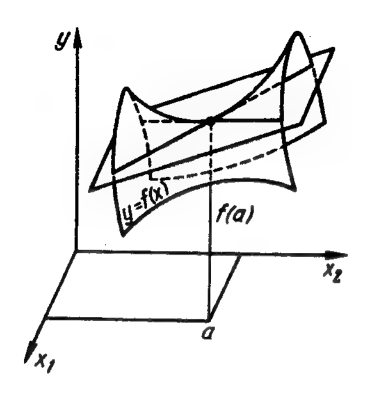


الرسم 2 .1_1



الرسم 2 .1_2

د . يمكن ان يكون الشكل التربيعي $d^2y\ (a)$ موجبا من اجل بعض القيم لـ dx وسالبا من اجل قيم اخرى(مثل الشكل $\left(d^2y\ (a) = \sum_{i=1}^{m} dx_i^2 - \sum_{j=m+1}^{n} dx_j^2 \right.$ يعني ذلك أن لدينا $\Delta y > dy$ من اجل بعض القيم لـ dx ولدينا $\Delta y < dy$ من اجل قيم اخرى. من الناحية الهندسية، فإن بيان التابع $y = f\ (x)$ بجوار النقطة $x = a$ سيكون في شكل سرج يقع جزء منه فوق المستوى الماس والجزء الآخر تحت هذا المستوى.



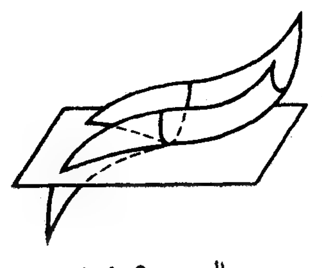
الرسم 2 .1_3

ر . هناك حالات منحلة يكون فيها الشكل $d^2y\ (a)$ ، مع أنه غير سالب (أو غير موجب) منعدما على مستقيم (أو على مجموعة مستقيات)، عندئذ لا نستطيع دراسة سلوك بيان التابع $y\ (x)$ على هذا المستقيم (أو على هذه

المستقيمات) اعتمادا على التفاضلية الثانية، فنلجأ في هذه الحالة الى التفاضليات الموالية.

نفرض مثلا ان $y = y(x) \equiv y(x_1, x_2)$ و $d^2y \geqslant 0$ وان هناك مستقيما وحيدا في المستوى (x_1, x_2) نرمز له بـ l ، (بجوار نقطة معطاة $a = (a_1, a_2)$) تتحقق عليه المساواة $d^2y = 0$.

عندئذ يكون السطح $y = y(x)$، بجوار النقطة a ، في شكل ميزاب مصب يمتد على المستقيم l . إذا اخذنا بعين الاعتبار اللامتناهيات في الصغر من الرتب العالية يمكن ان يكون للميزاب انحناء في اتجاه المستقيم l ، وهكذا عندما يكون $d^3y \neq 0$ على المستقيم l فإن بيان التابع $y(x)$ يمر، وفق المستقيم l، من جهة الى الجهة الاخرى من المستوى الماس (لان الشكل الفردي d^3y يغيّر اشارته على طول l). ذلك ما يتحكم في الشكل المنحني للميزاب (الرسم 2 .1 ـ 4).



الرسم 2 .1_4

س. هناك قاعدة جبرية (قاعدة سيلفستر Sylvester) تسمح بالتعرف مباشرة، حسب معاملات الشكل التربيعي

$Q(\xi) = \sum_{i, j=1}^{n} q_{ij}\xi_i\xi_j$ ، عن الحالة التي تتحقق من بين الحالات السابقة الذكر. تتطلب هذه القاعدة حساب n معينا:

$$\delta_1 = q_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_n = \begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

تقول قاعدة سيلفستر: إذا كانت كل المعينات δ_1 ، ...، δ_n موجبة فإن الامر كذلك فيما يخص الشكل ($Q(\xi)$) ، وإذا كان $\delta_1 < 0$، $\delta_2 > 0$، $\delta_3 < 0$ .. فإن الشكل $Q(\xi)$ سالب، وإذا كانت كل الاعداد δ_1 غير منعدمة واشاراتها موزعة بكيفية تخالف الترتيب السالف الذكر، فإن اشارة الشكل $Q(\xi)$ غير ثابتة. اما إذا كان احد المعينات δ_k منعدما فإن مقياس سيلفستر لا يجيب على السؤال المطروح، ينبغي في هذه الحالة القيام بدراسة اكثر تفصيلا، يجد القارىء برهان قاعدة سيلفستر ضمن ل. 69. 7 .

نستطيع ان نبين ايضا بان اشارة الشكل $Q(\xi)$ غير ثابتة عندما يكون واحد على الاقل من المعيناة δ_2 ، δ_4 ، δ_6 ، ... سالبا (انظر التمرين 1)

ص. **مثال:** ليكن $y = f(x_1, x_2) = 3x_1x_2 - x_1^3 - x_2^3$. لدينا في هذه الحالة:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_2 - 3x_1^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_1 - 3x_2^2, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -6x_1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -6x_2, \\
d^2y = -6x_1 (dx_1)^2 + 2\cdot 3\, dx_1\, dx_2 - 6x_2 (dx)^2, \\
\delta_1 = -6x_1, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} -6x_1 & 3 \\ 3 & -6x_2 \end{vmatrix} = 9(4x_1x_2 - 1).
\end{gathered} \tag{4}
$$

يبين الرسم 2 .1_5 الساحات في المستوى x_1, x_2 التي تكون فيها الكميتان δ_1 و δ_2 غير منعدمتين، إذن يمكن اعتمادا على قاعدة سيلفستر ستنتاج بعض القضايا الخاصة بسلوك التابع $f(x_1, x_2)$.

نعتبر النقاط التي لا تنطبق عليها قاعدة سيلفستر. نلاحظ في البداية ان لدينا على المحور x_2 : $\delta_1 = -6x_1 = 0$. إذا استبدلنا الآن دوريْ الإحداثيتين فيما بينهما واعتبرنا x_2 بمثابة الاحداثية الاولى فإن لدينا في هذه الحالة $\delta_1 = -6x_2 \neq 0$ وعليه توافق كل نقطة $(0, x_2)$، حيث $x_2 \neq 0$ ، نقطة سرجية من البيان. اما عند النقطة $(0, 0)$ فإن تبديل محوريْ الاحداثيات فيما

بينهما لا يأتي بنتيجة، لكن لدينا هنا $d^2y = 6dx_1\, dx_2$ وهو شكل اشارته متغيرة، ولذا فإن البيان له شكل سرج في هذه النقطة ايضا بخصوص نقاط القطع الزائدي $4x_1x_2 = 1$، حيث $\delta_2 = 0$ ، فإن التفاضلية الثانية تصبح متناسبة مع المربع الكامل لشكل خطي:

$$d^2y = -6x_1\,(dx_1)^2 + 2\cdot 3\,dx_1\,dx_2 - 6x_2\,(dx_2)^2$$

$$= \begin{cases} -6\left(\sqrt{x_1}\,dx_1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\,dx_2\right)^2 & \text{pour } x_1 > 0 \\ 6\left(\sqrt{-x_1}\,dx_1 + \dfrac{1}{2\sqrt{-x_1}}\,dx_2\right)^2 & \text{pour } x_1 < 0. \end{cases}$$

يتطلب تحليل سلوك التابع على المستقيمات التي ينعدم عليها هذا الشكل الخطى اعتبار الحدود ذات الرتبة الثالثة. هذه المستقيمات هي:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sqrt{x_1}\,dx_1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}\,dx_2 = 0 \quad \text{أي} \quad dx_2 = 2x_1\,dx_1 \quad \text{من أجل} \quad x_1 > 0 \\ \sqrt{-x_1}\,dx_1 + \dfrac{1}{2\sqrt{-x_1}}\,dx_2 = 0 \quad \text{أي} \quad dx_2 = 2x_1\,dx_1 \quad \text{من أجل} \quad x_1 < 0 \end{cases}$$

يرمز هنا dx_1 و dx_2 الى تزايدات الاحداثيات على طول المستقيم (5). يمكن ان نضع $dx_1 = X_1 - x_1$، $dx_2 = X_2 - x_2$ حيث (x_1, x_2) نقطة من القطع الزائدي، و (X_1, X_2) هي النقطة الجارية للمستقيم، بحيث تأخذ معادلتنا (5) الشكل التالي:

$$X_2 - x_2 = 2x_1\,(X_1 - x_1)$$

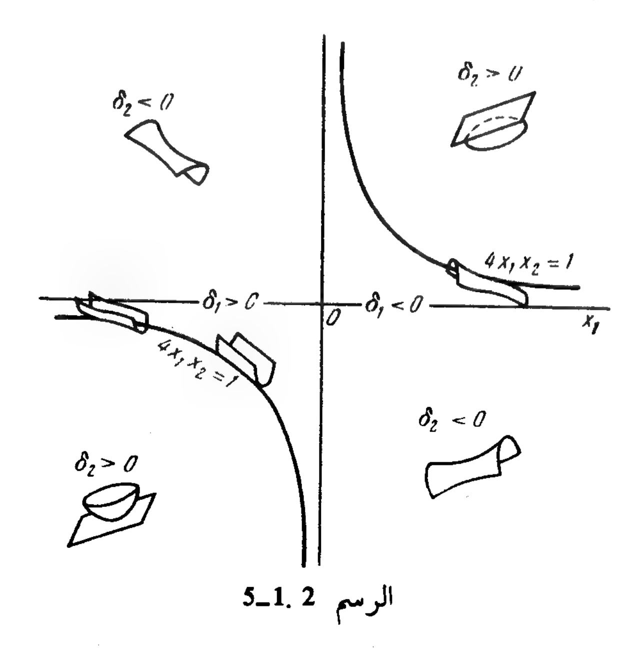
لمعرفة سلوك التابع $y\,(x_1, x_2)$ على طول هذه المستقيمات نشتق مرة اخرى المساواة (4):

$$d^3y = -12\,(dx_1)^3 - 12\,(dx_2)^3 = -12\,((dx_1)^3 + (dx_2)^3)$$

إذا كان $dx_2 = 2x_1\,dx_1$ فإن: $d^3y = -12\,(dx_1)^3\,(1 + 8x_1^3)$

نلاحظ ان الشكل d^3y غير منحل من اجل $x_1 = -1/2$ ويُمثل بيان التابع $y\,(x)$ بجوار هذه النقاط «ميزابا منحنياً» من النمط الوارد في الرسم 2 .1ـ4 . وإذا كان $x_1 \neq -1/2$ (إذن $x_2 = -1/2$ ايضا) فإن لدينا على طول المستقيم $dx_2 = -dx_1$: $dy = 0$: $d^2y = 0$ ، $d^3y = 0$ ، إذن فإن

كثير الحدود ذي الدرجة الثالثة $y(x)$ ثابت على هذا المستقيم، وبيان التابع $y(x)$ بجوار النقطة $(-1/2,-1/2)$ يمثل ايضا « ميزابا » لكنه بدون إنحناء في الاتجاه الطولاني.



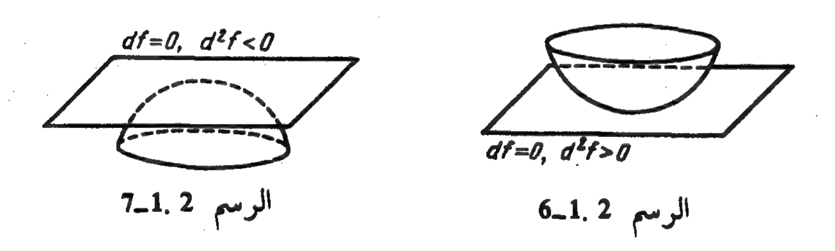
الرسم 2 .1_5

15. 2 . تسمح النتائج المحصل عليها لحد الآن بتقديم بعض المقاييس الهدف منها تصنيف النقاط المستقرة (1 .18 _).

أ . لتكن $a \in G$ نقطة مستقرة لتابع عددي $y = f(x): R_n \to R_1$

نفرض أن $f(x)$ يقبل الاشتقاق مرتين في الساحة G ، عندئذ لدينا $f'(a)=0$ ويكون المستوى الماس للسطح $y=f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ افقياً. لندرس عند النقطة a التفاضلية الثانية $\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ للتابع $f(x)$. إذا كان الشكل التربيعي $d^2f(a)$ موجبا فإن بيان التابع $f(x)$ يوجد، حسب 41. 2 _ ب، فوق المستوى الماس بجوار النقطة a ، بعبارة اخرى، لدينا $f(a+dx) \geqslant f(a)$ من اجل القيم الصغيرة بكفاية لـ $|dx|$ ، أي أن النقطة a نقطة قيمة صغرى محلية (الرسم 2 .1 _ 6) للتابع $f(x)$ ؛ إذا كان الشكل التربيعي $d^2f(a)$ سالبا فإننا نلاحظ بطريقة مماثلة ان النقطة a نقطة قيمة

عظمى محلية للتابع $f(x)$ (الرسم 1.2 ـ 7). إذا كان الشكل $d^2f(a)$ غير معرف أي انه يأخذ قيما سالبة وأخرى موجبة في كل جوار للنقطة a ، عندئذ لا تكون النقطة المستقرة a نقطة قصوى (الرسم 1.2 ـ 8)



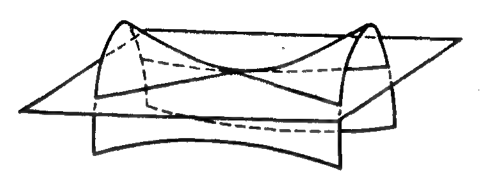
الرسم 1.2 ـ7 الرسم 1.2 ـ6

اما إذا انحل الشكل $d^2f(a)$ (إذا انعدم مثلا اينما كان) يمكننا دوما المحاولة بالتفاضليات ذات الرتب الاكبر من اثنين. الاّ اننا نفتقد في هذه الحالة الى مقاييس بسيطة مثل مقياس سيلفستر في حالة التفاضلية الثانية، وعليه فنحن مرغمون على اعتبار هذه التفاضليات مباشرة مثلما فعلنا في المثال السابق.

ب. **مثال**. تعين النقاط المستقرة للتابع $f(x)=3x_1x_2-x_1^3-x_2^3$ بواسطة المعادلتين:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}=3x_2-3x_1^2=0, \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}=3x_1-3x_2^2=0$$

هناك إذن نقطتان مستقرتان هما: $a_1^{(1)}=a_2^{(1)}=0$ و $a_1^{(2)}=a_2^{(2)}=1$ كنا عالجنا هاتين النقطتين في 18.1 ـ جـ ووجدنا ان ثانيتهما نقطة قيمة عظمى واولاهما ليست نقطة قيمة قصوى، وقد توصلنا لذلك بواسطة حسابات بسيطة شيئا ما. اما باستعمال التفاضلية الثانية وقاعدة سيلفستر فنصل الى هذه النتيجة مباشرة: تنتمي النقطة $a_1^{(2)}=a_2^{(2)}=1$ الى الساحة التي يكون فيها $\delta_1<0$ و $\delta_2\geq 0$ أي حيث الشكل $d^2f(a)$ سالب، وعليه تمثل هذه النقطة نقطة قيمة عظمى، ثم إن النقطة $a_1^{(1)}=a_2^{(1)}=0$ تقع في الساحة التي يكون فيها $\delta_2<0$ وبالتالي فهي ليست قصوى.



الرسم 2 .1-8

هكذا يتبين ان استعمال التفاضلية الثانية يمكن ان يختصر دراسة سلوك تابع بجوار نقطة مستقرة معطاة، اختصارا كبيراً.

61. 2 . يمكن تطبيق نفس الطرق على التوابع الضمنية.

أ . ليكن $y = y(x)$ تابعا معطى بالمعادلة:

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \quad (1)$$

نفرض أن شروط نظرية التابع الضمني 35. 1 محققة عند نقطة $\{a, b\} = \{a_1, \ldots, a_n, b\}$ وان التابع $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ يقبل الاشتقاق m مرة بالنسبة لجميع المتغيرات بجوار النقطة $\{a, b\}$ سنثبت في 63. 2 (في حالة اعم) ان التابع الضمني $y = y(x)$ يقبل هو ايضا مشتقات مستمرة، بما فيها المشتقات ذات الرتبة m، بجوار النقطة a بتطبيق هذه النظرية يمكن ايجاد كل تفاضليات التابع $y(x)$ عند النقطة $x = a$ بما فيها التفاضلية ذات الرتبة m وذلك دون حل المعادلة (1) بالنسبة لـ y. لنتبع الاستدلال الموالي. إذا وضعنا في المعادلة (1) حلها $y(x)$ مكان y، نحصل على تابع لـ n متغيراً $x_1, \ldots, x_n$ منعدم في جوار للنقطة a . إذن فإن كل تفاضليات هذا التابع منعدمة هي ايضا لنحسبها واحدة تلو الاخرى؟ علينا ان نتذكر عند حساب أولاها ان اعتبار y متغيرا مستقلا أو تابعا لمتغير آخر ليس ذا اهمية:

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial y} dy = 0$$

وبصفة خاصة:

$$\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y} dy = 0 \quad (2)$$

ومنه يأتي:

$$dy(a) = -\frac{1}{\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial y}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial x_i} dx_i \tag{3}$$

وهو ما كان بامكاننا كتابته ضمن 55.1 عند كنا نبحث عن المشتقات الجزئية لتابع ضمني.

ب. بصفة خاصة، لايجاد النقاط المستقرة للتابع $y(x)$ ، علينا ان نعتبر الجملة التالية المؤلفة من $n + 1$ معادلة لـ $n + 1$ مجهولا $x_1 = a_1$ ، .... $x_n = a_n$ ، $y = b$

$$\begin{cases} \Phi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \\ \frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \Phi(x_1, \ldots, x_n, y)}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

باشتقاق المعادلة (2) مرة اخرى وبمراعاة كون المتغيرات $x_1, \ldots, x_n$ مستقلة، بحيث ان $d^2x_i = 0$ (21.2 ـ ب)، وان y تابع نجد:

$$\begin{aligned} (5) \quad & d\left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_1}\right) dx_1 + \ldots + d\left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_n}\right) dx_n + \\ & + d\left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\right) dy + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} d^2y = \\ & = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 dx_1 + \ldots \\ & \ldots + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_n \partial x_1} dx_n dx_1 + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y \partial x_1} dy dx_1 + \ldots \\ & \ldots + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n + \ldots + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ & + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y \partial x_n} dy dx_n + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_1 \partial y} dx_1 dy + \ldots \\ & \ldots + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_n \partial y} dx_n dy + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} d^2y = 0 \end{aligned}$$

نضع هنا $x = a$, $y = b$ وبمراعاة (3) نحصل على:

$$d^2y(a) = -\frac{1}{\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}}\Big[\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial y} dx_i dy + \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial y^2} dy^2\Big] =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}}\Big[\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - \tag{6}$$

$$-\frac{2}{\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}}\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial y} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x_j} dx_i dx_j +$$

$$+\frac{\frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}\right)^2}\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x_i} \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial x_j} dx_i dx_j\Big]$$

إذا كانت (a, b) نقطة مستقرة فإن $dy(a) = 0$ وتأخذ العلاقة (5) الشكل البسيط التالي:

$$\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y} d^2y(a) = 0$$

ومنه ينتج:

$$d^2y(a) = -\frac{1}{\frac{\partial\Phi(a, b)}{\partial y}}\sum_{i, j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi(a, b)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{7}$$

وهو بالضبط الشكل التربيعي الذي يجب دراسته للتعرف على نمط النقطة المستقرة المعطاة.

بمواصلة اشتقاق المساواة (5) نصل الى الدساتير التي تعطى التفاضليات ذات الرتب العالية، لكننا لن نطيل في هذا الموضوع.

جـ. مثال. اوجد النقاط المستقرة للتابع $(R_1 \to R_1)$ $y = y(x)$ المعرف بالمعادلة:

$$\Phi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0 \tag{8}$$

للقيام بذلك، علينا ان نحل طبقا لـ b، الجملة المؤلفة من المعادلة (8) والمعادلة

$$\frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial x} \equiv 3x^2 - 3y = 0 \tag{9}$$

بازالة y نصل الى المعادلة من الدرجة السادسة: $x^3 + x^6 - 3x^3 = 0$

ومنه تأتي النقاط المستقرة: $x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt[3]{2}, \quad y_2 = \sqrt[3]{4}$

النقطة $(0, 0)$ لاتحقق فرض نظرية التابع الضمني ولذا نغض عليه الطرف نهتم إذن بالنقطة الثانية $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ونبحث عن التفاضلية الثانية للتابع $y(x)$ مباشرة بدل الاستناد على (6). لدينا:

$$3x^2\,dx + 3y^2\,dy - 3x\,dy - 3y\,dx = 0$$

نقسم المساواة السابقة على 3 ونشتقها مرة اخرى:

$$2x\,dx^2 + 2y\,dy^2 + y^2\,d^2y - dx\,dy - x\,d^2y - dy\,dx = 0$$

بما ان $dy = 0$ عند كل نقطة مستقرة فإن:

$$2x\,dx^2 + y^2\,d^2y - x\,d^2y = 0$$

ومنه:

$$d^2y = \frac{2x}{x - y^2}\,dx^2, \quad d^2y\,(\sqrt[3]{2}) = -2\,dx^2 < 0$$

وبالتالي يقبل التابع $y(x)$ قيمة عظمى محلية عند النقطة $x = \sqrt[3]{2}$.

71. 2 . يسمح استخدام التفاضليات الثانية ايضا، من الناحية النظرية، بتصنيف النقاط المستقرة في المسائل الخاصة بالقيم القصوى المقيدة لتابع $y = f(x) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ مـــــــع شرط واحـــــــد $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$ $(\varphi: R_n \to R_1)$ في ساحة $G \subset R_n$. لتكن $x = a = (a_1, \ldots, a_n)$ نقطة مستقرة لهذه المسألة؛ نفرض انه نقطة عادية لسطحين $\varphi(x) = c$ $f(x) = b$ $(= f(a))$ ؛ إن هذه الشروط متوفرة، مثلا، عندما $\frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \neq 0$, $\frac{\partial \varphi(a)}{\partial x_n} \neq 0$، وهو ما نفرضه محقق. تبين العلاقات 37. 1 (2) التي يمكن كتابتها على الشكل:

$$\text{grad}\, f(a) = \lambda\, \text{grad}\, \varphi(a)$$

ان سطحي المستوى $\varphi = c$ $f = b$ لهما مستو ماس مشترك عند النقطة $x = a$ بحل المعادلتين $f = b$ $\varphi = c$ بالنسبة لِـ x_n نصل الى معادلتي هذين السطحين:

$$x_n = g(x'), \quad x_n = \psi(x'), \quad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

زيـــادة على ذلـــك لـــدينـــا : $g(a') = \psi(a') = a_n$ مـــن اجـــل $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$. نفرض ايضا ان $\frac{\partial f(a)}{\partial x_n} > 0$ ، (إن لم يكن الامر كذلك نعكس اتجاه محور x_n).

نفـــرض بعـــد ذلـــك ان التـــابعين $f(x)$ ، $\varphi(x)$ ، وبـــالتـــالي $g(x')$ ، $\psi(x')$ (2.16) ، يقبلان الاشتقـاق مـرتين. عنـدئـــذ تتحقـــق العلاقات :

$$(1)\quad \begin{cases} g(x') \equiv g(a'+h') = g(a') + (g'(a'), h') + \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 g(a')}{\partial x_i \partial x_j} h'_i h'_j + o(|h'|^2), \\ \psi(x') \equiv \psi(a'+h') = \psi(a') + (\psi'(a'), h') + \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \psi(a')}{\partial x_i \partial x_j} h'_i h'_j + o(|h'|^2). \end{cases}$$

نظرية : نعتبر ، ضمن الافتراضات السابقة ، الشكل التربيعي :

$$(2)\qquad Q(h', h') = \sum_{i, j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 g(a')}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \psi(a')}{\partial x_i \partial x_j} \right) h'_i h'_j$$

• إذا كان هذا الشكل معرفا موجبا فإن a نقطة قيمة عظمى مقيدة للتابع $f(x)$ مع الشرط $\varphi(x) = c$؛ وإذا كان معرفا سالبا فإن a نقطة قيمة صغرى مقيدة للتابع $f(x)$ ؛ اما اذا كان الشكل غير معرف فإن a ليست نقطة قيمة قصوى مقيدة للتابع $f(x)$.

البرهان. نفرض ان الشكل (2) معرف موجب. عندئذ بمراعاة كوْن $g(a') = \psi(a')$، $g'(a') = \psi'(a')$ مـن اجـل $0 \neq h' = \{h_1, \ldots, h_{n-1}\}$ صغير بكفاية ، نجد ان $g(x') > \psi(x')$ (راجع 41.2 ـ ب). ثم ينتج من الشرط $\frac{\partial f(x)}{\partial x_n} > 0$ (القائم من اجل كل x قريب بكفاية من a) ان :

$$f(x', \psi(x')) < f(x', g(x')) \qquad ((x' \neq a') \text{ حيث })$$

نلاحظ ان النقطة $(x', \psi(x'))$ تنتمي الى السطح $\varphi(x) = c$ وان النقطة $(x', g(x'))$ تنتمي الى السطح $f(x) = b$ ، بحيث ان الطرف الايمن من المتراجحة يساوي b . نرى إذن ان المتراجحة $f(x) < b$ محققة اينما كان في تقاطع السطح $\varphi(x) = c$ مع جوار صغير بكفاية للنقطة a (ماعدا

في النقطة a ذاتها). ينتج من ذلك ان النقطة a نقطة قيمة عظمى مقيدة للتابع $f(x)$ مع الشرط $\varphi(x) = c$. يتم البرهان على النقطتين الاخريين من النظرية بطريقة مماثلة. انتهى برهان النظرية.

في الحالة التي يكون فيها القيد $\varphi(x) = c$ خطيا (حتى من اجل: $\varphi: R_n \to R_k$) هناك مقياس يعين النمط الذي تنتمي اليه القيمة القصوى المقيدة حسب الاصغريات القطرية لمعين مشكل من الكميات $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$ والمعاملات الواردة في معادلات القيد (ل.7. 89).

§ 2. 2 . التعريف العام للمشتقات ذات الرتب العالية

12. 2 ـ أ . كما سبق ان راينا بخصوص تابع $f(x): G \subset X \to Y$ فإن المؤثر الخطي $f'(a): X \to Y$ معرف بالمساواة:

$$f(a + h) - f(a) = f'(a)h + o(h), \quad h \in X$$

لنفرض ان $f'(x)$ موجود عند كل نقطة $x \in G$. عندئذ يكون $f'(x)$ تابعا يصل كل نقطة $x \in G$ بمؤثر $Y \to X$. نرمز بـ Y_1 للفضاء $L(X, Y)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المستمرة من X في Y (وبـ Y_0 للفضاء Y نفسه). هكذا فإن $f(x)$ يصبح تابعا لـ x ويأخذ قيمه في Y_0 ويصبح $f'(x)$ تابعا لـ x ويأخذ قيمه في Y_1 .

نعرف الآن المؤثر $f''(a)$ بالمساواة (إن كانت محققة):

$$f'(a + h) - f'(a) = f''(a)h + o(h), \quad h \in X$$

عندئذ يكون $f''(a)$ مؤثرا خطيا مستمرا من X في Y_1 . نرمز بـ Y_2 للفضاء $L(X, Y_1)$ المؤلف من كل المؤثرات الخطية المستمرة من x في Y_1. إن كان $f''(x)$ موجودا من اجل كل $x \in G$ فهو تابع x ويأخذ قيمه في Y_2 إذا واصلنا بنفس الطريقة فإننا نأتي الى التعريف العام التالي:

تعريف: ليكن $Y_p = L(X, Y_{p-1})$ ، (حيث $p = 1,2,\ldots$)؛ نقول عن مؤثر خطي $f^{(p)}(a) : X \to Y_{p-1}$ إنه **المشتق من الرتبة p للتابع** $f(x)$ $(G \subset X \to Y_0)$ عند نقطة $x = a$ إذا تحققت العلاقة التالية:

$$f^{(p-1)}(a+h) - f^{(p-1)}(a) = f^{(p)}(a)\,h + o(h) \quad (h \in X) \qquad (1)$$

إن كل حدود العلاقة (1) تنتمي الى Y_{p-1} . وهكذا فإن $f^{(p)}(a) \in Y_p$ يمكن قصد الاختصار، ان نتخذ الرمز التالي:

$$f^{(p)}(a) = [f^{(p-1)}(x)]'\,|_{x=a} \qquad (2)$$

وبذلك يرد تعريف المشتق من الرتبة p ، في آخر المطاف، الى تعريف المشتق الاول.

ب ـ نقول عن تابع $y = f(x)$ $(G \subset X \to Y)$ له مشتقات متوالية عند النقطة $x = a \in G$ حتى الرتبة p ، بما فيها هذه الرتبة ذاتها، انه **يقبل الاشتقاق حتى الرتبة أ عند النقطة** a ؛ عندما تتحقق هذه الخاصية عند كل نقطة من الساحة $G \in X$ نقول عن التابع $f(x)$ إنه يقبل الاشتقاق حتى الرتبة أ (أو أ مرة) في الساحة G. نقول عن تابع $f(x)$ قابل عند النقطة $x = a$ (عند كل نقطة $x \in G$) للإشتقاق من اجل كل رتبة $p = 1, 2, \ldots$ إنه **يقبل الاشتقاق لا نهائيا** عند النقطة a (في الساحة G).

ج. إذا كان تابع $f(x)$ قابلا للإشتقاق k مرة عند نقطة a وكان مشتقة من الرتبة k يقبل الاشتقاق m مرة عند نفس النقطة فإن التابع $f(x)$ يقبل الاشتقاق $k + m$ مرة عند النقطة $x = a$، ولدينا:

$$f^{(k+m)}(a) = [f^{(k)}(x)]^{(m)}\,|_{x=a} \qquad (3)$$

ذلك انه إذا كان $m=1$ فإن القضية ترد الى تعريف تابع يقبل الاشتقاق $k + 1$ مرة؛ في الحالة العامة فإن النتيجة تثبت بدون صعوبة بطريقة التدريج ان عكس القضية السابقة يقوم مباشرة: إذا كان تابع $f(x)$ قابلا للإشتقاق $k + m$ مرة عند النقطة $x = a$ فإن $f^{(k)}(x)$ يقبل

الاشتقاق m مرة والدستور (3) قائم.

22.2 . اذا كان $X = R_1$ فإن كل مؤثر خطي $Y \to X$ يطابق بطبيعة الحال عنصراً من الفضاء Y بحيث ان $\cdots = Y_2 = Y_1 = Y_0 \equiv Y$ (ج-41.1) بالتالي، إذا كان $f(x)$ تابعا لمتغير حقيقي x قيمه في الفضاء Y فإن كل المشتقات ... $f'(x), f''(x)$ تأخذ هي الاخرى قيمها في الفضاء Y (رأينا ذلك في ي 46.12).

32.2 . نعـــالـــج الحالـــة $X = R_n, Y = R_1$. لدينا هنا $Y_1 = L(R_n, R_1) = R_n, Y_2 = L(R_n, R_n) = R_{n^2}$ الخ. يمكن تعيين المؤثر $f'(x)$ بواسطة n مركبة:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}$$

يعمل هذا المؤثر على شعاع الازاحة $h = dx = \{dx_1, \ldots, dx_n\}$ حسب الدستور 22.1 (5):

$$f'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i.$$

إن وجود $f'(x)$ يستلزم وجود المشتقات المذكورة (لكن العكس غير صحيح؛ راجع التمرين 3، الفصل 1).

إن وجود واستمرار $f'(x)$ يكـافئـان وجـود واستمـرار المشتقـات المذكورة (1.74 ـج).

بتطبيق نفس الاستدلالات على المشتق $f''(x)$ نحصل على ان:

وجود $f''(x)$ يعني قابلية كل التوابع $\frac{\partial f'(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f'(x)}{\partial x_n}$ للاشتقاق، وهو يستلزم، بصفة خاصة، وجود كـل المشتقـات الثـانيـة $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ (لكـن العكس غير صحيح!)؛ ثم إن وجود واستمرار $f''(x)$ في ساحة G يكافئان وجودواستمرار كل المشتقات الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ في الساحة

G نواصل بنفس الطريقة فنرى ان وجود المؤثر $f^{(p)}(x)$ يعني قابلية كل المشتقات الجزئية لـ $f(x)$ للإشتقاق حتى الرتبة $p-1$ وبصفة خاصة فهو يستلزم وجود كل المشتقات الجزئية من الرتبة p (لكن العكس غير صحيح)، ثم إن وجود واستمرار المؤثر $f^{(p)}(x)$ في ساحة G يكافئان وجود واستمرار كل المشتقات الجزئية من الرتبة p للتابع $f(x)$ في الساحة G.

42.2 . الاشكال المتعددة الخطية.

أ. ليكن $A_1: X \to Y = Y_0$ مؤثرا خطيا و $h_1 \in X$ شعاعا، يمكن تكوين الشعاع $A_1h_1 \in Y_0$. نشكل بواسطة مؤثر خطي $A_2: X \to Y_1 = L(X, Y_0)$ وشعاع $X \ni h_2$ المؤثر $L(X, Y_0) \ni A_2h_2$، ثم نشكل بواسطة الشعاع $X \ni h_1$ العبارة $(A_2h_2)h_1 \in Y$. إنه شكل ثنائي الخطية للشعاعين h_1 و h_2 يأخذ قيمه في Y_0. نواصل بنفس الطريقة؛ باستخدام مؤثر خطي $A_p: X \to Y_{p-1} = L(X, Y_{p-2})$ والاشعة $h_1, \ldots, h_p$ من الفضاء X، فنجد العبارة:

$$A_ph_ph_{p-1} \ldots h_1 \equiv (\ldots((A_ph_p)h_{p-1}) \ldots h_1) \in Y_0$$

التي تمثل شكلا p الخطية للاشعة $h_1, \ldots, h_p$ يأخذ قيمه في Y_0.

ب. إذا كان $A_p: X \to Y_{p-1}$ مؤثرا خطيا محدودا فإن تطبيق التعريف العام لنظيم مؤثر (ي 17.12ـ ب) يعطينا التقدير:

$$|A_ph_ph_{p-1} \ldots h_1| \leqslant \|A_ph_p \ldots h_2\| \, |h_1| \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant \|A_p\| \, |h_p| \ldots |h_1|$$

ومنه

$$\sup_{|h_1| \leqslant 1, \ldots, |h_p| \leqslant 1} |A_ph_p \ldots h_1| \leqslant \|A_p\| \qquad (1)$$

من جهة اخرى، ليكن θ عدداً مثبتا في المجال المفتوح $0, 1$ عندما يكون مؤثر $A_p: X \to Y_{p-1}$ معطى فإنه يوجد شعاع $h_p, \ |h_p| = 1$ بحيث $\|A_ph_p\| \geqslant \theta \|A_p\|$ ثم يوجد شعاع h_{p-1}، $|h_{p-1}| = 1$ بحيث $\|A_ph_ph_{p-1}\| \geqslant \theta \|A_ph_p\| \geqslant \theta^2 \|A_p\|$؛ نواصل هذا الإنشاء فنجد

متتالية $h_p, \ldots, h_1$ مؤلفة من الاشعة التنظيمية (او المتجانسة) تتحقق من اجلها المتراجحة:

$$|A_p h_p h_{p-1} \ldots h_1| \geqslant \theta^p \| A_p \|$$

ينتج من ذلك ان:

$$\sup_{|h_1|\leqslant 1, \ldots, |h_p|\leqslant 1} |A_p h_p \ldots h_1| \geqslant \theta^p \| A_p \|$$

وبما ان $\theta \in (0, 1)$ كيفي فإن:

$$\sup_{|h_1|\leqslant 1, \ldots, |h_p|\leqslant 1} |A_p h_p \ldots h_1| \geqslant \| A_p \| \qquad (2)$$

بمقارنة (1) و (2) نجد ان:

$$\| A_p \| = \sup_{|h_1|\leqslant 1, \ldots, |h_p|\leqslant 1} |A_p h_p \ldots h_1|$$

جـ . إذا وضعنا $h_1 = \ldots = h_p = h$ نحصل على شكل من الدرجة p

$$A_p h \ldots h$$

نقول عن شكل $A_p h_p \ldots h_1$ إنه p **شكل متناظر** اذا لم تتغير قيمته لدى اجراء اي تبديل بين الاشعة $h_p, \ldots, h_1$ يمكن ايجاد قيم شكل متعدد الخطية متناظر $A_p h_p \ldots h_1$ انطلاقا من قيم الشكل الموافق له ذي الدرجة p وهو $A_p h \ldots h$ هاهي طريقة لذلك التي قد لا تكون احسن طريقة ممكنة. لتكن الاشعة $h_p, \ldots, h_1$ اشعة معطاة نعتبر قيمة الشكل ذي الدرجة p : $A_p h \ldots h$ عند الشعاع $X \ni h = h_1 + \ldots + h_p$:

$$(\mathrm{I}) = A_p (h_1 + \ldots + h_p) \ldots (h_1 + \ldots + h_p) =$$
$$= \sum_{(k)} c_{k_1 \ldots k_p} A_p \underbrace{h_p \ldots h_p}_{k_p \text{ fois}} \ldots \underbrace{h_1 \ldots h_1}_{k_1 \text{fois}}$$

حيث (k) يرمز لمجموعة مرتبة مؤلفة من الاعداد $k_1 + \ldots + k_p = p$ ، $k_p \geqslant 0, \ldots, k_1 \geqslant 0$ اما المعاملات $c_{k_1 \ldots k_p}$ التي تشكلت بترتيب المتغيرات المستقلة (وهذا ممكن حسب فرض تناظر الشكل المعتبر)

وباختصار الحدود المتشابهة فهي اعداد صحيحة موجبة نعوض في الشكل (1) المتغير h_1 بـ $2h_1$ ، يظهر ذلك في كل حد من الشكل (1) عاملا 2^{h_1} يأخذ قيمته العظمى 2^p من الحد $A_p h_1 \ldots h_1$.

نرمز لهذا الشكل بـ(II). نلاحظ ان الفرق (II) - (I)2^p =(III) لا يضم حدا يحوي p مرة المتغير h_1 ، كما نلاحظ أن الحدود الاخرى مسبوقة دوماً بمعاملات صحيحة موجبة. نعوض مرة اخرى h_1 بـ $2h_1$ في الشكل (III) فنحصل على الشكل (IV) الذي تختلف معاملاته عن معاملات (III) بعوامل اس لاثنين، اما اكبر هذه العوامل فهو 2^{p-1} . اذن فإن الفرق (IV) — (III) 2^{p-1} = (V) لا يضم حدودا تحوى $p-1$ مرة المتغير h_1 . بعد اجراء نفس العملية $p-1$ مرة نصل الى الشكل (VI) الذي يقبل كل حد فيه معاملا صحيحا موجبا، وهو لا يحوى المتغير h_1 .اكثر من مرة واحدة بطريقة مماثلة يمكننا ازالة الحدود التي تحوي اكثر من مرة واحدة المتغيرات $h_2, \ldots, h_p$ من الشكل (VI) نصل اخيرا الى شكل (VII) معاملاته صحيحة موجبة يحوى كل حد منه، مرة على الاكثر كلا من المتغيرات $h_1, \ldots, h_p$. يعني ذلك ان الشكل VI يتألف من حد واحد.

$$(VII) = c_p A_p h_p \ldots h_1,$$

حيث c_p عدد صحيح موجب. من جهة اخرى يبين الانشاء السابق ان الشكل (VII) عبارة خطية لقيم الشكل $A_p h^{(i)} \ldots h^{(i)}$ ذي الدرجة p حيث $h^{(i)}$ اشعة مختارة اختيارا مناسبا $h^{(1)} = h_1 + \ldots + h_p$ ، $h^{(2)} = 2h_1 + \ldots + h_p$ ، $h^{(3)} = 2^2 h_1 + \ldots + h_p$ ، الخ) ينتهي بذلك برهان ما أكدناه.

د ـ نتيجة. إذا كان $A_p h_p \ldots h_1$ شكلا متناظرا -p فإن الشرط $A_p h \ldots h = 0$ (مهما كان $h \in X$) يستلزم $A_p = 0$. ينتج بالفعل من $A_p h \ldots h = 0$ ومن ج ان $A_p h_p \ldots h_1 = 0$ من اجل كل $h_1, \ldots, h_p$

في X، لدينا حسب ب: $\|A_p\| = 0$.

ر. نتيجة من اجل كل p، يوجد ثابت $C_p > 0$ بحيث:

$$\|A_p\| = \sup_{|h_1|\leqslant 1, \ldots, |h_p|\leqslant 1} |A_p h_p \ldots h_1| \leqslant C_p \sup_{|h|\leqslant 1} |Ah \ldots h|$$

وهذا من اجل كل p شكل $A_p h_p \ldots h_1$

بالفعل يمكن، حسب ج، وضع كل p شكل $A_p h_p \ldots h_1$ في صيغة عبارة خطية للأشكال $h^{(i)} \ldots A_p h^{(i)}$ من الدرجة p بحيث تصبح الاشعة $h^{(i)}$ منتمية الى كرة مثبتة، ومنه يأتي التقدير:

$$|A_p h_p \ldots h_1| \leqslant C_p \sup_{|h|\leqslant 1} |A_p h \ldots h|$$

نلاحظ إنه بالإمكان تقييم الثابت C_p إن اتبعنا بتفهم خطوات برهان ج. إن عدد حدود العبارة الخطية المنشأة ليس اكبر من p^2 ثم ان نظيم الاشعة $h^{(i)}$ لايتجاوز $2^p p$ والمعاملات لاتتجاوز $2p^3$، ومنه يأتي:

$$C_p \leqslant 2^{p^3} \cdot 2^p \cdot p^3$$

س. نستطيع تدعيم النتيجة د كما يلي:

ليكن $A_p h_p \ldots h_1$ p شكلا متناظرا. نفرض ان:

$$A_p h \ldots h = o(|h|^p)$$

من اجل $h \to 0$، اي اننا نستطيع من اجل $\varepsilon > 0$ ايجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|A_p h \ldots h| \leqslant \varepsilon |h|^p \qquad (3)$$

وذلك عندما $|h| < \delta$. عندئذ يكون $A_p = 0$.

بالفعل، إذا كان $A_p \neq 0$ فإنه يوجد، حسب د، شعاع $h_0 \in X$ يحقق $A_p h_0 \ldots h_0 = l \neq 0$ لدينا إذن على نصف المستقيم $h = th_0$ $(0 < t < \infty)$:

$$A_p h \ldots h = t^p A_p h_0 \ldots h_0 = t^p l = |h|^p \frac{l}{|h_0|^p}$$

وهو ما يناقض (3)؛ لذا فإن $A_p = 0$.

52.2 . التفاضليات من الرتب العالية .

نفرض ان تابعا$(G \subset X \to Y)$ $y = f(x)$ يقبل الاشتقاق p مرة عند $x = a$ يمكن بواسطة المؤثر $f'(a): X \to Y$ وشعاع $h \in X$ تكوين الشكل الخطي:

$$df(a) = f'(a)\, h$$

يمثل هذا الشكل التفاضلية الاولى للتابع $f(x)$ عند $x = a$ الموافقة للإزاحة h (32.1). يمكننا بعد ذلك بواسطة المؤثر $f''(a): X \to Y_1$ وشعاعين h_1 و h_2، تكوين الشكل الثنائي الخطية $f''(a)\, h_2 h_1$. إن الشكل التربيعي الموافق له هو

$$f''(a)\, hh = d^2 f(a)$$

يسمى التفاضلية الثانية للتابع $f(x)$ عند $x = a$ الموافقة للإزاحة h .

ننشيء بهذه الطريقة التفاضليات كلها ومن بينها التفاضلية من الرتبة p :

$$d^p f(a) = f^{(p)}(a)\, h \ldots h$$

التي نحصل عليها من الشكل p - الخطية $f^{(p)}(a)\, h_p \ldots h_1$ من اجل

$$h_1 = \ldots = h_p = h$$

ب - لنبحث عن عبارات هذه التفاضليات من اجل تابع $y = f(x): R_n \to R_1$ بوضع $h_1 = (dx_1^{(1)}, \ldots, dx_n^{(1)})$ نحصل في هذه الحالة على:

$$df(a) = f'(a)\, h_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i}\, dx_i^{(1)}$$

ليكن الآن $h_2 = (dx_1^{(2)}, \ldots, dx_n^{(2)})$. عندئذ :

$$f''(a)\, h_2 h_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f'(a)}{\partial x_j}\, dx_j^{(2)} \right) h_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_j^{(2)}\, dx_i^{(1)}$$

وهو ما يؤدي، من اجل $h_1 = h_2 = h = (dx_1, \ldots, dx_n)$ ، الى نفس العبارة للتفاضلية الثانية للتابع $f(x)$ عند النقطة a الواردة ضمن 21.2 :

$$d^2f(a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

بطريقة مماثلة، وباعتبار التفاضلية ذات الرتبة p للتابع $f(x)$ عند $x = a$ نعود فنجد من جديد العبارة الواردة في 21.2 .

62.2 . المشتقات الجزئية ذات الرتب العالية والتفاضليات الجزئية .

نفرض ان الفضاء X يكتب على شكل مجموع مباشر لـ q فضاء جزئي مغلق $X_1 + \ldots + X_q$ بطبيعة الحال، فإن كل شعاع $x \in X$ يكتب على الشكل $x = x_1 + \ldots + x_q$ حيث $x_i \in X_i, i = 1, \ldots, q$, نفرض ان التابع $f(x): G \subset X \to Y$ يقبل الاشتقاق p مرة في الساحة G نعلم ان المؤثر $f'(a)$ يعمل من الفضاء X في الفضاء Y إن اقتصاره على الفضاء الجزئي X_i يطابق **المشتق الجزئي** $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ للتابع $f(x)$ بالنسبة للفضاء الجزئي X_i (74.1 ـ د). نلاحظ من التعريف نفسه ان هذا المؤثر مطبق على الاشعة $h_i \in X_i$ ثم إن التابع $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ معرف في الساحة G ويقبل ، مثل التابع $f'(x)$ الاشتقاق؛ نرمز لمشتقة الجزئي بالنسبة للفضاء الجزئي X_j بـ $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$. يعمل هذا المؤثر الاخير، بصفة طبيعية، على الاشعة $h_j \in X_j$. بمواصلة هذه العملية نصل الى تعاريف المشتقات الجزئية ذات الشكل $\frac{\partial^p f(x)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_p}}$ نعرف، من اجل هذه المؤثرات، العبارات

$\frac{\partial^p f(x)}{\partial x_{i_p} \ldots \partial x_{i_1}} h_{i_1} \ldots h_{i_p}$ حيث $h_{i_1} \in X_{i_1}, \ldots, h_{i_p} \in X_{i_p}$ المسماة التفاضليات الجزئية للتابع $f(x)$ بالنسبة للفضاءات الجزئية $X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}$ ومن اجل الازاحات $h_{i_1}, \ldots, h_{i_p}$.

تعمم هذه التعاريف تعاريف المشتقات الجزئية من الرتب العالية (11.2) والتفاضليات (21.2) لتابع ذي عدد منته من المتغيرات الحقيقية $(X = R_n)$.

§ 3.2 . خاصيات المشتقات ذات الرتب العالية

13.2 . ليكن A مؤثراً خطياً يطبق الفضاء X في الفضاء Y_{p-1} (42.2) بحيث يمكن اعتبار الشكل المتعدد الخطية

$$Ax_p \dots x_1, \quad x_1, \dots, x_p \in X \tag{1}$$

والشكل $Ax \dots x$ (حيث $x \in X$) من الدرجة p .

نظرية. إذا كان الشكل (1) متناظرا فإن التابع $f(x) = Ax \dots x$ يقبل الاشتقاق لا نهائيا ولدينا:

$$\left.\begin{aligned}
&f'(x) = pA\underbrace{x \dots x}_{p-1 \text{ fois}} \in Y_1, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f^{(k)}(x) = p(p-1)\dots(p-k+1)A\underbrace{x \dots x}_{p-k \text{ fois}} \in Y_k, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&f^{(p)}(x) = p!A \in Y_p, \\
&f^{(q)}(x) = 0 \quad (q > p).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

البرهان. بما ان الشكل $Ax_p \dots x_1$ متعدد الخطية فإن:

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) &= A(x+h)\dots(x+h) - Ax\dots x = \\
&= Ahx\dots x + Axh\dots x + Ax\dots xh + o(h)
\end{aligned}$$

ثم إن الشكل $Ax_p \dots x_1$ متناظر وعليه:

$$f(x+h) - f(x) = pA\underbrace{x \dots x}_{p-1 \text{ fois}}h + o(h)$$

إذن:

$$f'(x) = pA\underbrace{x \dots x}_{p-1 \text{ fois}}.$$

يمكننا مواصلة هذه العملية بالتدريج بافتراض ان الدساتير (2) تبقى قائمة من اجل الشكل $\underbrace{Ax \dots x}_{p-1 \text{ fois}}$ وبالتذكر، في حالة $p = 1$، ان النتيجة المطلوبة مثبتة في 13.1 ـ أ و ب.

إن القضايا ب، جـ، د الموالية قد اثبتت من اجل $p = 1$ في 23.1 أ، ب، ج، على التوالي. اما البراهين عليها من اجل $p = 1, 2, \dots$ فتثبت بسهولة بواسطة التدريج.

ب. إذا كان لدينا تابعان $f(x): V \subset X \to Y$ و $g(x): V \subset X \to Y$ يقبلان الاشتقاق p مرة عند $x = a \in V$، فإن الامر كذلك فيما يخص التابع $s(x) = f(x) + g(x)$ ولدينا: $s^{(p)}(a) = f^{(p)}(a) + g^{(p)}(a)$

بعبارة اخرى، لدينا من اجل كل $h \in X$:

$$s^{(p)}(a)\underbrace{h \ldots h}_{p \text{ مرة}} = f^{(p)}(a)\underbrace{h \ldots h}_{p \text{ مرة}} + g^{(p)}(a)\underbrace{h \ldots h}_{p \text{ مرة}}$$

ج. إذا كان تابع $y(x): V \to Y$ قابلا للإشتقاق أ مرة عند $x = a \in V$ وكان A مؤثرا خطيا مستمرا من Y في فضاء Z، فإن التابع $z(x) = Ay(x)$ يقبل هو الآخر الاشتقاق p مرة عند $x = a$ ولدينا $z^{(p)}(a) = Ay^{(p)}(a)$ اي ان

$$z^{(p)}(a)\underbrace{h \ldots h}_{p \text{ fois}} = Ay^{(p)}(a)\underbrace{h \ldots h}_{p \text{ fois}}$$

وذلك من اجل كل $h \in X$

د. ليكن Y المجموع المباشر للفضاءات الجزئية $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ بحيث انه كل تابع $y(x): V \to Y$ يقبل المركبات:

$$y_{(1)}(x): V \to Y_{(1)}, \ldots, y_{(n)}(x): V \to Y_{(n)}$$

إذا كان Y فضاء تاما والفضاءات الجزئية $Y_{(1)}, \ldots, Y_{(n)}$ مغلقة فإن قابلية التابع $y(x)$ للإشتقاق p مرة عند $x = a$ يستلزم ان الامر كذلك فيما يخص كل مركبة $y_{(j)}(x)$ (حيث $j = 1, \ldots, n$) اضافة الى ذلك لدينا:

$$y^{(p)}(x) = \{y^{(p)}_{(1)}(x), \ldots, y^{(p)}_{(n)}(x)\}$$

حيث يرمز { } الى المجموعة المرتبة المؤلفة من مركبات التابع $y^{(p)}(x): V \to Y_p$ (12.2 ـ أ) في التفكيك الطبيعي للفضاء Y_p الى مجموع مباشر (41.1 ـ ص).

$$Y_p = Y_{p(1)} + \ldots + Y_{p(n)}.$$

وبالعكس، بما ان كل المركبات $y_{(1)}(x), \ldots, y_{(n)}(x)$ تقبل الاشتقاق p مرة عند $x = a$ فإن الامر كذلك فيما يخص التابع $y(x)$

23.2 . تناظر المشتق الثاني.

ليكن $y = f(x)$ $(G \subset X \to Y)$ تابعا قابلا للإشتقاق مرتين. نكوّن الشكل الثنائي الخطية $f''(a)\,hk$ بالنسبة للشعاعين h و k من الفضاء X لنثبت ان هذا الشكل الثنائي الخطية متناظرا، اي ان العلاقة:

$$(1)\quad f''(a)\,hk = f''(a)\,kh$$

وذلك من اجل كل شعاعين h و k لهذا الغرض نكتب العبارة:

$$w = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a)$$

يمكن تناولها كتزايد للتابع:

$$\Phi(x) = f(x + k) - f(x)$$

عندما يتغير x من a الى $a + h$. من نظرية المتوسط 24.1 ـ د يأتي:

$$(2)\quad |\Phi(a+h) - \Phi(a) - \Phi'(a)\,h| \leqslant \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant 1} |\Phi'(a + \theta h) - \Phi'(a)|\,|h|$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، نبحث عن $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$|f'(a + h) - f'(a) - f''(a)\,h| \leqslant \varepsilon\,|h|$$

وذلك لما $|h| < \delta$.

نضع في الدساتير الموالية $|k| \leqslant \delta/2$ و $|h| \leqslant \delta/2$, ونرمز بـ: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ لكميات (اشعة، مؤثرات) نظيماتها اصغر من $\varepsilon(|h| + |k|)$.

لدينا: $\Phi'(x) = f'(x + k) - f'(x)$، اذن:

$$\begin{aligned}\Phi'(a + \theta h) &= f'(a + k + \theta h) - f'(a + \theta h) = \\ &= [f'(a + k + \theta h) - f'(a)] - [f'(a + \theta h) - f'(a)] = \\ &= [f''(a)(k + \theta h) + \varepsilon_1] - [f''(a)\,\theta h + \varepsilon_2] = f''(a)\,k + 2\varepsilon_3\end{aligned}$$

بطريقة مماثلة، لدينا:

$$\Phi'(a) = f'(a+k) - f'(a) = f''(a)\,k + \varepsilon_4$$

إذن:

$$\Phi'(a+\theta h) - \Phi'(a) = 3\varepsilon_5$$

ومنه يأتي:

$$\sup_{0\leqslant\theta\leqslant1} |\Phi'(a+\theta h) - \Phi'(a)|\,|h| \leqslant 3|\varepsilon_5|\,|h|$$

وهذا يعني ان الطرف الثاني في (2) لامتناهي الصفر من رتبة عالية بالنسبة الى $(|h| + |k|)^2$.

من جهة اخرى:

$$\Phi'(a)\,h = f''(a)\,kh + \varepsilon_4 h,$$

ومنه تأتي العلاقة:

$$|f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) - f''(a)\,kh| \leqslant$$
$$\leqslant 4\,|\varepsilon_6|\,|h|$$

نجري تبديلا بين h و k فنحصل على:

$$\|f''(a)\,hk - f''(a)\,kh\| \leqslant 8\varepsilon\,(|h| + |k|)^2.$$

وهكذا، من اجل كل h حيث $|h| \leqslant \delta/2$ ومن اجل كل k حيث $|k| \leqslant \delta/2$، لدينا:

$$\sup_{h,\,k} |f''(a)\,hk - f''(a)\,kh| \leqslant 8\varepsilon\delta^2$$

من اجل كل $k_0 \in X$ و $h_0 \in X$ لدينا:

$$\left|f''(a)\frac{\delta}{2}\frac{h_0}{|h_0|}\frac{\delta}{2}\frac{k_0}{|k_0|} - f''(a)\frac{\delta}{2}\frac{k_0}{|k_0|}\frac{\delta}{2}\frac{h_0}{|h_0|}\right| \leqslant 8\varepsilon\delta^2,$$

اي:

$$|f''(a)\,h_0k_0 - f''(a)\,k_0h_0| \leqslant 32\varepsilon\,|h_0|\,|k_0|$$

بما ان $\varepsilon > 0$ كيفي فإن:

$$f''(a)\,h_0k_0 - f''(a)\,k_0h_0 = 0,$$

وهو المطلوب.

ب ـ تناظر المشتقات المختلطة. نعتبر تابعا يقبل الاشتقاق مرتين $y = f(x)(G \subset X \to Y)$ معطى في ساحة G من المجموع المباشر $X = X_1 + X_2$ لفضاءين X_1 و X_2 عرفنا (62.2) المشتقين الجزئيين:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad و \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$$

المتطابقين مع اقتصاديْ المؤثر $f''(x)$ (62.2) الموافقين لهما. عندما يكون هذان المؤثران معطييْن يمكننا كتابة العبارتين:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 h_1 \quad و \quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \quad حيث \quad h_1 \in X_1 \quad و \quad h_2 \in X_2$$

وهما شعاعان من الفضاء Y.

بما ان لدينا، احسب أ:

$$f''(x)\, h_2 h_1 = f''(x)\, h_1 h_2.$$

وذلك مهما كان h_1 و h_2 في X، فإن لدينا بصفة خاصة المساواة:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} h_2 h_1 = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} h_1 h_2 \tag{3}$$

وذلك من اجل $h_1 \in X_1$ و $h_2 \in X_2$ المعتبرين.

ج ـ بخصوص تابع $f(x_1, x_2): R_2 \to Y$ ذي متغيرين عدديين x_1 و x_2 $(X_1 = X_2 = R_1)$ يأخذ المؤثران $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$ و $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$ عند كل نقطة $x = \{x_1, x_2\}$ قيمهما في نفس الفضاء Y، وتثبت المساواة (3) ان هذين القيمتين متساويتان:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} \tag{4}$$

إن العلاقة (4) قائمة حتما اذا وجد $f''(x)$ اي (32.2) إذا كان التابعان $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}$ و $\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}$ قابلين للإشتقاق يتضمن هذا الشرط بصفة خاصة وجود المشتقين $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}$ و $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}$ ؛ وبالتالي فإن النظرية المحصل

عليها هنا ذات طابع يخالف طابع النظرية 2 .11 ـ أ حيث اثبتت العلاقة (4) باستخدام خاصيات $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$ و $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1}$ فقط دون النظر الى المشتقات الثانية الاخرى. (وقد فرضنا مقابل ذلك، وجود هذه المشتقات في جوار للنقطة a واستمرارها عند النقطة a ؛ اما في النظرية العامة أ فقد تفادينا الافتراضات من هذا النوع).

د. تناظر المشتقات ذات الرتب العالية.

ليكن $y=f(x)\,(G \subset X \to Y)$ تابعا يقبل الاشتقاق أ مرة $(p \geqslant 2)$ عند $x=a$. لنثبت ان الشكل:

$$f^{(p)}(a)\,h_p \ldots h_1 \quad , \quad h_1, \ldots, h_p \in X$$

متناظر. نفرض ان هذه الخاصية قائمة من اجل كل تابع قابل للاشتقاق $p-1$ مرة. يمكن عندئذ كتابة:

$$f^{(p)}(a)\,h_p \ldots h_1 = g^{(p-1)}(a)\,h_{p-1} \ldots h_1 \tag{5}$$

حيث $g(x)=f'(x)\,h_p$ تابع يقبل الاشتقاق $(p-1)$ مرة عند $x=a$. وبالتالي يمكننا، بفضل فرض التدريج، تبديل المتغيرات $h_1, \ldots, h_{p-1}$ في العبارة (5) ثم إنه بالإمكان كتابة:

$$f^{(p)}(a)\,h_p \ldots h_1 = w'(a)\,h_1$$

حيث $w(x)=f^{(p-1)}(x)\,h_p \ldots h_2$ تابع قابل للإشتقاق عند $x=a$ ؛ نستطيع هنا اجراء اي تبديل لكل من المتغيرات $h_2, \ldots, h_p$. بما ان $p>2$، نرى ان كل تبديل للاشعة $h_p, \ldots, h_1$ تبديل جائز، وهو المطلوب.

2 .33. المشتقات ذات الرتب العالية لجراء معمم. نعتبر كما ورد في 1 .43 ـ ب، تابعين $x(t): G \to X$ و $y(t): G \to Y$ قابلين للاشتقاق في ساحة G من فضاء T، ونعتبر جداءهما المعمم $\zeta(t) = \langle x(t), y(t) \rangle : G \to Z$. نفرض هذه المرة ان هذين التابعين

يقبلان الاشتقاق p مرة ولنثبت ان الامر كذلك فيما يخص التابع $\zeta(t)$.

كنا وجدنا، بخصوص المشتق الاول للجداء $\langle x(t), y(t)\rangle$ ضمن 43. 1 ـ ب الدستور: $\zeta'(t) = \langle x'(t), y(t)\rangle + \langle x(t), y'(t)\rangle$

حيث ان المؤثرين الواردين في الطرف الايمن معرفان كما يلي:

$$\zeta'(t)\, dt = \langle x'(t)\, dt,\ y(t)\rangle + \langle x(t),\ y'(t)\, dt\rangle$$

نرى إذن ان هذين المؤثرين يمثلان جداءين معممين قابلين للاشتقاق بالنسبة لِـ t في الحالة $p \geqslant 2$. بتطبيق الرمز 43. 1 ـ ب بطريقة شكلية نجد:

$$(1)\quad \zeta''(t) = \langle x''(t),\ y(t)\rangle + \langle x'(t),\ y'(t)\rangle_1 + \\ + \langle x'(t),\ y'(t)\rangle_2 + \langle x(t),\ y''(t)\rangle$$

يرمز الدليلان 1 و 2 الى ان الحدود التي ورد فيها هذان الدليلان ليس لهما نفس المعنى، ويتبين ذلك بسهولة باستخدام التفاضليات:

$$(2)\quad \zeta''(t)\, h_2 h_1 = \langle x''(t)\, h_2 h_1,\ y(t)\rangle + \langle x'(t)\, h_2,\ y'(t)\, h_1\rangle + \\ + \langle x'(t)\, h_1,\ y'(t)\, h_2\rangle + \langle x(t),\ y''(t)\, h_2 h_1\rangle$$

إن الحدود الاربعة الواردة في الطرف الثاني من (1) جداءات معممة، وهو ما يسمح بمواصلة الاشتاق من اجل $p > 2$. بعد p اشتقاقا الى الدستور:

$$(3)\quad \zeta^{(p)}(t) = \langle x^{(p)}(t),\ y(t)\rangle + \langle x^{(p-1)}(t),\ y'(t)\rangle_1 + \ldots \\ \ldots + \langle x^{(p-1)}(t),\ y'(t)\rangle_p + \langle x^{(p-2)}(t),\ y''(t)\rangle_1 + \ldots \\ \ldots + \langle x^{(p-2)}(t),\ y''(t)\rangle_{\frac{p(p-1)}{2}} + \ldots + \langle x(t),\ y^{(p)}(t)\rangle$$

إن الحدود التي لها نفس الشكل والمزودة بدليلات مختلفة تحمل معاني مختلفة تحمل معاني مختلفة نوردها فيما يلي باستخدام التفاضليات:

$$\zeta^{(p)}(t)h_p\dots h_1 = \langle x^{(p)}(t)h_p\dots h_1,\ y(t)\rangle +$$
$$+\langle x^{(p-1)}(t)h_p\dots h_2,\ y'(t)h_1\rangle + \dots$$
$$\dots + \langle x^{(p-1)}(t)h_{p-1}\dots h_1,\ y'(t)h_p\rangle +$$
$$+\langle x^{(p-2)}(t)h_p\dots h_3,\ y''(t)h_2h_1\rangle + \dots$$
$$\dots + \langle x^{(p-2)}(t)h_{p-2}\dots h_1,\ y''(t)h_p h_{p-1}\rangle + \dots$$
$$\dots + \langle x(t),\ y^{(p)}(t)h_p\dots h_1\rangle. \quad (4)$$

إذا شكلنا الشكل من الدرجة p الموافق لذلك بوضع $h_1 = \dots = h_p = h$ فإننا نحصل على دستور ابسط من (4) عند مراعاة تناظر المشتقات الجزئية المختلطة:

$$\zeta^{(p)}(t)h\dots h = \langle x^{(p)}(t)\underbrace{h\dots h}_{p\ \text{fois}},\ y(t)\rangle +$$
$$+ p\langle x^{(p-1)}(t)\underbrace{h\dots h}_{p-1\ \text{fois}},\ y'(t)h\rangle + \quad (5)$$
$$+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\langle x^{(p-2)}(t)\underbrace{h\dots h}_{p-2\ \text{fois}}, y'(t)hh\rangle + \dots$$
$$\dots + \langle x(t),\ y^{(p)}(t)\underbrace{h\dots h}_{p\ \text{fois}}\rangle,$$

وهذا يكتب برموز شكلية:

$$\zeta^{(p)}(t) = \langle x^{(p)}(t),\ y(t)\rangle + p\langle x^{(p-1)}(t),\ y'(t)\rangle +$$
$$+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}\langle x^{(p-2)}(t),\ y''(t)\rangle + \dots + \langle x(t),\ y^{(p)}(t)\rangle \quad (6).$$

(دستور ليبنيتز Leibniz)؛ الا انه ينبغي الاّ ننسى بأن هذا الدستور لا يقوم الا بقيام (4) و (5).

43. 2 . المشتقات ذات الرتب العالية لتابع مركب.

نظرية. ليكن $y = y(x)$ $(G \subset X \to Y)$ تابعا يقبل الاشتقاق p مرة عند $x = a$ و $z = z(y)$ $(W \subset Y \to Z)$ et تابعا يقبل الاشتقاق p مرة عند النقطة $y = b = f(a) \in W$؛ عندئذ يكون التابع المركب

$$z[y(x)] = \zeta(x) \quad (U \subset X \to Z)$$

قابلا للإشتقاق p مرة عند النقطة$x = a$.

البرهان. كنا تناولنا الحالة $p = 1$ في 33.1 ؟ نفرض ان النظرية محققة من اجل الرتبة$p - 1 \geqslant 0$ ولنبرهن عليها من اجل الرتبة p . نلاحظ طبقا لِـ 33.1 ان المشتق الاول للتابع $\zeta(x)$ يكتب على الشكل:

$$\zeta'(x) = z'[y(x)]\, y'(x)$$

إن العامل الاول هو تركيب التابع $y(x)$ القابل للاشتقاق p مرة والتابع $z'(y)$ القابل للإشتقاق $p - 1$ مرة؟ يأتي من فرض التدريج ان هذا العامل يمثل تابعا قابلا للإشتقاق $p - 1$ مرة بالنسبة لِـ x. اما العامل الثاني فهو، فرضا، يقبل الاشتقاق $p - 1$ مرة بالنسبة لِـx. ثم ينتج من 33.2 ان كل الجداء يقبل الاشتقاق $p - 1$ مرة بالنسبة لِـx. يأتي من كل ذلك ان $\zeta(x)$ تابع يقبل الاشتقاق p مرة بالنسبة لِـ x، وهو المطلوب.

53.2 . المشتقات ذات الرتب العالية لمؤثر مقلوب. ليكن، كما جاء في 53.1 ـ ب، $x \in L(U, V)$ مؤثراً قابلا للقلب وخطيا من فضاء U في فضاء V ، $x^{-1}: V \to U$ مؤثرة المقلوب. لنثبت ان التابع x^{-1} يقبل مشتقا (بالنسبة لِـ x) من كل رتبة p .

اثبتنا ذلك بخصوص الرتبة $p = 1$ في 53.1 ـ ج، وحصلنا فيها على الدستور

$$d(x^{-1}) = -x^{-1}hx^{-1} \qquad (1)$$

يمكن كتابة المشتق $(x^{-1})'$ في شكل جداء معمم:

$$(x^{-1})' = -\langle x^{-1}, x^{-1}\rangle$$

(وهذا بمفهوم (1)، طبعا). إذا فرضنا ان التابع x^{-1} يقبل الاشتقاق p مرة فإن التابع $(x^{-1})'$ يقبل ايضا الاشتقاق p مرة، اي ان x^{-1} سيكون قابلا للإشتقاق $p + 1$ مرة. بما أن القضية محققة من اجل

$p = 1$ فإن الاستدلال السابق قائم من اجل كل $p = 1$ ، 2 ...، وهو المطلوب.

63. 2 . المشتقات ذات الرتب العالية لتابع ضمني.

أ . نظرية. نفرض ان شروط نظرية التابع الضمني 35. 1 محققة: لدينا
$z = \Phi(x, y)$

$$(V = \{x \in X,\ y \in Y : \mid x - a \mid < r,\ \mid y - b \mid < \rho\} \to Z)$$

والعلاقة $\Phi(a, b) = 0$ والمؤثر $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}$ مستمر بالنسبة لِـ x و y وقابل للقلب عند $x = a$، $y = b$ عندئذ، عندما يكون التابع $\Phi(x, y)$ قابلا للإشتقاق p مرة بجواء V فإن الامر كذلك فيما يخص التابع الضمني $y(x)$ الذي يمثل حل المعادلة $\Phi(x, y(x)) = 0$ ، $y(a) = b$ ، وهذا التابع موجود بفضل النظرية 35. 1 .

البرهان. كنا درسنا الحالة $p = 1$ في 45. 1 ، واثبتنا هناك الدستور:

$$y'(x) = -\left[\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$$

لنثبت، بعد افتراض صحة النظرية من اجل الرتبة $p - 1 \geqslant 0$ ان النظرية محققة من اجل الرتبة p .

إن العامل الاول هو تركيب التابع $x \to \{x, y(x)\}$ القابل للإشتقاق $p - 1$ مرة حسب فرض التدريج و 13. 2 ـ د وتابع القلب (53. 2) القابل للإشتقاق لانهائيا؛ اما العامل الثاني فهو تركيب نفس التابع $x \to \{x, y(x)\}$ والتابع القابل للإشتقاق $p - 1$ مرة $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}$.

يتبين من 43. 2 ان العاملين يقبلان الاشتقاق $p - 1$ مرة؛ ثم إن جداءهما يحقق نفس النتيجة.

يأتي من ذلك ان $y'(x)$ يقبل الاشتقاق $p - 1$ مرة، وبالتالي فإن $y(x)$ يقبل الاشتقاق p مرة، وهو المطلوب.

ب . بصفة خاصة فإن التابع المقلوب $y = f(x)$ المعرف بالمعادلة $x = \varphi(y)$ ، $a = \varphi(b)$ حيث يكون المؤثر $\varphi'(b)$ قابلا للقلب

(65.1)، يقبل الاشتقاق p مرة بمجرد ان يكون التابع $\varphi(y)$ كذلك.

73.2. أ. قمنا ضمن 48.1 برد النظرية الخاصة بقابلية اشتقاق النقطة الثابتة (أو الصامدة) لتطبيق مقلص $A(u, \lambda)$ $(U \times \Lambda \to U)$ بالنسبة لوسيط λ الى النظرية 55.1 الخاصة بقابلية تابع ضمني للاشتقاق. نصل باستعمال النظرية 63.2 ـ أ مكان 55.1 الى التمديد الموالي للنظرية 48.1 لتشمل حالة المشتقات ذات الرتب العالية:

نظرية. ليكن $A(u, \lambda)$ تطبيقا مقلصا من ساحة مغلقة $U \subset X$ في نفسها يمثل تابعا يقبل الاشتاق p مرة بالنسبة لِـ λ؛ عندئذ تكون النقطة الصامدة $u = y(\lambda)$ للتطبيق A تابعا الاشتقاق p مرة بالنسبة لِـ λ.

ب. تسمح هذه النتيجة، بدورها، بتعميم مناسب للنظرية 58.1: اذا كان الطرف الثاني في المعادلة التفاضلية

$$\frac{dy(t, \lambda)}{dt} = \Phi(t, y(t, \lambda), \lambda) \tag{1}$$

والشرط الابتدائي:

$$y(t_0, \lambda) = \varphi(\lambda) \tag{2}$$

تابعين يقبلان الاشتقاق p مرة بالنسبة للوسيط λ، فإن الحل $y = y(t, \lambda)$ للمعادلة (1) مع الشرط (2) تابع قابل للاشتقاق p مرة بالنسبة لِـ λ.

ج. تتمتع مشتقات الحل $y(t, \lambda)$ بغاصيات مماثلة فيما يتعلق بقابليتها الاشتقاق بالنسبة لِـ λ. وهكذا، عندما يكون التابع $\Phi(t, y, \lambda)$، في الساحة المعتبرة، قابلا للإشتقاق p مرة بالنسبة للمتغير (y, λ)، فإن التابع $\frac{dy(t, \lambda)}{dt}$ هو ايضا قابل للإشتقاق p مرة بالنسبة لِـ λ. (وذلك حسب ب والمعادلة (1) نفسها). يمكن ان نقول نفس الشيء فيما يخص المشتقات الاخرى للحل $y(t, \lambda)$ الذي نستنتج معادلاته باشتقاق المشتقات المعادلة (1) بالنسبة لِـ t وذلك تحت فرض قابلية أشتقاق مناسب للتابع $\Phi(t, y, \lambda)$.

4.2 . المشتقات بالنسبة للحقول الشعاعية

14.2 . نفرض ان لدينا تابعا $\xi(x): G \to X$ معطى في ساحة G من فضاء نظيمي X، بعبارة اخرى حقلا شعاعيا $\xi(x)$. من اجل كل تابع قابل للإشتقاق $\Phi(x): G \to Y$ عند كل نقطة $x \in G$ يمكننا حساب المشتق وفق الشعاع $\xi(x)$ الموافق له (72.1):

$$\xi * \Phi(x) = \Phi'(x) \cdot \xi(x). \quad (1)$$

نحصل بذلك على تابع لِـ x قيمة في Y، سيكون هذا التابع قابلا للإشتقاق بمجرد افتراض ان التابع $\Phi(x)$ يقبل الاشتقاق مرتين والحقل $\xi(x)$ قابل للإشتقاق.

ليكن $\eta(x)$ حقلا شعاعيا آخرا قابلا للإشتقاق في الساحة G. نشتق التابع (1) وفق الحقل $\eta(x)$:

$$\eta * (\xi * \Phi(x)) = \eta * (\Phi'\xi) = (\Phi'\xi)'\,\eta(x) = \Phi''\xi\eta(x) + \Phi'\xi'\eta(x). \quad (2)$$

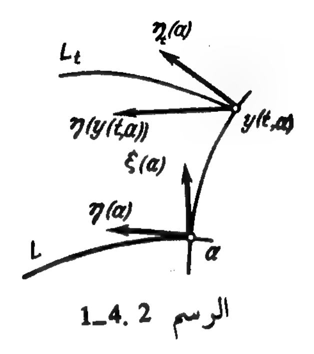
إن الحد الاول في طرف اليمين متناظر بالنسبة لِـ ξ و η (23.2 ـ أ) اما الثاني فهو عموما غير متناظر؛ إذا استبدلنا دوريْ ξ و η فيما بينهما واجرينا عملية طرح بين (2) والعلاقة المحصل عليها نجد:

$$\eta * (\xi * \Phi(x)) - (\xi * (\eta * \Phi(x)) = \Phi'(x) \cdot [\xi'\eta - \eta'\xi](x) = [\xi'\eta - \eta'\xi] * \Phi(x), \quad (3)$$

بحيث نلاحظ ان الاشتقاق وفق الشعاعين ξ و η ليست تبديلية عموما. (بديهي ان خاصية التبديل قائمة عندما يكون ξ و η غير متعلقين بِـ x اي عندما $\xi'(x) \equiv \eta'(x) \equiv 0$.).

يمثل القوس المعكوف في (3) شعاعا (حقلا شعاعيا إذا اخذنا بعين الاعتبار التعلق بِـx)؟ نرمز لهذا الشعاع بِـ $[\xi, \eta](x)$ 9 و 12 اختصارا، $[\xi, \eta]$. يسمى هذا الشعاع معكوف الشعاعين ξ و η. إن كان هذان الشعاعان ثابتين، نحصل على $[\xi, \eta] = 0$. لدينا بطبيعة الحال.

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]. \quad (4)$$



الرسم 2 .1_4

24. 2 . نعتبر فيما يلي التفسير الهندسي لمعكوف الشعاعين وكذا بعض المسائل الهندسية. ليكن $\xi(x)$ و $\eta(x)$ حقلين شعاعيين قابلين للإشتقاق في كرة $V = \{x \in X : |x - a| < r\}$ نتناول المعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy(t, x)}{dt} = \xi(y), \quad y(0, x) = x \qquad (1)$$

إذا كان المشتق $\xi'(x)$ للحقل مستمرا فإن المعادلة (1) تقبل حلا وحيداً (18. 1 ـ ب) من اجل كل $x \in V$؟ يعين هذا الحل من اجل t $|t| < \delta$ صغير بكفاية التفاتشاكل π_t من جواد للنقطة a على الجواد الموافق له للنقطة $y(t, a)$ (78. 1 ـ ا). ليكن $L = \{z(\tau), 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0\}$ منحنيا قابلا للإشتقاق ينطلق، من اجل $\tau = 0$، من النقطة a في اتجاه الشعاع $\eta(a)$. يحوّل التفاتشاكل π_t هذا المنحنى الى منحنى قابل للإشتقاق $L_t = \{y(t, z(\tau)), 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0\}$ ينطلق، من اجل $\tau = 0$ من النقطة $y(t, a)$. يحوّل المؤثر الخطي $\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}$ الشعاع $z'(0) = \eta(a)$ الى شعاع ماس للمنحنى L_t عند $\tau = 0$ (93. 1 ـ د) نرمز له بـ $\eta_t(a)$؟ نقول عن $\eta_t(a)$ إنه نتيجة نقل الشعاع $\eta(a)$ الى النقطة $y(t, a)$ بواسطة الحقل $\xi(x)$.

هناك الآن شعاعات عند النقطة $y(t, a)$؛ الشعاع الابتدائي $\eta(y(t, a))$ والشعاع $\eta_t(a)$، الناتج عن نقل $\eta(a)$ بواسطة الحقل $\xi(x)$. يمثل الفرق $\eta(y(t, a)) - \eta_t(a)$ الانحراف بين

الشعاع $\eta(y(t, a))$ والشعاع $\eta_t(a)$. تسمى سرعة هذا الانحراف، اي الكمية:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\eta(y(t, a)) - \eta_t(a)],$$

مشتق لي (Lie) للحقل $u(x)$ وفق الحقل $\xi(x)$ عند النقطة $x = a$..

لنحسب مشتق لي. لدينا:

$$\eta(y(t, a)) = \eta(y(a) + ty'(a) + o(t)) = \eta(a) + t\eta'(a)\,\xi(a) + o(t)$$

$$\eta_t(a) = \frac{\partial y(t, x)}{\partial x}\,\eta(a) = [E + t\xi'(a) + o(t)]\,\eta(a) = \\ = \eta(a) + t\xi'(a)\,\eta(a) + o(t)$$

ومنه يأتي

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[\eta(y(t, a)) - \eta_t(a)] = \eta'(a)\,\xi(a) - \xi'(a)\,\eta(a)$$

وبالتالي فإن مشتق لي للحقل $\eta(x)$ وفق الحقل $\xi(x)$ عند النقطة $x = a$ يطابق معكوف $[\eta, \xi]$ المعرف في 34.2 .

34.2 . نقدم هنا إنشاء مباشرا للمنحنى الذي يقبل الشعاع $[\xi, \eta](a)$ كشعاع موجه. للقيام بذلك نجري الانشاء الهندسي التالي (الرسم 2.4 ـ 2) بتثبيت عدد s (صغير بكفاية) ننطلق من النقطة a وفق مسار الحقل $\xi(x)$ المعرف بالمعادلة:

$$\frac{dx}{dt} = \xi(x)$$

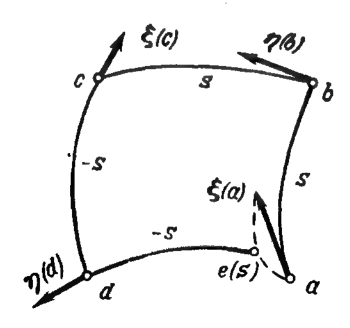
للوصول الى النقطة $b = x(s, a)$ ثم ننطلق من هذه الاخيرة وفق مسار الحقل $\eta(y)$ المعرف بالمعادلة

$$\frac{dy(t)}{dt} = \eta(y(t))$$

الى ان نصل للنقطة: $c = y(s, b)$؟ بعد ذلك ننطلق وفق مسار الحقل $\xi(x)$ الى النقطة $d = x(-s, c)$ اخيرا ننطلق مسار الحقل $\eta(y)$ الى النقطة $e = y(-s, d)$. عندما يتغير الوسيط s فإن النقطة $e = e(s)$ ترسم في

الساحة V منحنيا L ينطلق من النقطة a، من اجل $s = 0$. لنحسب موقع النقطة $e(s)$ بأخذ بعين الاعتبار لامتناهيات في الصفر من الرتبة الاولى والثانية بالنسبة لـ s. نطبق الدستور : (2) U16.17

$$x(t) - x(0) = tx'(0) + \frac{t^2}{2} x''(0) + o(t^2) \tag{1}$$



الرسم 2.4.2

لدينا فيما يخص اول الاربعة اقواس هذه:

$$\begin{aligned} x(0) = a,\ x'(0) = \xi(a),\ x''(0) &= \frac{d}{dt} \xi[x(t)]\big|_{t=0} \\ &= \xi'(x)\cdot x'(t)\big|_{t=0} = \xi'(a)\,\xi(a), \end{aligned} \tag{2}$$

بعد ذلك يأخذ الدستور (1) الشكل:

$$x(t) - a = t\xi(a) + \frac{t^2}{2}\xi'(a)\,\xi(a) + o(t^2).$$

باستخدام هذا الدستور الاخير وامثاله نجد :

$$\left\{\begin{aligned} b - a &= s\xi(a) + \frac{s^2}{2}\xi'(a)\,\xi(a) + o(s^2), \\ c - b &= s\eta(b) + \frac{s^2}{2}\eta'(b)\,\eta(b) + o(s^2), \\ d - c &= -s\xi(c) + \frac{s^2}{2}\xi'(c)\,\xi(c) + o(s^2), \\ e - d &= -s\eta(d) + \frac{s^2}{2}\eta'(d)\,\eta(d) + o(s^2). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

لنكتب كل معاملات s^2 بدلالة $\xi(a), \xi'(a)$، $\eta(a)$ $\eta(a)$، نلاحظ بهذا الخصوص ان:

$$(4)\quad \begin{cases} \eta(b) = \eta(a) + o(1), & \eta'(b) = \eta'(a) + o(1), \\ \xi(c) = \xi(a) + o(1), & \xi'(c) = \xi'(a) + o(1), \\ \eta(d) = \eta(a) + o(1), & \eta'(d) = \eta'(a) + o(1); \end{cases}$$

إذن يمكننا في الحدود ذات الدرجة الثانية في (3) تعويض b, c و d بـ a. فيما يخص الحدود ذات الدرجة الاولى يجب ان نحتفظ فيها ليس بالحدود الثابتة في (4) نحسب بل ايضا بالحدود المتناسبة مع s؛ لنقارن اذن العبارات:

$$(5)\quad \begin{cases} \eta(b) = \eta(a) + \eta'(a)\cdot s\xi(a) + o(s); \\ \xi(c) = \xi(a) + \xi'(a)(s\xi(a) + s\eta(b)) + o(s) = \\ \qquad = \xi(a) + \xi'(a)(s\xi(a) + s\eta(a)) + o(s); \\ \eta(d) = \eta(a) + \eta'(a)(s\xi(a) + s\eta(b) - s\xi(c)) + o(s) = \\ \qquad = \eta(a) + \eta'(a)s\eta(a) + o(s). \end{cases}$$

بنقل (5) و (4) في (3) والقيام بالجمع نحصل على:

$$(6)\quad \begin{aligned} e - a = s^2\Big[\tfrac{1}{2}\xi'(a)\xi(a) + \eta'(a)\xi(a) + \tfrac{1}{2}\eta'(a)\eta(a) - \\ - \xi'(a)\xi(a) - \xi'(a)\eta(a) + \tfrac{1}{2}\xi'(a)\xi(a) - \eta'(a)\eta(a) + \\ + \tfrac{1}{2}\eta'(a)\eta(a)\Big] + o(s^2) = s^2[\eta'(a)\xi(a) - \xi'(a)\eta(a)] + \\ + o(s^2) = s^2[\eta, \xi](a) + o(s^2). \end{aligned}$$

إذا اخترنا على المنحنى L، الوسيط s^2 بدل s، فإن الشعاع الموجه لهذا المنحنى عند النقطة a سيكون الشعاع $[\eta, \xi](a)$ بفضل (6).

44. 2 . لنعبر عن معكوف حقلين شعاعيين ξ و η في R_n بواسطة مركباتها. ليكن $e_1, \ldots, e_n$ اساسا مثبت لـ R_n وليكن

$\xi(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)e_i$ و $\eta(x)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)e_i$. إن المشتق $\xi'(x)$ هو المؤثر الخطي $R_n\to R_n$ المعطى في نفس الاساس بواسطة الاساس $\left\|\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x_j}\right\|$ (52.1 ـ أ) بطريقة مماثلة فإن المشتق $\eta'(x)$ هو المؤثر الخطي $R_n\to R_n$ المعطى في نفس الاساس بواسطة المصفوفة $\left\|\frac{\partial\eta_i(x)}{\partial x_j}\right\|$.
بالتالي فإن الاحداثية ذات الرتبة i للشعاع $[\xi,\eta]$ تكتب على الشكل:

$$(1)\qquad [\xi,\eta]_i=(\xi'(x)\eta(x)-\eta'(x)\xi(x))_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\eta_j-\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}\xi_j\right).$$

تجدر الملاحظة الى ان الدستور (1) قائم في كل جملة احداثيات منحنية:

$$y_i=y_i(x_1,\ldots,x_n),\qquad i=1,\ldots,n,$$

حيث تقبل التوابع $y_i(x)$ مشتقات مستمرة من الرتبة الاولى والثانية.
لاثبات ذلك نرمز (كما في 65.1 ـ د) بـ $q_{ij}=\frac{\partial x_j(x)}{\partial y_i}$ و $p_{ij}=\frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i}$، إن المصفوفتين $\|q_{ij}\|$ et $\|p_{ij}\|$ تقبلان القلب ثم ان الواحدة منهما مقلوبة الاخرى، إذن $\sum_{j=1}^{n}p_{ij}q_{jk}=\delta_{ik}$. اذا كان ξ_i,η_i مركبات الشعاعين ξ و η ضمن الاساس الابتدائي $e_1,\ldots,e_n$، و λ_i,μ_i المركبات ضمن الاساس المحلي $g_1(a),\ldots,g_n(a)$ عند النقطة a، فإنه يتبين (من 65.1 ـ د) من اجل كل شعاع $\theta=\sum\theta_ie_i=\sum\tau_jg_j$، ان: $\theta_i=\sum_{s=1}^{n}q_{si}\tau_s,\ \tau_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\theta_i$.

ثم، من اجل كل تابع $\Phi(x)$، فإن مشتق هذا التابع بالنسبة لِـ x_k يكتب على شكل: $\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}\frac{\partial\Phi}{\partial y_l}$. ليكن اخيرا $\sum_{i=1}^{n}[\xi,\eta]_ie_i=\sum_{j=1}^{n}\zeta_jg_j$. يأتي بفضل كل الدساتير المحصل عليها:

$$\zeta_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}[\xi,\eta]_i=\sum_{i,k}p_{ij}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}\eta_k-\frac{\partial\eta_i}{\partial x_k}\xi_k\right)$$

نكتب في البداية الحدود الاولى بواسطة الاحداثيات الجديدة:

$$\sum_{i,k}p_{ij}\eta_k\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k}=\sum_{i,k}p_{ij}\sum_r q_{rk}\mu_r\sum_l\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_s q_{si}\lambda_s\right)\cdot p_{kl}=$$

$$\sum_{i,k,r,l,s}p_{ij}q_{rk}\mu_rp_{kl}q_{si}\frac{\partial\lambda_s}{\partial y_l}+\sum_{i,k,r,l,s}p_{ij}q_{rk}\mu_rp_{kl}\lambda_s\frac{\partial q_{si}}{\partial y_l}.$$

بما ان $\sum_s p_{lj}q_{sl} = \delta_{js}$, فإننا لا نحصل سوى على الحد الموافق $s = j$ عند اجراء عملية الجمع على s ؟ وبفضل $\sum_k q_{rk}p_{kl} = \delta_{rl}$,

فإنه لن يبقى سوى الحد الموافق $r = l$. اخيرا لدينا:

$$\sum_{i,k} p_{lj}\eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} = \sum_l \mu_l \frac{\partial \lambda_j}{\partial y_l} + \sum_{i,l,s} p_{lj}\mu_l\lambda_s \frac{\partial q_{sl}}{\partial y_l}. \qquad (2)$$

نلاحظ ان $\frac{\partial q_{sl}}{\partial y_l} = \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_l \partial y_s}$. بالتالي، ونظرا لتناظر المشتقات الثانية (11. 2 ـ ب) فإن المجموع الاخير متناظر بالنسبة ξ, η بتعويض η, ξ, بـ λ_l, μ_s, μ_l, λ_s

وبطرح المساواة المحصل عليها من (2) نصل الى العلاقة:

$$\zeta_j = \sum_{i,k} p_{lj}\left(\frac{\partial \xi_l}{\partial x_k}\eta_k - \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k}\xi_k\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial y_l}\mu_l - \frac{\partial \mu_j}{\partial y_l}\lambda_l\right),$$

وهو المطلوب.

54. 2. نفرض ان لدينا في ساحة $G \subset X = R_n$, حقلا شعاعيا $\xi^1, \ldots, \xi^m$ مستقلة خطيا عند كل نقطة $x \in G$. نريد ان نختار بجوار نقطة $a \in G$, جملة جديدة (محلية) من الاحداثيات بحيث تكون لمركبات الحقول $\xi^1, \ldots, \xi^m$ بسط شكل ممكن. نضع $a = 0$; نختار ونثبت فضاء جزئيا H مجموعه المباشر مع الفضاء الجزئي R_m المولد عن الاشعة $\xi^1(0), \ldots, \xi^m(0)$ يمثل كل الفضاء X. ليكن $x^j(t_0, p)$ حل المعادلة
$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi^j(x),$$
من اجل $t = t_0$. نعتبر كرة $H_\rho = \{h \in H, \ |h| < \rho\}$ في الفضاء الجزئي H, ومتوازي الوجوه $R_{m\delta} = \{x \in R_m: \ x = \sum_{h=1}^{m} \alpha_h \xi^h(0), \ |\alpha_h| < \delta\}$ في الفضاء الجزئي R_m. من اجل $|t|$ $|p|$ صغيرين بكفاية، يمثل $x^j(t, p)$ تابعا قابلا للإشتقاق بالنسبة لمتغيريه. نصل الآن كل مجموعة $(t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n)$ $|t_j| < \delta$, $|h_r| < \rho$

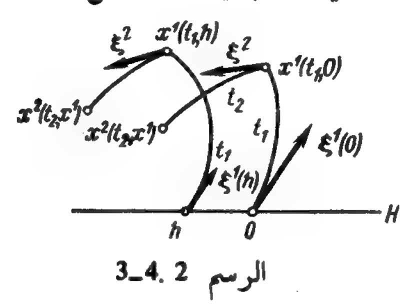
وفق القاعدة التالية

$$x^1 = x^1(t_1, h); \ x^2 = x^2(t_2, x_1); \ \ldots; \ x^{m-1} = x^{m-1}(t_{m-1}, x_{m-2})$$
$$x^m = x^m(t_m, x_{m-1}).$$

بعبارة اخرى، كي نعين النقطة x، ننطلق من النقطة h ونتبع مسار الحقل ξ^1 حتى النقطة x^1 الموافقة للقيمة t_1 للوسيط؟ ثم نتبع مسار الحقل ξ^2 حتى النقطة x^2 الموافقة للقيمة t_2 للوسيط، وهكذا على التوالي حتى النقطة $x = x^m (t_m, x_{m-1})$.

إن التطبيق $x (t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n)$ المحصل عليه قابل للإشتقاق حسب ما رأينا اعلاه؛ نرمز له بـ $\pi (x)$. يحوّل التطبيق $\pi (x)$ كل شعاع من H الى الشعاع نفسه، كما يحتفظ ايضا بالاشعة $\xi^1 (0), \ldots, \xi^m (0)$ ولذا فهو يمثل تطبيقا مطابقا؛ ينتج من ذلك (665.1 ـ ج) ان التطبيق $\pi (x)$ يقبل القلب بجوار النقطة 0 وان الكميات $t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n$ يمكن استخدامها كاحداثيات جديدة بجواره. لنر ما هي مركبات الاشعة $\xi^1, \ldots, \xi^m$ ضمن جملة الاحداثيات هذه.

لتكن S_1 مجموعة النقاط ذات الشكل $x (t_1, h)$ في ساحة تعريف التفاتشاكل TI . من الواضح ان بعد هذه المجموعة هو $n-m+1$ وان نقاطه تكتب ضمن جملة الاحداثيات الجديدة على الشكل: $\{t_1, o, \ldots, o, h_{m+1}, \ldots, hn\}$. إذا غيرنا فيها الاحداثية t_1 فقط فإننا نحصل، حسب الانشاء، على مسار من مسارات الحقل ξ^1، كشعاع موجه لهذا المنحنى، له إذن ضمن جملة الاحداثيات الجديدة، الشكل (65.1 ـ د):



الرسم 3_4. 2

على S_1 : $\xi^1 = \{1, 0, \ldots, 0\}$

إن المجموعة S_2 المؤلفة من النقاط ذات الشكل $x (t_2, x_1), x_1 \in S_1$ لها بعد يساوي؛ $n - m + 2$ تكتب نقاط هذه المجموعة في الجملة الجديدة

على الشكل $\{t_1, t_2, 0, \ldots, 0, h_{m+1}, \ldots, h_n\}$ واذا غيرنا فيها الاحداثية t_2 فقط فإننا نحصل على مسار من مسارات الحقل ξ^2. بالتالي، فإن الشعاع ξ^2، بصفته شعاعا موجها لهذا المسار هو:

$$\xi^2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0\} \quad : S_2 \quad \text{على}$$

نواصل بنفس الطريقة فنرى ان المجموعة S_k المؤلفة من النقاط ذات الشكل $x(t_k, x_{k-1})$، حيث $x_{k-1} \in S_{k-1}$، لها بعد يساوي $n - m + k$; نلاحظ على هذه المجموعة ان الشعاع ξ^k يكتب ضمن الاحداثيات الجديدة على الشكل:

$$\xi^k = \{0, 0, \ldots, \underset{k}{1}, \ldots, 0\} \; : \; S_k \quad \text{على} \tag{1}$$

نلاحظ ان مركبات ξ^k لم نجدها هنا الآ على S_k. في الحالة $k = m$، وحدها، حيث بعد S_k يساوي n والمجموعة Sk تطابق في الحقيقة الجوار المعتبر للنقطة 0، فإن مركبات الشعاع ξ^m معلوما في كل هذا الجواد:

$$\xi^m = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\}.$$

ينتج من الدستور (1) ان لدينا على S_k:

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial t_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, k), \quad \frac{\partial \xi^k}{\partial h_r} = 0 \quad (r = m+1, \ldots, n) \tag{2}$$

نستنتج من ذلك العبارة التالية لِ $[\xi^j, \xi^k]$:

$$[\xi^j, \xi^k] \equiv \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial t_i} \xi_i^k - \frac{\partial \xi^k}{\partial t_i} \xi_i^j \right) + \sum_{r=m+1}^{n} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial h_r} \xi_r^k - \frac{\partial \xi^k}{\partial h_r} \xi_r^j \right) =$$

$$= \frac{\partial \xi^j}{\partial t_k} - \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\partial \xi^k}{\partial t_i} \xi_i^j.$$

64.2 . هل توجد سطوح مغلقة لِ m حقلا شعاعيا؟

أ. ليكـــن $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ m حقلا شعـــاعيـــا معطـــاة في

ساحة $G \subset X = R_n$ وهذه الحقول خطيا عند نقطة $x \in G$ نرمز ب $T(x)$ للمنوعة الخطية المولدة عن هذه الحقول عند النقطة x. نقول عن سطح P بعده m واقع في الساحة G (1 .93 ـ ر) إنه غلاف (أو مغلفة) لجماعة الحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ إذا كانت المنوعة الخطية $\pi(x)$ الماسة للسطح P (1 .93 ـ ر) عند كل نقطة x مطابقة للمنوعة $T(x)$. نطرح السؤال التالي:

هل يمكن تمرير سطح مغلف بنقطة معطاة $x \in G$؟ إن كان الجواب بنعم فهل هذا السطح وحيد؟

ليكن $m = 1$, بحيث ان الأمر يتعلق بحقل شعاعي واحد. $\xi^1(x) = \xi(x)$ يرد مفهوم السطح المغلف في هذه الحالة الى مفهوم مسار الحقل؛ $\xi(x)$ إذا قبل الحقل $\xi(x)$ مشتقا مستمرا فإن الجواب عن السؤال المطروح اعلاه (بما في ذلك الواحدانية) سيكون بنعم وذلك بفضل النظريات الاساسية لنظرية المعادلات التفاضلية (1 .78) من اجل $m > 1$, فإن قابلية الاشتقاق المستمر للحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ غير كافية. لدينا النظرية التالية:

نظرية. نفرض ان الحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ مشتقات ثانية متسمرة في الساحة G. عندئذ لكي يوجد سطح مغلف يمر بنقطة معاطة كيفية $a \in G$, يلزم ويكفي ان يكون $[\xi^i(x), \xi^j(x)] \in T(x)$ مهما كان $x \in G$ عند توفر هذا الشرط فان السطح المغلف المار بالنقطة $a \in G$ وحيد.

نقدم البرهان على هذه النظرية في ج ، د.

ب. توطئة. ليكن $P = \{x \in R_n : x = \Phi(u), u \in Q \subset R_m\}$ سطحا في ساحة $G \subset R_n$ et $\xi(x)$ حقلا شعاعيا ماسا للسطح P عند كل نقطة $x \in P$. عندئذ بمجرد ان يكون $\Phi(u)$ و $\xi(x)$ قابلين للاشتقاق باستمرار فإن كل مسار للحقل $\xi(x)$ المار بنقطة $a = \Phi(u_1^0, \ldots, u_m^0) \in P$ يقع باكمله على P.

البرهان. من اجل كل نقطة x على السطح P، فان المنوعة الماسة $\pi(x)$ تقبل اساسا مؤلفا من الأشعة $\frac{\partial x}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u_m}$ (1 .93 ـ ر). يقع

الشعاع $\xi(x)$ فرضا في $\pi(x)$ ولذا يمكن نشره وفق هذا الاساس:

$$\xi(x)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x)\frac{\partial x}{\partial u_j}=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j(x(u))\frac{\partial x}{\partial u_j}=\sum_{j=1}^{m}\psi_j(u)\frac{\partial x}{\partial u_j}.$$

إن التوابع $\varphi_j(x)$ قابلة للاشتقاق باستمرار كما هو الحال بالنسبة للتوابع $\xi_i(x)$ مركبات الحقل $\xi(x)$ وفق الاساس الابتدائي $e_1, \ldots, e_n$ للفضاء X وبالنسبة للتوابع $g_{ij}(x)$ مكربات الاشعة $\frac{\partial x}{\partial u_j}$ ($j=1, \ldots, m$) وفق نفس الاساس؟ ينتج ذلك من العلاقات:

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ \frac{\partial x}{\partial u_j}=\sum_{i=1}^{n}g_{ij}e_i,\ \xi=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\frac{\partial x}{\partial u_j}=\sum_{i,\ j}g_{ij}\varphi_j e_i,\ \xi_i=\sum_{j=1}^{m}g_{ij}\varphi_j$$

وهذا بعد ان نختار في الجماعة الاخيرة من العلاقات m علاقة مستقلة خطيا وحل الجملة المحصل عليها طبقا لقاعدة كرامر (Cramer). الامر كذلك فيما يخص التوابع $\psi_j(u)$.

لنتناول جملة المعادلات: $\frac{du_j(t)}{dt}=\psi_j(u_1, \ldots, u_m),\quad u_j(0)=u_j^0.$

تقبل حسب ما رأينا حلا وحيدا $u=u(t)$. يوافق هذا الحل منحن $L\subset P$ ماس للشعاع $\xi(x)$ عند كل نقطة من نقاطه. نلاحظ ان مثل هذا المنحنى في R_n يمثل مسارا للحقل $\xi(x)$; يتبين من نظرية الوحدانية 78.1 ان المسار بالنقطة a وحيد، وعليه فهو يطابق المنحنى $L\subset P$. وبذلك يتم البرهان.

جـ. البرهان على النظرية أ (لزوم الشرط). ليكن P سطحا مغلفا للحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ يمر بالنقطة $a\in G$. رأينا ضمن 34.2 ان الشعاع

$$[\xi^i(a),\ \xi^j(a)]$$

شعاع موجه لمنحنى L نحصل عليه بانشاء سلسلة اقواس مسارات للحقلين $\xi^i(x)$ et $\xi^j(x)$. بما ان هذين الحقلين مماسين فرضا للسطح P وان بداية القوس الاول هي النقطة $a\in P$، فإن كل هذه السلسلة تقع على السطح P، وهذا حسب التوطئة ب؟ ينتج من ذلك ان الشعاع

$[\xi^i(a), \xi^j(a)]$ مماس ايضا للسطح P، ولذا فهو ينتمي الى $T(a)$، وهو المطلوب.

د . البرهان على النظرية أ (كفاية الشرط) . نتعاطى الحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ ونعتبر بجوار نقطة $a \in G$ جملة الاحداثيات الخاصة $\ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n$ التي ادخلناها في 2.45 . تحقق المركبات $\xi^j_1(x), \ldots, \xi^j_n(x)$ للحقول $\xi^j(x)$ في هذه الجملة، مثل ما هو في اية جملة احداثيات، العلاقات:

$$[\xi^i, \xi^j] = \sum_{s=1}^{m} C_s^{ij}(x)\,\xi^s, \tag{1}$$

حيث $C_s^{ij}(x)$ معاملات مستمرة ومعرفة بطريقة وحيدة. يمكن ان نكتب على المجموعة $S_2 = \{t_1, t_2, 0, \ldots, 0, h_{m+1}, \ldots, h_n\}$ باستخدام الدستور 2 .54 (3) :

$$[\xi^1, \xi^2]_k \equiv \frac{\partial \xi^1_k}{\partial t_2} - \sum_{i=3}^{m} \frac{\partial \xi^2_k}{\partial t_i}\,\xi^1_i = \sum_{r=1}^{m} C_r^{12}\xi^r_k. \tag{2}$$

نستعمل هذه المعادلات من اجل $k = 3, \ldots, n$. ينتج من 2 .54 (2) ابضا، من اجل نفس القيم $k = 3, \ldots, n$، ان لدينا العلاقات.

$$\frac{\partial \xi^2_k}{\partial t_2} = \frac{\partial \xi^3_k}{\partial t_2} = \ldots = \frac{\partial \xi^m_k}{\partial t_2} = 0. \tag{3}$$

يمكن اعتبار المعادلتين (2)-(3) كجملة $m(n-2)$ معادلة تفاضلية (بالمتغير المستقل t_2) بالنسبة للمجاهيل (البالغ عددها $m(n-2)$ $\xi^1_k, \ldots, \xi^m_k$ $(k = 3, \ldots, n)$، حيث المعاملات $\frac{\partial \xi^2_k}{\partial t_i}$ و C_r^{12} مستمرة. من اجل $t_2 = 0$، اي على S_1، فإن كل التوابع المجهولة منعدمة، وبالتالي، بفضل نظرية الوحدانية، فهي منعدمة من اجل كل القيم المقبولة t_2، أي كل S_2. هكذا فإن مركبات الشعاع ξ^1 على S_2، نكتب، ضمن افتراض النظرية، على الشكل:

$$\xi^1 = \{\xi^1_1, \xi^1_2, 0, \ldots, 0\}. \tag{4}$$

وبالتالي نكتب العبارة $[\xi^1, \xi^2]$ على S_2 في شكل اكثر بساطة من الشكل الناتج عن 2 .54(3)، بصفة خاصة:

$$[\xi^1, \xi^2] = \frac{\partial \xi^1}{\partial t_2}. \tag{5}$$

ثم، على المجموعة $S_3 = \{t_1, t_2, t_3, 0, \ldots, 0, h_{m+1}, \ldots, h_n\}$ ، نعتبر بطريقة مماثلة الجملة التالية المؤلفة من $m(n-3)$ معادلة تفاضلية عادية بالمتغير المستقل t_3 والمجاهيل (البالغ عددها $m(n-3)$) : $\xi_k^1, \ldots, \xi_k^m$ $(k = 4, \ldots, n)$

$$(6) \quad \begin{cases} [\xi^1, \xi^3]_k \equiv \dfrac{\partial \xi_k^1}{\partial t_3} - \displaystyle\sum_{i=4}^{m} \dfrac{\partial \xi_k^3}{\partial t_i} \xi_i^1 = \sum_{r=1}^{m} C_r^{13} \xi_k^r, \\ [\xi^2, \xi^3]_k \equiv \dfrac{\partial \xi_k^2}{\partial t_3} - \displaystyle\sum_{i=4}^{m} \dfrac{\partial \xi_k^3}{\partial t_i} \xi_i^2 = \sum_{r=1}^{m} C_r^{23} \xi_k^r \\ \dfrac{\partial \xi_k^3}{\partial t_3} = \dfrac{\partial \xi_k^4}{\partial t_3} = \ldots = \dfrac{\partial \xi_k^m}{\partial t_3} = 0, \end{cases}$$

حيث ان معاملات هذه الجملة مستمرة دوما. من اجل $t_3 = 0$, اي على S_2، فإن كل التوابع المجهولة منعدمة حسب 2 .45 والنتائج السابقة. بفضل نظرية الوحدانية فهذه التوابع منعدمة على كل S_3. وهكذا تكتب مركبات الشعاعين ξ^1 و ξ^2 على S_3, كالتالي:

$$\xi^1 = \{\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1, 0, \ldots, 0\},$$
$$\xi^2 = \{\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, 0, \ldots, 0\}.$$

وبالتالي تكتب العبارتان $[\xi^1, \xi^3]$ و $[\xi^2, \xi^3]$ على S_3 في شكل اكثر بساطة:

$$[\xi^1, \xi^3] = \frac{\partial \xi^1}{\partial t_3}, \quad [\xi^2, \xi^3] = \frac{\partial \xi^2}{\partial t_3}. \tag{7}$$

نواصل بنفس الطريقة فنرى، على المجموعة S_k $(k = 1, \ldots, m)$ ان كل مركبات الاشعة $\xi^1, \ldots, \xi^k$, ابتداء من الرتبة $(k-1)$ ، منعدمة وان العبارات $[\xi^i, \xi^k]$ $(i < k)$ تكتب على النحو:

$$[\xi^i, \xi^k] = \frac{\partial \xi^i}{\partial t_k} \quad (i = 1, \ldots, k-1). \tag{8}$$

من اجل $k = m,$ فإن المجموعة S_m تطابق جواد للنقطة a . إذن نلاحظ بجوار للنقطة a ، ان مركبات الاشعة $\xi^1, \ldots, \xi^m$ ابتداء من الرتبة $(m + 1)$، منعدمة. الّا ان التمثيل $\xi^k = \{\xi_1^k, \ldots, \xi_m^k, 0, \ldots, 0\}$ يعني ان الشعاع ξ^k ماس لكل سطح $P = \{t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n\}$ حيث تتغير الوسيطات $t_1, \ldots, t_m$، اما الكميات $h_{m+1}, \ldots, h_n$ فهي ثابتة؛ إنه ماس، على وجه الخصوص، عند النقطة

$$a_0 = (t_1^0, \ldots, t_m^0, h_{m+1}^0, \ldots, h_n^0) \in$$

المنتمية الى P للمنحنى

$$L = \{t_1^0 + \tau\xi_1^k(a_0), \ \ldots, \ t_m^0 + \tau\xi_m^k(a_0), h_{m+1}^0, \ \ldots, h_n^0\}$$ حيث

$|\tau| \leqslant \delta$ الذي يقع على السطح P. نرى ان هذه السطوح ذات ابعاد تساوي m وتمر بكل نقطة بجوار النقطة a. وبالتالي فإن وجود السطوح المغلفة قد اثبت.

يبقى اثبات وحدانية السطح المغلف المار بالنقطة المعطاة a. لنفرض ان هناك سطحا مغلفا آخراً $\widetilde{P}$ معطى بتابع $x = \widetilde{x}(u)$ قابل للإشتقاق باستمرار غير مطابق للسطح P في اي جوار للنقطة a_0. نختار على السطح $\widetilde{P}$ منحنيا $L = \{x = x(\tau)\}$ يمر بالنقطة a ولا يقع باكمله على P. تكتب معادلة هذا المنحنى ضمن الاحداثيات الجديدة، على الشكل:

$$x = x(\tau) = \{t_1(\tau), \ \ldots, \ t_m(\tau), \ h_{m+1}(\tau), \ \ldots, \ h_n(\tau)\}$$

وشعاعه الموجه هو:

$$x'(\tau) = \{t_1'(\tau), \ \ldots, \ t_m'(\tau), \ h_{m+1}'(\tau), \ \ldots, \ h_n'(\tau)\}.$$

الّا ان الفرض يقول بان المنحنى L ماس عند كل نقطة x للمنوعة الخطية $T(x)$ المولدة عن الاشعة $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x).$ رأينا ان المركبات الاخيرات البالغ عددها $n - m$ لهذه لاشعة ضمن الاحداثيات الجديدة، منعدمة؛ فالامر إذن كذلك بالنسبة للشعاع $x'(\tau).$ وهكذا

$$h_{m+1}'(\tau) = \ldots = h_n'(\tau) = 0,$$ اي

ان التوابع $h_{m+1}(\tau), \ldots, h_n(\tau)$ ثابتة على المنحنى؛ إذن يقع المنحنى L على

السطح P وهو ما يناقض الفرض. انتهى برهان النظرية.

74.2 . هل توجد جمل احداثيات لها شعاعا موجها معطى؟

لتكن
$$\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$$
حقولا شعاعية معطاة في ساحة $G \subset X = R_n$ ، مستقلة خطيا عند كل نقطة $x \in G$. نطرح السؤال التالي: هل توجد في الساحة G، أو على الاقل في جوار نقطة معطاة $a \in G$، جملة احداثيات (منحنية) بحيث يكون هناك تطابق بين الاشعة $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ والاشعة الموجهة m احداثية.

نشير في البداية الى شرط لازم ليكون الجواب بنعم. لتكن $(t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n)$ جملة احداثيات من النوع المطلوب، حيث ان الشعاع $\xi^j(x)$ شعاع موجه للسطر الذي لا يتغير فيه سوى الاحداثية t_j اما باقي الاحداثيات فثابتة. إن الشعاع $\xi^j(x)$ يكتب ضمن هذه الجملة على الشكل:
$$\xi^j(x) = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0).$$

بحساب $[\xi^i, \xi^j]$ في هذه الجملة وتطبيق الدستور 44.2 نرى ان $[\xi^i, \xi^j] \equiv 0$. وهكذا فإن الشرط $[\xi^i, \xi^j] \equiv 0$ لازم لكي تكون جملة احداثيات من النوع المطلوب موجودة. لنثبت ان هذا الشرط كاف ايضا. نبين ان جملة الاحداثيات $t_1, \ldots, t_m, h_{m+1}, \ldots, h_n$ المنشأة انطلاقا من الحقول $\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)$ حسب القاعدة 54.2 تتمتع بالخاصية المطلوبة. بالفعل، عندما تتوفر شروط النظرية 64.2 ، فإن مركبات الاشعة $\xi^j(x)$ ، ضمن الاحداثيات الجديدة، تكتب على الشكل.
$$\xi^j(x) = \{\lambda_1^j(x), \ldots, \lambda_m^j(x), 0, \ldots, 0\}.$$

لدينا المساواة ((2)_54.2) التالية على المجموعة
$$S_{l+1} = \{t_1, \ldots, t_{l+1}, 0, \ldots, h_{m+1}, \ldots, h_n\}$$
$$0 = [\xi^i, \xi^{l+1}] = \frac{\partial \xi^i}{\partial t_{l+1}}.$$

ينتج منها أن مركبات الشعاع ξ^i ثابتة على الخطوط الشعاعية للحقل ξ^{i+1} ، الآن ان الحقل ξ^i ، من اجل $t_{i+1} = 0$ اي على S_i ، له المركبات $\{0,\ldots,1,\ldots,0\}$؛ كنا راينا ان له نفس المركبات على S_{i+1} .
عندما نطبق بطريقة مماثلة المساواة $[\xi^i, \xi^{i+2}] = 0$ نرى ان الحقل ξ^i له نفس المركبات على S_{i+2} ؛ بمواصلة هذه العملية تثبت ان لهذا الحقل نفس المركبات على S_m ، وبالتالي في جواد للنقطة a. وهكذا نرى ان الحقل ξ^i موجه للإحداثية ذات الرتبة i من جملة الاحداثيات الجديدة، وهو المطلوب.

إذا كان $m = 1$ أي إذا كان هناك حقل شعاعي $\xi(x) = \xi^1$ واحد فإن فرض النظرية محقق بصفة تلقائية؛ وهكذا، إذا تعلق الامر بحقل شعاعي واحد $\xi(x)$، فإنه توجد دوما جملة احداثيات يكون من اجلها الحقل $\xi(x)$ حقلا موجها الاحداثية من الاحداثيات.

نشير مرة اخرى الى ان وجود جملة احداثيات من النوع المطلوب غير مضمون الآ في جوار لنقطة معطاة $a \in G$ حيث تقوم الاستدلالات 2.45 .

§2 .5 . نظرية فروبينيوس (Frobenius)

2 .15 . طرح المسألة. نقوم بدراسة معادلة تفاضلية من الشكل:

$$y'(x) = \Phi(x, y(x)). \qquad (1)$$

ينبغي ان يكون التابع المجهول $y(x)$ معرفا في جوار، على الاقل، لنقطة a من فضاء نظيمي X ويأخذ قيمة في فضاء نظيمي Y. حتى يكون لهذه المسألة معنى يجب ان نفترض بأن التابع $\Phi(x, y)$ معرف على جداء ساحتين كيفيتين V et $U \ni a$ من القضاءين X et Y على التوالي، وانه يأخذ قيمة في نفس الفضاء الذي ينتمي اليه $y'(x)$، اي في $L(X, Y)$.

نستكمل المعادلة (1) بالشرط الابتدائي

$$y(a) = b \in V. \qquad (2)$$

إذا كان $X = R_1$، فإن (1) تمثل معادلة تفاضلية عادية. في هذه الحالة وكما رأينا في 1 .16–1 .26، فإنه يوجد جوار للنقطة a، يكون الحل المطلوب $y(x)$ معرفاً عليه ووحيدا، شريطة ان تتوفر بعض الشروط على التابع$\Phi(x, y)$(استمرار، شرط ليبشيتز بالنسبة y ، قابلية اشتقاق). في الحالة العامة حيث$X \neq R_1$، فإن شروط قابلية الاشتقاق، رغم تعقيدها، غير كافية لحل المعادلة (1): يجب أن يحقق التابع $\Phi(x, y)$ بعض المعادلات الخاصة.

نعالج الحالة التي يكون فيها$X = R_2, Y = R_1$ إن المعادلة (1) تكافيء في هذه الحالة جملة معادلتين تفاضلتين جزئيتين:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= \Phi_1(x_1, x_2, y), \\ \frac{\partial y(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= \Phi_2(x_1, x_2, y). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

نفرض ان التابعين Φ_1 و Φ_2 يقبلان الاشتقاق في الساحة $U \times V$ عندئذ، عندما يكون الحل موجودا فهو يقبل تلقائيا الاشتقاق مرتين، وبالتالي يحقق شرط تناظر المشتق الثاني (2 .23ـ ج): $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$.

لدينا بفضل المعادلتين (3):

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \Phi_1(x_1, x_2, y(x_1, x_2)) = \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_2(x_1, x_2, y(x_1, x_2)),$$

وهذا يؤدي، حسب (3) ايضا، الى العلاقة.

$$\frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, y)}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_1(x_1, x_2, y)}{\partial y} \Phi_2(x_1, x_2, y) =$$
$$= \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, y)}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2(x_1, x_2, y)}{\partial y} \Phi_1(x_1, x_2, y)$$

التي تتحقق بمجرد وجود حل للجملة (3). بخصوص حل معطى $y(x_1, x_2)$، نرى ان هذه العلاقة محققة تطابقيا بالنسبة لكل القيم x_1 ، x_2 ، $y(x_1, x_2)$ ، ثم إذا استطعنا، من اجل اية اعداد ثلاثةa_1, a_2, bحيث

$\in U, b \in V\{a_1, a_2\}$ ايجاد حل يحقق الشرط $y(a_1, a_2) = b$ فإن العلاقتين (3) محققتان تطابقيا بالنسبة لكل القيم $x_2 = a_2$ ، $x_1 = a_1$ ، $y = b$.

يوحي لنا هنا المثال بالشروط الواجب توفرها لحل المعادلة (1) في الحالة العامة. إذا وجد حل $y(x)$ للمعادلة (1) وكان التابع $\Phi(x, y)$ قابلا للإشتقاق في الساحة $U \times V$ فإن التابع $y(x)$ يقبل الاشتقاق مرتين، وبالتالي فإن شرط تناظر المشتق الثاني $2.32a$ محقق: لدينا من اجل كل h k X

$$y''(x)\, hk = y''(x)\, kh.$$

حسب المعادلة (1)، فإن نشر المشتق الكلي باستعمال مرة اخرى (1) يعطينا العلاقة.

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Phi\right) hk = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Phi\right) kh \qquad (4)$$

المحققة من اجل كل h و k بمجرد وجود حل للمعادلة (1)؛ ثم إن العلاقة (4) محققة من اجل كل a x و b y عندما تقبل المعادلة (1) حلا $y(x)$ يحقق أي شرط ابتدائي $y(x) = b$.

25. 2 . نَفرض في البداية ان المعادلة (1) مع الشرط الابتدائي (2) تقبل حلا في جراء $W = \{x : |x - a| < r\}$ للنقطة a ولنقدم بعض حاصياتها ليكن $h \in X$ شعاعا كيفياً، $|h| < r$ ؛ نعتبر الحل $y(x)$ على القطعة المستقيمة $x(t) = a + th$، $0 \leqslant t \leqslant 1$ هنا يمكننا تناول $y(x)$ كتابع للوسيط العددي. $t \in [0, 1]$. نرمز $\varphi(t) = y[x(t)]$ عندئذ $\varphi'(t) = y'[x(t)]\, x'(t) = y'[x(t)]\, h$ كما تأخذ المعادلة (1) الشكل:

$$\varphi'(t) = \Phi(a + th, \varphi(t))\, h. \qquad (5)$$

إنما معادلة تفاضلية عادية بالنسبة للتابع $\varphi(t)$ ذي المتغير $t \in [0, 1]$. لدينا من اجل $t = 0$: $\varphi(0) = y(a) = b$.

بحيث أن المعادلة (5) تستكمل بالشرط الابتدائي:

$$\varphi(0) = b. \quad (6)$$

إذا كان التابع$\Phi(x, y)$قابلا للإشتقاق في الساحة$U \times V$، فإن التابع $\Phi(a + th, \varphi(t))\, h$الوارد في المعادلة(5)يقبل ايضا الاشتقاق (بالنسبة (t))، إذن تحقق المعادلة (5) شروط وجود ووحدانية حل المعادلة التفاضلية المعطاة بشرط ابتدائي معطى. يأتي من ذلك أن: كل حل للمعادلة (5) بالشرط (6) لايمكن الّا أن يكون وحيداً. بالتالي فإن قيم حل المعادلة (1) بالشرط (2) معرفة بصفة وحيدة على كل قطعة مستقيمة $x = a + th$وعليه فهي معرفة بصفة وحيدة في جوار النقطة a. لدينا اكثر من ذلك: تسمع النتيجة التي توصلنا اليها بايجاد هذا الحل بمجرد العلم بانه موجود: يكفي بالفعل ان نكامل المعادلة (5) والاخذ بعين الاعتبار الشرط (6) على كـــل القطعـــة المستقيمـــة$x = a + th$ ثم وضـــع

$$y\,[x\,(t)] = \varphi\,(t).$$

35.2 . نفرض الآن اننا لا نعلم شيئاً حول حل المعادلة (1) ولنقيم بانشاء حلها نحن نعرف الطريقة التي ينبغي اتباعها: يجب مكاملة المعادلة (3) مع الشرط (6) على كل قطعة$x = a + th$،$0 \leqslant t \leqslant 1$. تحوي هذه المعادلة الوسيط h. تسمح نظرية حل معادلة عادية مزودة بوسيط (61.1) ان نقول بانه يوجد عددان$\delta > 0, \rho > 0$وتابع $\varphi(t, h)$ قابل للاشتقاق بالنسبة t يمثل، من اجل كل $t, h,$ $|h| \leqslant \rho, 0 \leqslant t \leqslant \delta,$ حلاً للمسألة (5) - (6).

نقتصر الآن على قطعــة مستقيمــة واحــدة$x = a + th$. حيـــث t_0 معطى، ونضع$x_0 = a + t_0h$ ثم نعين الكمية $y(x_0) = \varphi(t_0, h)$. علينا ان نبين بان القيمة $y(x_0)$ لا تتعلق $t_0\, h$ باعتبار كل منهما على حدة بل تتعلـق x_0 . ليكـن k شعـاعـا مـوازيـا h. $t_0h = \tau_0k$. وان التـــابعين $\varphi(t, h)$ ، $\varphi(\tau, k)$ حلان للمعادلتين (5) و:

$$\varphi'(\tau, k) = \Phi(a + \tau k, \varphi(\tau, k))\, k \qquad (7)$$

على التوالي، من اجل نفس الشرط الابتدائي (6). نجري في (7) تبديل المتغير $\tau = t\frac{\tau_0}{t_0}$ ونـــرمـــز بـ $\varphi\left(t\frac{\tau_0}{t_0}, k\right) = \psi()$. عنـــدئـــذ $\psi'(t) = \varphi'\left(t\frac{\tau_0}{t_0}, k\right)\frac{\tau_0}{t_0}$، بحيث ان التابع $\psi(t)$ يحقق المعادلة:

$$\psi'(t) = \Phi\left(a + t\frac{\tau_0}{t_0}k,\ \psi(t)\right)k\frac{\tau_0}{t_0} = \Phi(a + th,\ \psi(t))\,h$$

التي تطابق (5). لدينا بفضل نظرية الوحدانية $\psi(t) = \varphi(t, h)$ ومنه:

$$\varphi(\tau_0, k) = \psi(t_0) = \psi(t_0, h) = y(x_0)$$، وهو المطلوب.

أخيرا، فإن التابع $y(x)$ المعرف بصفة وحيدة على كل القطعة المستقيمة $x = a + th$

من اجل $0 \leqslant t \leqslant \delta$، $|h| \leqslant \rho$ وعليه فهذا التابع معرف في جوار للنقطة a (وبخاصة في الكرة $|x - a| \leqslant \delta\rho$). برهنا على ان التابع $y(x)$ يقبل عند النقطة a مشتقا وفق كل نصف مستقيم ينطلق من a وان قيمة هذا المشتق على كل شعاع $h \in X$ يطابق $\Phi(a, b)\,h$.

4.5.2. نثبت الآن انه إذا حقق $\Phi(x, y)$ الشرط (4) وقبل مشتقات ثانية فإن التابع $y(x)$، في جوار للنقطة a، يقبل ايضا الاشتقاق وفق الاتجاهات المخالفة للشعاع المنطلق من النقطة a الى النقطة x.

ليكن $\gamma = \{x \in X;\ x = a + th + sk\}$ مستويات بعده 2، مولدا عن شعاعيين h. k غير متوازيين. ننشيء، في البداية، على هذا المستوى تابعا $\varphi(t, s)$ يحقق المعادلة (1) والشرط الابتدائي (2) ثم نثبت انه يطابق (على γ) التابع $y(x)$ المعرف اعلاه.

لهذا الغرض، نلاحظ انه بمجرد ان يكون التابع المطلوب $y(x)$ للمعادلة (1) مع الشرط (2) موجوداً فإن التابع $\varphi(t, s) = y(a + th + sk)$ يحقق جملة معادلتين ذات مشتقات جزئية.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = y'(x)\, x'(t) = \Phi(x, y)\, h = \Phi(a + th + sk, \varphi)\, h,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = y'(x)\, x'(s) = \Phi(x, y)\, k = \Phi(a + th + sk, \varphi)\, k$$

مع الشرط الابتدائي:

$$\varphi(0, 0) = y(a) = b.$$

نرمز باختصار لهذه الجملة بـ

$$(8) \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \Phi_1(t, s, \varphi), \quad \Phi_1 \equiv \Phi(a + th + sk, \varphi)\, h, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= \Phi_2(t, s, \varphi), \quad \Phi_2 \equiv \Phi(a + th + sk, \varphi)\, k. \end{aligned}\right|$$

(يظهر الشعاعان h و k كوسيطين.)

لتخلع فرض وجود الحل $y(x)$ ولنعتبر الجملة (8) بالشرط:

$$\varphi(0, 0) = b.$$

من السهل اثبات ان التابعين $\Phi_1(t, s, \varphi)$ و $\Phi_2(t, s, \varphi)$ يحققان علاقة تأتي من شرط التناظر (4). بالفعل لدينا بداهة:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} kh, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} hk.$$

ثم نحسب $\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\Phi_2$. تمثل هذه العبارة الجزء الخطي الرئيسي لتزايد التابع $\Phi_1(t, s, \varphi)$، عندما يتزايد φ بتزايد Φ_2، اي الجزء الخطي الرئيسي (بالنسبة Φ_2) للفرق:

$$\Phi_1(t, s, \varphi + \Phi_2) - \Phi_1(t, s, \varphi) =$$
$$= [\Phi(a + th + sk, \varphi + \Phi_2) - \Phi(a + th + sk, \varphi)]\, h.$$

بما ان التابع $\Phi(x, y)$ قابل للإشتقاق فإن هذا الجزء الخطي الرئيسي يطابق $\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Phi_2 h$، إذن يطابق $\frac{\partial \Phi}{\partial y}\Phi kh$. لدينا، بطريقة مماثلة

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\Phi hk.$$

وهكذا تأخذ المساواة (4) الشكل:

$$(10) \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi}\Phi_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi}\Phi_2;$$

وهي العلاقة التي كان ينبغي توقعها حسب المثال 15.2 .

ننتقل الآن الى حل الجملة (8) . يتبين من المعادلة الثانية من (8) ان التابع $\psi(s) = \varphi(0, s)$ يحقق المعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \Phi_2(0, s, \psi) \tag{11}$$

والشرط الابتدائي $b = \psi(0) = \varphi(0, 0)$ (وهي المعادلة التي اعتبرناها في 25.2 حتى وان كان هذا بدون اهمية ، الآن) . تبين النظرية 16.1 انه يوجد $\rho_1 > 0$ و $\rho_1 \leqslant \rho$ و $\delta_1 > 0$ و $\delta_1 \leqslant \delta$ بحيث يكون الحل $\psi(s)$ موجودا من اجل كل القيم $|h| < \rho_1$ ، $|k| < \rho_1$ على القطعة $0 \leqslant s \leqslant \delta_1$. نعتبر الآن على المستقيم $s = s_0 \in [0, \delta_1]$ في المستوى $\{t, s\}$ المعادلة التفاضلية العادية :

$$\frac{\partial \varphi(t, s_0)}{\partial t} = \Phi_1(t, s_0, \varphi(t, s_0)) \tag{12}$$

مع الشرط الابتدائي :

$$\varphi(0, s_0) = \psi(s_0). \tag{13}$$

نطبق مرة اخرى النظرية 16.1 فيأتي وجود $\rho_2 > 0$ و $\rho_2 \leqslant \rho_1$ و $\delta_2 > 0$ و $\delta_2 \leqslant \delta_1$ بحيث تكون المسألة (12) - (13) قابلة للحل ، من اجل $|h| \leqslant \rho_2$ $|k| < \rho_2$ ، $s_0 \in [0, \delta_2]$ على القطعة المستقيمة $t \in [0, \delta_2]$. يتبين من 73.2 - ب ان الحل $\varphi(t, s)$ يقبل الاشتقاق مرتين بالنسبة للوسيط s ، وحسب 73.2 - ج فإن $\frac{\partial \varphi(t, s)}{\partial t}$ يقبل ايضا الاشتقاق بالنسبة s ؛ ثم إن $\frac{\partial \varphi(t, s)}{\partial s}$ يقبل بدوره ، الاشتقاق بالنسبة لـ t (66.1) والمشتقات المذكورة كلها مستمرة. لنثبت ان $\varphi(t, s)$ يحقق المعادلة :

$$\frac{\partial \varphi(t, s)}{\partial s} = \Phi_2(t, s, \varphi). \tag{14}$$

للقيام بذلك نعرّف التابع .

$$\Psi(t,\ s)=\frac{\partial\varphi(t,\ s)}{\partial s}-\Phi_2(t,\ s,\ \varphi(t,\ s)).$$

لدينا حسب الانشاء :

$$\Psi(0,\ s)=\frac{\partial\varphi(0,\ s)}{\partial s}-\Phi_2(0,\ s,\ \varphi(0,\ s))=\frac{\partial\psi}{\partial s}-\Phi_2(0,\ s,\ \psi)=0 \quad (15)$$

ثم :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi(t,\ s)}{\partial t\,\partial s}-\frac{\partial}{\partial t}\Phi_2(t,\ s,\ \varphi(t,\ s)).$$

باستخدام تناظر المشتق المختلط (2 .23 ـ ج) ونشر المشتق الكلي في الحد الثاني نحصل على :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi(t,\ s)}{\partial s\,\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}\Phi_1(t,s,\varphi(t,s))-\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\Phi_1$$

ينتج من ذلك حسب (10) ان :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial t}&=\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial t}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}\Phi_1=\\&=\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\Phi_2=\\&=\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\Phi_2\right)=\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}\Psi.\end{aligned} \quad (16)$$

نرى إذن ان التابع $\Psi(t,\ s)$ يحقق المعادلة التفاضلية العادية (16) بالشرط الابتدائي (15)؛ إذن بمراعاة نظرية الوحدانية فإن $\Psi(t,\ s)\equiv 0$ وبذلك اثبتت المساواة (14).

هكذا فإن التابع $\varphi(t,\ s)$ يحقق معادلتين الجملة (8) في المربع $t\in[0,\ \delta_2]$ ، $s\in[0,\ \delta_2]$. بالتالي يمثل التابع $z(x)=\varphi(t,\ s)$ (حيث $x=a+th+sk$) حل للمعادلة (1) مع الشرط (2) في المستوى γ ، إذن فهو يطابق التابع $y(x)$ المنشأ في 2 .35 . ينتج من ذلك ان التابع $y(x)$ وكذا التابع $z(x)$ يقبل الاشتقاق عند $x=a+th$ وفق اتجاه الشعاع $\mathbf{k}$ ، وان :

$$y'(x)\,k=\frac{\partial\varphi(t,\ 0)}{\partial s}=\Phi_2(t,\ 0,\ \varphi)=\Phi(x,\ y)\,k. \quad (17)$$

55. 2 . بمقدورنا الآن تقديم نص النظرية الاساسية في هذه الفقرة:

نظرية . (فروبينيوس) ليكن $\Phi(x, y)$ تابعا معرفا على جداء ساحتين $U \subset X$ و $V \subset Y$ ويأخذ قيمة في الفضاء $L(U \times Y)$ ؛ نفرض بعد ذلك ان التابع $\Phi(x, y)$ يقبل الاشتقاق مرتين في الساحة $U \times V$ وانه يحقق فيها العلاقة:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Phi\right) hk = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Phi\right) kh$$

وذلك مهما كان الشعاعان k و h في الفضاءين X و Y على التوالي. يوجد عندئذ عدد $0 < \delta$ وتابع $y = y(x): X \to Y$ بحيث يحقق هذا الأخير في الكرة $\delta > |x - a|$ ، المعادلة التفاضلية

$$y'(x) = \Phi(x, y(x))$$

مع الشرط الابتدائي $(a \in U)$ ، $(b \in V)$

$$y(a) = b.$$

ثم إن الحل $y(x)$ وحيد في الكرة المذكورة.

البرهان . رأينا ضمن 35.2 انه يوجد في جوار نقطة a تابع $y(x)$ $y(a) = b$ يقبل، حسب 4.5.2 ، عند كل نقطة x مشتق وفق كل اتجاه، وهذا المشتق يحقق الشرط (17). يمثل التابع $\Phi(x, y)$ ، فرضا، من اجل كل x ، $y = y(x)$ ، مؤثرا خطيا من الفضاء x في الفضاء y ومستمرا بالنسبة X . ثم إن التابع $y(x)$ يقبل الاشتقاق حسب 1.48d ومشتقه يطابق المؤثر $\Phi(x, y)$ انتهى برهان النظرية.

65. 2 . **وجود تابع اصلي** . نفرض، في شروط النظرية 55.2 ، ان التابع $\Phi(x, y)$ لا يتعلق ب y بحيث ان الامر يختص بالمعادلة:

$$y'(x) = \Phi(x), \; y(a) = b. \qquad (1)$$

إنه مسألة البحث عن تابع اصلي للتابع $\Phi(x)$ $(X \to L(X, Y))$ اي تابع $y(x)$ مشتقه يطابق $\Phi(x)$. إن هذه المسألة غير قابلة للحل إذا كان التابع

$\Phi(x)$ كيفياً. إن الشرط اللازم لوجود تابع اصلي هو تناظر المشتق الجزئي $y(x)$ ، وهو الامر الذي يؤدي الى العلاقة:

$$\Phi'(x)\,hk = \Phi'(x)\,kh, \qquad h \in X, \qquad k \in X. \tag{2}$$

ينتج من النظرية 2 .55 ان المساواة (2) تمثل في آن واحد شرطا كافيا لوجود تابع اصلي في جواد للنقطة a .

6.2§ . جمل المعادلات ذات المشتقات الجزئية وتطبقات هندسية .

16.2 . أ . نعتبر جملة معادلات تفاضلية من الشكل:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} = \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} = \Phi_n(x_1, \ldots, x_n, y)\end{array}\right\} \tag{1}$$

بتابع مجهول $y(x) \equiv y(x_1, \ldots, x_n)$ونبحث عنه في جواد نقطة معطاة $a = (a_1, .., a_n) \in R_n$ويأخذ هذا التابع قيمة في فضاء y ويتمتع بالشرط الابتدائي

$$y(a) = b \in Y \tag{2}$$

فيما يتعلق بالتوابع$\Phi_i(x_1, .., x_n, y)$نفرض انها معرفة، في جداء الساحات $U_1 \times \ldots \times U_n \times V$ حيث $U_i \ni a_i$ ، $V \ni b \; (i = 1, \ldots, n)$ وتمثل، من اجل كل $x_i \in U_i$ و $y \in V$ ، مؤثرات خطية $X_i \to L(X_i, Y)$. يمكن في هذه الحالة كتابة الجملة (1) على شكل معادلة واحدة:

$$y'(x) = \Phi(x, y): X \to L(X, Y), \tag{3}$$

حيث

$$\Phi(x, y)\,h = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y)\,h_i, \; h = \{h_1, \ldots, h_n\} \in R_n, \in R_n,$$

$$U = U_1 \times \ldots \times U_n$$

بعد ذلك يتبين أن المسألة حالة خاصة من الحالة الواردة في نظرية فروبينيوس 2 .55 . يمكن كتابة الشرط اللازم كل 2 .15(4)، كما فعلنا

بخصوص الجملتين 2 .45 (8) (3) 2.51 على الشكل

$$\frac{\partial\Phi_i(x,y)}{\partial x_j}+\frac{\partial\Phi_i(x,y)}{\partial y}\Phi_j(x,y)= \tag{4}$$

$$=\frac{\partial\Phi_j(x,y)}{\partial x_i}+\frac{\partial\Phi_j(x,y)}{\partial y}\Phi_i(x,y)\quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n).$$

حينئذ تكتب نظرية فروبينيوس عند تطبيقها على حالتنا هذه كما يلي؛ إذا كانت التوابع $\Phi_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y)$ قابلة للإشتقاق مرتين وتحقق في الساحة $U\times V$ الشروط (4)، فإننا نستطيع، من اجل كل نقطة $a\in U$ وكل نقطة $b\in V$ ، ايجاد $\delta>0$ بحيث يوجد حل $y=y(x)$ للجملة (1) مع الشرط الابتدائي (2)، ويكون هذا الحل وحيدا في الكرة $|x-a|<\delta$.

ب. تبقى النتيجة المحصل عليها قائمة، بطبيعة الحال، من اجل الجملة البسيطة التالية.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial y(x_1,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_1}&=\Phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial y(x_1,\ \ldots,\ x_n)}{\partial x_n}&=\Phi_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

نلاحظ هنا بأن الشرط (4) يأخذ شكلات في غاية البساطة.

$$\frac{\partial\Phi_i(x,y)}{\partial x_j}=\frac{\partial\Phi_j(x,y)}{\partial x_i}\quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

ج. تضم الصورة العامة المقدمة آنفا، ايضا، الجمل ذات توابع مجهولة متعددة $z_k(x): G\subset R_n\to Y_k,\ k=1,\ \ldots,\ m$:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i}=f_{ki}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ z_1,\ \ldots,\ z_m)$$

$$i=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ \ldots,\ m \tag{7}$$

حيث $(k=1,\ \ldots,\ m;$ و $i,\ p=1,\ \ldots,\ n)$ مع الشروط الابتدائية الكيفية.

$$z_k(x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)=z_k^0\in G\quad (k=1,\ \ldots,\ m). \tag{8}$$

ينتج من أ (حيث يجب وضع Y من يساوي المجموع المباشر

ان الشرط اللازم والكافي لحل المسألة (7) - (8) يكتب على الشكل:

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_p} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{kl}}{\partial z_j} f_{jp} \equiv \frac{\partial f_{kp}}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{kp}}{\partial z_j} f_{jl}$$

(حيث $k=1,\dots,m$ ؛ $l,p=1,\dots,n$) مهما كانت المعطيات الابتدائية في $Y_1 + \dots + Y_m$ ساحة تعريف التوابع $f_{kl}(x, z)$.

26. 2 . التفسير الهندسي. من اجل معادلة تفاضلية عادية

$$y' = \Phi(x, y) \; (x \in U \subset R_1, \; y \in V \subset R_1), \qquad (1)$$

لدينا تفسير هندسي معروف: نرفق كل نقطة $\{x_0, y_0\}$ من الساحة $U \times V \subset R_2$ بمستقيم

$$y - y_0 = \Phi(x_0, y_0)(x - x_0), \qquad (2)$$

ونبحث عن منحنى يمر بالنقطة المعطاة $\{a, b\} \in U \times V$ ومماسه عند النقطة $\{x_0, y_0\}$ هو المستقيم (2). تضمن نظرية وجود ووحدانية الحل قابلية هذه المسألة للحل ووحادنية حلها عندما يكون التابع $\Phi(x, y)$ مرنا بكفاية.

هناك تفسير هندسي مماثل للمعادلة العامة.

$$y' = \Phi(x, y) \quad (x \in U \subset X, \; y \in V \subset Y).$$

نرفق هنا كل نقطة $\{x_0, y_0\} \in U \times V$ بمنوعة خطية في الفضاء $X \times Y$:

$$y - y_0 = \Phi(x_0, y_0)(x - x_0), \qquad (3)$$

ونبعث عن تابع $y = y(x)$ (حيث $y(a) = b$) بيانه في الفضاء $X \times Y$ (« منوعة تكاملية ») يقبل عند النقطة $\{x_0, y_0\}$ مستويا ماسا (62. 1- ج) هو المنوعة الخطية الموافقة (3). في هذه الحالة، لا يمكننا القول

بأن كل تابع $\Phi(x, y)$ (مهما كانت مرونته) يؤدي الى مسألة قابلة للحل؛ نحن نعلم بأن الشرط 2 .15 (4) (اللازم والكافي) هو الذي يحدد ذلك.

إن ابسط مثال غير تافه يمكن تقديمه من اجل $X = R_2$ و $Y = R_1$ هو التالي. في ساحة $U \times V$ (حيث $V \subset R_1$ و $U \subset R_2$) نمرر بكل نقطة $\{x_1^0, x_2^0, y_0\}$ مستويا:

$$y - y_0 = \Phi_1(x_1^0, x_2^0, y_0)(x_1 - x_1^0) + \Phi_2(x_1^0, x_2^0, y_0)(x_2 - x_2^0) \quad (4)$$

ثم نبحث عن سطح $y = y(x_1, x_2)$ يمر بالنقطة المعطاة $\{a_1, a_2, b\} \in U \times V$ ويقبل كمستو ماس، عند كل نقطة $\{x_1^0, x_2^0, y_0\}$ المستوى (4). إن هذه المسألة لا تقبل حلا من اجل كل ثنائية تابعين $\Phi_1(x_1, x_2, y)$ و $\Phi_2(x_1, x_2, y)$ بل تقبل حلافقط من اجل الثنائيات التي تحقق الشرط الذي اصبح معروفا لدينا:

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\Phi_2 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\Phi_1$$

(شريطة وجود المشتقات الثانية).

نورد ضمن 2 .36 و 2 .46 بعض المسائل الهندسية الاخرى المرتبطة بنظرية فروبينيوس.

2 .36 . أ. نفرض، من اجل كل نقطة x في ساحة $V \subset R_n$، أن هناك مستويا بعده $(n - 1)$ نرمز له بـ $\gamma(x) \ni x$ يتعلق باستمرار بـ x؛ يجب انشاء تابع $w = f(x): V \to R_1$ بحيث يكون كل سطح مستوى $f(x) = C$ مماسا عند كل نقطة $x \in V$ للمستوى $\gamma(x)$. بما ان المسألة مطروحة، كالمعتاد؛ محليا فإننا نفرض أن ليس هناك مستويات $\gamma(x)$ في الساحة V تحوي مستقيمات موازية لمحور العناصر x_n (إذا لم يكن الامر كذلك فإننا نجري تبديلا في المحاور) وهو السبب الذي يحملنا على تغيير الرموز: نرمز بـ y للإحداثية x_n و بـ x لمجموعة الاحداثيات الاخرى

$\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. نرمز إذن لكل نقطة من الساحة V ب $\{x, y\}$.
نكتب بطبيعة الحال $\gamma(x, y)$ مكان $\gamma(x)$. بذلك تصبح معادلة
المستوى $\gamma(x^0, y^0)$ على الشكل:

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i(x^0, y^0)(x_i - x_i^0) \qquad (1)$$

حيث $\Phi_i(x, y)$ توابع معروفة فرضا. نفترض أن هذه التوابع تقبل
الاشتقاق مرتينز نرمز للحل المطلوب ب $w = f(x, y)$. لنفرض وجود
حل $w = f(x, y)$. نثبت نقطة $a \in R_{n-1}$ تنتمي الى المسقط على R_{n-1}
من الساحة $V \subset R_n$ ونعتبر $f(a, y)$. من البديهي أن $\frac{\partial f(a, y)}{\partial y} \neq 0$ والآ
فإن المستقيم x = a يكون منتميا الى سطح مستوى للتابع $f(x, y)$ ، وهذا
غير صحيح فرضا. نلاحظ بعد ذلك إن التابع $F(f(x, y))$ يمثل حلا
لمسألتنا إن كان الامر كذلك فيما يخص التابع $f(x, y)$ ؛ يمكننا
الاستفادة من هذه الملاحظة حين نريد الحصول على حل $f(x, y)$ يحقق
الشرط $f(a,y) \equiv y$ (على جزء Δ ، على الاقل، من المستقيم x = a ،
وسوف نقتصر على هذا الجزء فيما يلي). إذن، فإن معادلة سطح المستوى
للتابع $f(x, y)$ ، الذي يمر بالنقطة $\{a, b\} \leqslant \Delta$ تكتب على الشكل
$f(a, y) = b$. يتبين من نظرية التابع الضمني، بجوار النقطة $\{a, b\}$ ،
ان هذه المعادلة تكافيء معادلة $y = y(x, b)$. إن المستوى الماسي لهذا
السطح عند النقطة $\{x^0, y^0\}$ هو:

$$y - y_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial y(x^0, b)}{\partial x_i}(x_i - x_i^0). \qquad (2)$$

بما ان المستويين (2) (1) متطابقان فإن التابع $y(x, b)$ يحقق جملة
المعادلات

$$\frac{\partial y(x, b)}{\partial x_i} = \Phi_i(x, y), \quad i = 1, \ldots, n-1 \qquad (3)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y(a, b) = b \tag{4}$$

يتضح من نظرية فروبينيوس انه لكي يوجد حل للمسألة (3) ـ (4) يلزم ويكفي ان تتحقق شروط قابلية المكاملة $(i, j = 1, \ldots, n-1)$

$$\frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial x_j} + \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial y}\Phi_j(x, y) = \frac{\partial \Phi_j(x, y)}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_j(x, y)}{\partial y}\Phi_i(x, y). \tag{5}$$

إذن فإن الشرط (5) لازم لكي تقبل المسألة المطروحة حلا. لنثبت أنه ايضا شرط كاف، على الاقل في جوار للنقطة $\{a, b\}$ ، عند توفر الشرط (5) فإن نظرية فروبينيوس تستلزم وجود حل $y(x, b)$، من اجل كل b ومن اجل جوار للنقطة a ، للجملة (3) مع الشرط (4). من الواضح ان $\frac{\partial y(a, b)}{\partial b} = 1$ ؛بالتالي يمكن حل المعالة $y = y(x, b)$ بالنسبة b ، حسب النظرية الخاصة بالتابع الضمني ، بحيث ان هذه المعادلة تكافيء معادلة من الشكل $b = f(x, y)$ نؤكد على أن التابع $f(x, y)$ هو التابع المطلوب. بالفعل ، إن المستوى الماس للسطح $f(x, y) = b$ هو المستوى الماس للسطح $y = y(x, b)$ وعليه فهذا المستوى هو (2)؛ الآ ان المعادلات (3) تستلزم ان المستوى (2) يطابق المستوى (1). وهو المطلوب.

ب ـ إذا كان $n = 2$ اي $n-1 = 1$ فإن الجملة (3) لا تضم سوى معادلة واحدة ملائمة. وهكذا ، إذا تعاطينا مستقيما $\gamma(x, y)$ من اجل كل نقطة $\{x, y\}$ في ساحة V من المستوى فإنه يمكننا اختيار تابع $f(x, y)$ يكون كل خط مستوى منه مماسا للمستقيم $\gamma(x, y)$ الموافق له (وذلك في جوار للنقطة المعطاة على الاقل). (ينبغي ، بطبيعة الحال، ان يكون المعامل الزاوي للمستقيم $\gamma(x, y)$ مرنا بكفاية). إذا كان $n > 2$ فإن المسألة المماثلة لا تقبل عموما الحل ، كما سبق ان رأينا.

46. 2 . نفرض، من اجل كل × في ساحة $V \subset R_n$ ان هناك n شعاعا مستقلا خطيا$g_1(x), \ldots, g_n(x)$ (بحيث يكون تعلقها ب x مرنا بكفاية). نتساءل عما إذا كان بالإمكان ادخال جملة جديدة من الاحداثيات $w_1, \ldots, w_n$ في الساحة V بحيث يكون كل خط احداثيات. (اي خط تكون عليه كل الاحداثيات ثابتة باستثناء واحدة، w_j مثلا) مماسا عند كل نقطة منه للشعاع $g_j(x)$ الموافق له.

إن وجدت مثل هذه الجملة من التوابع $w_k(x_1, \ldots, x_n)$ (حيث $(k = 1, \ldots, n)$ فإن كل سطح مستوى $w_k = C$ مماس عند كل نقطة منه للاشعة الموافقة له$g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_n$ ، ولذا فهو يقبل مستويا ماسا معطى: المستوى المولد عن الاشعة $g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_n$

وبالعكس، إذا استطعنا، من اجل كل$k = 1, \ldots, n$ ايجاد تابع مرن بكفاية $w_k(x)$ بحيث يكون كل من لمح مستوى لهذا التابع مماسا عند كل نقطة، للمستوى المولد عن الاشعة $g_1, \ldots, g_{k-1}, g_{k+1}, \ldots, g_n$ ، فإن المسألة ستحل لأن كل خط احداثيات سيكون في هذه الحالة مماسا عند كل نقطة للشعاع. نرى، مبدئياً ان مسألتنا ترد الى المسألة السابقة. من اجل n=2 ، فإنه يوجد دائما حل (شريطة ان تكون الاشعة المعطاة مرنة بكفاية)؛ اما بخصوص الحالة $n > 2$ فإن الحل يكون موجوداً بمجرد تحقق بعض شروط قابلية المكاملة التي سنحصل عليها بعد قليل. إن معادلة المستوي المولد عن الاشعة

$g_1(x^0), \ldots, g_{k-1}(x^0), g_{k+1}(x^0), \ldots, g_n(x^0)$ تكتب على الشكل:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^0 & g_{11}(x^0) \ldots g_{k-1,1}(x^0) & g_{k+1,1}(x^0) \ldots g_{n1}(x^0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n - x_n^0 & g_{1n}(x^0) \ldots g_{k-1,n}(x^0) & g_{k+1,n}(x^0) \ldots g_{nn}(x^0) \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

حيث $g_{ij}(x^0)$ هي مركبات الشعاع $g_i(x^0)$

ليكن $A_{ik}(x^0)$ المتمم الجبري لعنصر $g_{ik}(x^0)$ من المصفوفة المربعة

$n \times n$ حينئذ، عند نشر المعين في (1) وفق العمود الاول فإننا نضع المعادلة (1) على الشكل

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\, A_{ik}(x^0) = 0,$$

اي على الشكل التالي من اجل $A_{nk}(x^0) \neq 0$ (وهو ما يمكن افتراضه بدون المس بعمومية المسألة لأن الاشعة g_i مستقلة خطيا حسب الغرض)

$$x_n - x_n^0 = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_{ik}(x^0)}{A_{nk}(x^0)} (x_i - x_i^0).$$

وهكذا فإن التوابع $\Phi_i(x^0, y^0)$ الواردة في المعادلة 36.2 (1) معرفة. في الحالة الراهنة نلاحظ انها متعلقة بالدليل $k\ (=1, \ldots, n)$ بعد ذلك، علينا ان نتأكد من الشروط 36.2 (5)، وبمجرد تحقق هذه الشروط من اجل كل $k = 1, \ldots, n$ (وفي هذه الحالة فقط) فإن مسألتنا تقبل الحل، محليا على الاقل.

56.2 . الجمل غير المحققة لشروط نظرية فروبينيوس. نعتبر الجملة التالية:

$$(1) \quad \frac{\partial z_k}{\partial x_i} = f_{ki}(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, m)$$

في ساحة $U \times V$، $U \subset R_n$، $V \subset R_m$، وذلك بدون افتراض ان شروط نظرية فروبينيوس

$$(2) \qquad \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_p} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_j} f_{jp} = \frac{\partial f_{kp}}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_{kp}}{\partial z_j} f_{ji}$$
$$(k = 1, \ldots, m; \quad i,\ p = 1, \ldots, n)$$

محققة تطابقيا في كل الساحة $U \times V$، بحيث ان المجموعة S المؤلفة من النقاط (x, z) التي لا تتحقق من اجلها الشروط (2)، تشكل منوعة في $U \times V$ بعدها اصغر من بعد الساحة المعتبرة. إن الجملة (1) لا تقبل حلاً يحقق الشروط الابتدائية الكيفية.

$$(3) \qquad x^0 \in U, \quad z_k(x_1^0, \ldots, x_n^0) = z_k^0 \in V \quad (k = 1, \ldots, m),$$

لانه يجب ان ينتمي كل حل للمنوعة S . وهذا غير محقق عموما لان هناك نقاطا من المنوعة S لا تمر بها اي حل؛ ذلك ان هناك مجموعة من الشروط الاخرى، اضافة الى الشروط (2)، ينبغي اخذها بعين الاعتبار. لدراسة الامكانية المتواجدة حتى نتمكن من القيام بعدة اشتقاقات متوالية، نفرض الآن بان التوابع f_{hi} في (1) تقبل الاشتقاق لانهائيا. نرمز للعلاقات (2) بشكل مختصر.

$$E_{\alpha}^{(1)}(x, z)=0. \qquad (4)$$

ليكن $z=z(x)$ حلا للجملة (1)؛ كنا رأينا بأنه يحقق ايضا الجملة (4). نشتق كل معادلة من الجملة (4)، بعد ان نضع فيها $z=z(x)$، بالنسبة لكل متغير x_i ، ونعوض المشتقات $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$ الواردة بعباراتها في الجملة (1)؛ الحل $z(x)$؟ نرمز لهذه الجملة بما يلي:

$$E_{\alpha}^{(2)}(x, z)=0. \qquad (5)$$

بتطبيق نفس الطريقة على الجملة (5)، نستنتج ايضا جملة معادلات:

$$E_{\alpha}^{(3)}(x, z)=0\ ; \qquad (6)$$

نستطيع مواصلة هذه العملية بصفة لانهائية، ونتيجة ذلك ستكون الحصول على متتالية جمل معادلات.

$$E_{\alpha}^{(s)}(x, z)=0, \quad s=1, 2, \ldots; \qquad (7)$$

إن الحل $z(x)$ يحقق بالضرورة كل من هذه الجملة.

نعتبر الآن المنوعة W المؤلفة من كل النقاط $\{x, z\}$ المحققة لكل الجمل (7). قد تكون هذه المنوعة خالية او منحلة بمعنى انها لا تحوي اي «سطح» من النمط $z=z(x)$ معرف، على الاقل، على ساحة جزئية من

الساحة U . لا يوجد، في مثل هذه الحالات، اي حل للجملة (1). لذا يجب الآ نعتبر سوى الحالة التي تكون فيها المنوعة W غير منحلة، اي الحالة التي تحوي فيها W بعض «السطوح». نلاحظ ان الحلول المحتملة للجملة (1) تقع من بين هذه السطوح. لمناقشة وجود مث لهذه «السطوح» يمكن اعتبار المصفوفة اليعقوبية:

$$J = \left\| \frac{\partial E_\alpha^{(s)}(x, z)}{\partial z_k} \right\| \quad (s = 1, 2, \ldots;\ \alpha = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

المؤلفة من m عمودا وعددا غير منته من السطور. إن مرتبة هذه المصفوفة لا تتجاوز m، مهما كانت النقطة $(x, z) \in W$ ؛ لنبحث عن نقطة $\{a, b\} \in W$ حيث تبلغ مرتبة المصفوفة J قيمته القصوى، مثلا r، حيث $r \leqslant m$. نرى، بسبب الاستمرار، ان اي اصغري من الرتبة r غير منعدم عند النقطة $\{a, b\}$ يبقى غير منعدم في جوار لهذه النقطة. يتبين من نظرية المرتبة 47.1 ـ ب، من اجل كل مجموعة منتهية من معادلات الجملة (7)، انه يمكن اختيار جوار Q للنقطة $\{a, b\}$ يكون قيمة المحل الهندسي للنقاط المحققة لهذه الشروط، ممثلا بجملة معالات ذات الشكل.

$$z_j = \Phi_j(x, z_{r+1}, \ldots, z_m), \tag{9}$$

حيث $\Phi_j(a, b_{r+1}, \ldots, b_m) = b_j$ ، $j = 1, \ldots, r$ ،
والتوابع Φ_j في الاطراف الثانية قابلة للإشتقاق. إن التوابع Φ_j معرفة في جوار $Q^{(n+m-r)}$ للنقطة $(a, b_{r+1}, \ldots, b_m) \in R_{n+m-r}$
وتأخذ قيمها في جوار $Q^{(r)}$ للنقطة $(b_1, \ldots, b_r) \in R_r$، بحيث ان $Q = Q^{(r)} \times Q^{(n+m-r)}$. عندما يكون عدد المعادلات المختارة في الجملة (7) متزايدا، فإن الجوار قد يصغر، وعموما ليس هناك ما يضمن وجود جوار Q حيث تكون الجملة غير المنتهية (7) مكافئة للجملة (9).

نظرية (فيبلن وتوماس Veblen, Thomas). إذا قبلت النقطة

$\{a, b\} \in W$ جوارا Q من الشكل $Q^{(r)} \times Q^{(n+m-r)}$ حيث تكون الجملة غير المنتهية (7) مكافئة للجملة المنتهية (g)، فإن الجملة (1) تقبل حلا $z = z(x)$ يحقق $z(a) = b$.

البرهان. يتبين، فرضا، انه إذا اشتققنا، بالنسبة لـ x_i، معادلات الجملة (g) وعوضنا فيها المشتقات $\frac{\partial z_k}{\partial x_i}$ بعباراتها الواردة في الجملة (1)، فإننا نصل الى العلاقات.

$$f_{ji}(x, z) = \frac{\partial \Phi_j(x, z)}{\partial x_i} + \sum_{k=r+1}^{m} \frac{\partial \Phi_j(x, z)}{\partial z_k} f_{ki}(x, z) \tag{10}$$

$$(i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, r)$$

القائمة على كل المنوعة W (في الجوار Q).

نعتبر الجملة التالية المؤلفة من معدلات مجاهيلها هي التوابع $z_{r+1}(x), \ldots, z_m(x)$

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_i} = F_{ki}(x_1, \ldots, x_n, z_{r+1}, \ldots, z_m) \tag{11}$$

$$(i = 1, \ldots, n; \ k = r+1, \ldots, m),$$

حيث نحصل على التوابع F_{ki} انطلاقا من التوابع f_{ki} الواردة في الجملة (1) باستبدال المتغيرات $z_1, \ldots, z_r$ بعباراتها (g) المتعلقة بالمتغيرات $x, z_{r+1}, \ldots, z_m$. لتثبت ان الجملة (n) تحقق فرض نظرية فروبينيوسفي الجوار $Q^{(n+m-r)}$. لدينا، بالفعل، على $Q^{(n+m-r)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_{ki}}{\partial x_s} + \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial F_{ki}}{\partial z_l} F_{ls} &= \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x_s} + \\
&+ \sum_{l=r+1}^{m} \left[\sum_{p=1}^{r} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p} \frac{\partial \Phi_p}{\partial z_l} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_l} \right] F_{ls} = \\
&= \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p} \left[\frac{\partial \Phi_p}{\partial x_s} + \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial \Phi_p}{\partial z_l} F_{ls} \right] + \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_l} F_{ls} = \\
&= \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{r} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p} F_{ps} + \sum_{l=r+1}^{m} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_l} F_{ls} = \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_s} + \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p} F_{ps},
\end{aligned} \tag{12}$$

حيث حصلنا على المساواة القبل الاخيرة من (10). بطريقة مماثلة، لدينا

على $Q^{(n+m-r)}$:

$$\frac{\partial F_{ks}}{\partial x_i}+\sum_{l=r+1}^{m}\frac{\partial F_{ks}}{\partial z_l}F_{ls}=\frac{\partial f_{ks}}{\partial x_i}+\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial f_{ks}}{\partial z_p}F_{pi}. \quad (13)$$

إن العلاقات:

$$\frac{\partial f_{ki}}{\partial x_s}+\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial f_{ki}}{\partial z_p}f_{ps}=\frac{\partial f_{ks}}{\partial x_i}+\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial f_{ks}}{\partial z_p}f_{pi}$$

(حيث m ,. . . ,$k=1$)(n ,. . . ,$i, s=1$ قائمة على المجموعة W حسب الانشاء؛ ننقل الى هذه العلاقات العبارات (g) فنلاحظ أن الاطراف الثانية من (12) (13) متطابقة على $Q^{(n+m-r)}$ ، وهو المطلوب.

تقل الجملة (11)؛ بفضل 16.2 ـ ج، حلاً $\{z^0_{r+1}(x),\ldots,z^0_m(x)\}$ قد يكون معرفا في جوار اصغر $Q^{(n)}_1\subset Q^{(n)}$ ، ويحقق الشروط.

$$z^0_{r+1}(a)=b_{r+1},\ \ldots,\ z^0_n(a)=b_n.$$

إن جملة التوابع $z(x)=\{z_1(x),\ldots,z_m(x)\}$ ذات الشكل:

$$z_1(x)=\Phi_1(x,\ z^0_{r+1}(x),\ \ldots,\ z^0_m(x)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$z_r(x)=\Phi_r(x,\ z^0_{r+1}(x),\ \ldots,\ z^0_m(x)),$$
$$z_{r+1}(x)=z^0_{r+1}(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$z_m(x)=z^0_m(x)$$

تمثل حلا للجملة (1) مع الشرط $z(a)=b$. ذلك ان التوابع الواردة آنفا تحقق، انشاء، معادلات الجملة (1) حيث $r+1\leqslant k$. لدينا من اجل $r\geqslant k$، حسب (10):

$$\frac{\partial z_k(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}+\sum_{p=r+1}^{m}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z_p}\frac{\partial z^0_p}{\partial x_i}=$$
$$=\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}+\sum_{p=r+1}^{m}\frac{\partial\Phi_k}{\partial z_p}F_{pi}=F_{ki}=f_{ki}(x,\ z^0_1(x),\ \ldots,\ z^0_m(x)),$$

وهذه المعادلات محققة هي الاخرى. انتهى برهان النظرية.

§2 .7 . نظرية تايلور ومقلوبها

17 .2 ـ أ . نظرية تايلور . ليكن $y = f(x)\ (V \subset X \to Y)$ تابعامعرفا في كرة $V = \{x : |x - a| < r\}$ من فضاء X ويأخذ قيمه في فضاء Y] نفرض ان له مشتقات متوالية حتى الرتبة p . عندئذ ، يتحقق ، من اجل كل $|h| < r$ ، دستور تايلور :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + 1/2 f''(a)hh + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \underbrace{h \dots h}_{p \text{ fois}} + R_p, \tag{1}$$

حيث

$$|R_p| \leqslant \frac{|h|^p}{p!} \sup_{x \in V} \| f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a) \|. \tag{2}$$

البرهان . بتثبيت h ، $|h| < r$ ، نعتبر التابع التالي للمتغير الحقيقي t ، حيث $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$\varphi(t) = f(a + th).$$

يتبين من النظرية الخاصة بمشتق تابع مركب 43 .2 أن التابع $\varphi(t)$ يقبل مع $f(x)$ الاشتقاق حتى الرتبة p ، وان لدينا :

$$\varphi'(t) = f'(a+th)h, \qquad \varphi'(0) = f'(a)h,$$
$$\varphi''(t) = f''(a+th)hh, \qquad \varphi''(0) = f''(a)hh,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi^{(p)}(t) = f^{p}(a+th)\underbrace{h \dots h}_{p \text{ fois}}, \qquad \varphi^{(p)}(0) = f^{(p)}(a)\underbrace{h \dots h}_{p \text{ fois}}.$$

لدينا دستور تايلور التالي (ي 12 . 46 ـ ج) باعتبار التابع $\varphi(t)$:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \dots + \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}(0) + Q_p, \tag{3}$$

حيث Q_p هو الحد المتبقى الذي يمكن وضعه على الشكل التكاملي :

$$Q_p = \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p)}(\xi)\, d\xi,$$

كما نستطيع كتابة هذه العبارة على النحو :

$$Q_p = \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} [\varphi^{(p)}(\xi) - \varphi^{(p)}(0)]\, d\xi + \varphi^{(p)}(0) \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}\, d\xi =$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} [\varphi^{(p)}(\xi) - \varphi^{(p)}(0)]\, d\xi + \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(0).$$

ثم إن الكمية : $R_p = \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} [\varphi^{(p)}(\xi) - \varphi^{(p)}(0)] d\xi$

تقبل ، بدورها ، التقدير :

$$|R_p| \leqslant \sup_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} \| \varphi^{(p)}(\xi) - \varphi^{(p)}(0) \| \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{p-1}}{(p-1)!} d\xi =$$

$$= \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| [f^{(p)}(a+th) - f^{(p)}(a)] \underbrace{h \ldots h}_{p \text{ fois}} \| \cdot \frac{1}{p!} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in V} \| f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a) \| \cdot \frac{|h|^p}{p!} .$$

وبما ان $\varphi^{(p)}(0) = f^{(p)}(a) h \ldots h$ فإن العلاقة (1) قد اثبتت.

ب . نتيجة . اذا كان التابع $f^{(p)}(x)$ مستمرا عند $x = a$ ، فإنه يمكن من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق العلاقة $|R_p| \leqslant \varepsilon |h|^p$

وذلك بمجرد ان يكون $h \in X$. $h < \delta$ اي ان للكمية $|R_p|$ رتبة صفر اكبر من رتبة $|h|^p$.

بالفعل، بما ان التابع $f^{(p)}(x)$ مستمر عند النقطة $x = a$ و $\varepsilon > 0$ معطى، يكفي تعيين $\delta > 0$ بحيث يؤدي $|h| < \delta$ الى المتراجحة $\| f^{(p)}(x) - f^{(p)}(a) \| < \varepsilon p!$.

27.2 . مقلوب نظرية تايلور . يتبين دستور تايلور ان تزايد تابع قابل للإشتقاق p مرة في ساحة V يمكن ان يُقرّب محلياً بشكل من الدرجة p بالنسبة لشعاع الازاحة h. نطرح السؤال: هل القضية العكسية للقضية السابقة قائمة؟ بعبارة اوضح: إذا كان لنا تابع $f(x): V \to Y$ تزايده $f(x+h) - f(x)$ يقبل التقريب بواسطة شكل من الدرجة p بالنسبة لشعاع الازاحة p بمعنى ان: $f(x+h) = f(x) + a_1(x) h + a_2(x) hh +$

$$\ldots + a_p(x) \underbrace{h \ldots h}_{p \text{ fois}} + R_p,$$

حيث $R_p = o(|h|^p)$، فهل يمكن القول ان التابع $f(x)$ يقبل الاشتقاق p مرة (على الاقل)؟ (بطبيعة الحال فإن التوابع $a_1(x), \ldots, a_p(x)$ تمثل هنا مؤثرات خطية $a_1(x): V \to Y_1$ ، ... ،

$a_p(x): V \to Y_p$، كما ورد في 42.2).

ان الجواب على هذا السؤال بالنفي عموما (راجع التمرين 6). لكن إذا افترضنا ان التوابع $a_1(x), \ldots, a_p(x)$ مستمرة وان النسبة $R_p/\|h\|^p$ تؤول الى o بانتظام بالنسبة لِـ x فإن القضية المقدمة قائمة. سنورد البرهان بعد قليل (47.2).

37.2 . جداول ذات فروق

أ. لتكن $a_1, \ldots, a_p$ متتالية مؤلفة من p $(p \geqslant 2)$ عنصرا، علما ان هذه العناصر اعداد او اشعة من فضاء شعاعي. تشكل بواسطتها « جدول ذي فروق من الرتبة p »، اي جدولا مثلثياً:

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1,p-1} & a_{1p}, \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2,p-1}, & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2}, & & \\ a_{p1} & & & \end{array}$$

وذلك حسب القاعدة التالية:

$$\begin{array}{l} a_{11} = a_1, \; a_{21} = a_2, \; \ldots, \; a_{p1} = a_p, \\ a_{12} = a_{21} - a_{11}, \; a_{22} = a_{31} - a_{21}, \; \ldots, \; a_{p-1,2} = a_{p1} - a_{p-1,1}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{1p} = a_{2,p-1} - a_{1,p-1}, \end{array}$$

اي ان العمود الاول مشكل من العناصر $a_p \ldots a_1$, نفسها، ثم ابتداء من العمود الثاني فإن كل عنصر من الجدول يساوي فرق عنصرين من العمود السابق (عنصر السطر المعطى مطروحا من عنصر السطر الموالي).

يسمى العنصر a_{1p} **نتيجة جدول الفروق**. نرمز لهذا العنصر بِـ $Z = Z(a_1, \ldots, a_p)$ نبرز فيما يلي بعض خواص التابع $Z(a_1, \ldots, a_p)$.

ب. إن التابع $Z(a_1, \ldots, a_p)$ تابع خطي للمتتالية $a_1, \ldots, a_p$؟ اي ان لدينا العلاقة التالية من اجل كل $a_1, \ldots, a_p$ $b_1, \ldots, b_p$ ومن اجل كل

عددين a و β:

$$Z(\alpha a_1 + \beta b_1, \ldots, \alpha a_p + \beta b_p) = \\ = \alpha Z(a_1, \ldots, a_p) + \beta Z(b_1, \ldots, b_p).$$

بالفعل، لان كل عملية طرح تتمتع بهذه الخاصية، وعليه فالامر كذلك فيما يخص النتيجة.

ج. نفرض ان k يرمز لـ0 او لعدد طبيعي؛ عندئذ، لدينا من اجل $k < p - 1$:

$$Z(1^k, 2^k, \ldots, p^k) = 0.$$

نجري البرهان بالتدريج (على p). إن القيمة الوحيدة لـ k من اجل $p = 2$ هي 0، والحساب المباشر يبين ان

$$Z(1^0, 2^0) = 1 - 1 = 0.$$

نفرض ان هذه القضية محققة من اجل p=2، 3، ...، q−1؛ ولنثبت انها كذلك من اجل $p = q$. يتعلق الامر بالكمية $Z(1^k, 2^k, \ldots, q^k)$، $k < q - 1$ لننزل العمود الاول من جدول الفروق الموافق لذلك؛ نحصل، طبعا، على جدول آخر ذي فروق من الرتبة $q - 1$، معين بـ $q - 1$ عنصرا: $2^k - 1^k, \ldots, q^k - (q-1)^k$ ونتيجته هي نتيجة الجدول السابق. نلاحظ الآن، من اجل كل m =1، ...، q - 1:

$$(m+1)^k - m^k = km^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2} m^{k-2} + \ldots$$

إن كل اس في الطرف الايمن اصغر تماما من $q - 2 = (q-1) - 1$ ولان $k < q - 1$ ينتج من ذلك، حسب ب وحسب فرض التدريج ان:

$$Z(1^k, 2^k, \ldots, q^k) = Z(2^k - 1^k, \ldots, q^k - (q-1)^k) = \\ = kZ(1^{k-1}, 2^{k-1}, \ldots, (q-1)^{k-1}) = 0;$$

انتهى البرهان على القضية ج.

د ـ لدينا المساواة التالية: $Z(1^{p-1}, 2^{p-1}, \ldots, p^{p-1}) = (p-1)!$

بالفعل، نشكل الفروق الاولى ونطبق، كما ورد اعلاه، العلاقة:

$$(m+1)^{p-1}-m^{p-1}=(p-1)\,m^{p-2}+\frac{(p-1)(p-2)}{1\cdot 2}\,m^{p-3}+\ldots,$$
$$m=1,\ldots,p-1.$$

حيث m=1,...,p-1 .

إن نتيجة جدول الفروق من الرتبة p_1 المشكل من حدود الطرف الثاني ابتداء من الحد الثاني، منعدمة حسب ج. يمكننا إذن، بدون المساس بالنتيجة، استبدال العمود الثاني من الجدول الابتدائي بالحدود $(p-1)\,m^{p-2}$. كما انه يمكننا الاكتفاء بالحدود $(p-1)(p-2)\,m^{p-3}$; في العمود الثالث؛ عندما نصل الى العمود ذي الرتبة p نحصل على $(p-1)!$ ، وهو المطلوب.

47. 2 . نتناول الآن مقلوب نظرية تايلور.

نظرية. نفرض، من اجل كل $x\in V$ ومن اجل كل العناصر h المقبولة، ان لدينا العلاقة:

$$f(x+h)-f(x)=$$
$$=a_1(x)\,h+a_2(x)\,hh+\ldots+a_p(x)\underbrace{h\ldots h}_{p\text{ fois}}+R_p(x,h), \tag{1}$$

حيث $a_1(x),\ldots,a_p(x)$ توابع محدودة ومستمرة في V، وحيث يتمتع الباقي $R_p(x,h)$ بالخاصية التالية: من اجل كل $0<\varepsilon$، يوجد $0<\delta$ بحيث يكون لدينا من اجل $x\in V$ و $|h|<\delta$.

$$|R_p(x,h)|<\varepsilon\,|h|^p. \tag{2}$$

عندئذ يكون التابع $f(x)$ قابلا للإشتقاق p مرة في الساحة V ولدينا:
$a_k(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)$ (حيث k=1,...,p) .

البرهان. بما أن العبارة (1) تقبل جزءا خطيا رئيسيا $a_1(x)\,h$ فإن التابع $f(x)$ يقبل الاشتقاق مرة على الاقل ولدينا $f'(x)=a_1(x)$. نفرض انه يقبل الاشتقاق m مرة $(m<p)$ وان العلاقات: $a_1(x)=f'(x),\ldots,a_m(x)=\frac{1}{m!}f^{(m)}(x)$ قائمة؛لنفرض انه يقبل الاشتقاق

$(m+1)$ مرة وان $a_{m+1} = \frac{f^{(m+1)}(x)}{(m+1)!}$. يمكن وضع (1) على الشكل :

$$(3)\quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)hh + \dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)\underbrace{h\dots h}_{m \text{ fois}} + a_{m+1}(x)\underbrace{h\dots h}_{m+1 \text{ fois}} + R_{m+1}(x, h).$$

وهذا مع العلم اننا نستطيع من اجل كل $0 < \varepsilon$ ايجاد $0 < \delta$ بحيث :

$$(4)\quad |R_{m+1}(x, h)| < \varepsilon |h|^{m+1}$$

وذلك عندما يكون $x \in V$ و $|h| < \delta$ تقوم هذه النتيجة بفضل (2) ولأن التوابع $a_{m+2}(x), \dots, a_p(x)$ محدودة. لدينا الى جانب العلاقات

$$(5)\quad \begin{aligned} f(x+h+k) - f(x+h) &= f'(x+h)k + \frac{1}{2}f''(x+h)kk + \\ &\dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x+h)\underbrace{k\dots k}_{m \text{ fois}} + \\ &a_{m+1}(x+h)\underbrace{k\dots k}_{m+1 \text{ fois}} + R_{m+1}(x+h, k), \end{aligned}$$

حيث لدينا ، من اجل $|k| < \delta$:

$$(6)\quad |R_{m+1}(x+h, k)| < \varepsilon |k|^{m+1},$$

و :

$$\begin{aligned} f(x+h+k) - f(x) &= f'(x)(h+k) + \frac{1}{2}f''(x)(h+k)(h+k) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{m!}f^{(m)}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m \text{ fois}} + \end{aligned}$$

m مرة

$$(7)\quad + a_{m+1}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m+1 \text{ fois}} + R_{m+1}(x, h+k),$$

(m+1) مرة

حيث لدينا من اجل $|h+k| < \delta$:

$$(8)\quad |R_{m+1}(x, h+k)| < \varepsilon |h+k|^{m+1}.$$

بجمع العلاقتين (3) و(5) وطرح (7) نجد :

$$0 = f'(x+h)k - f'(x)k + \frac{1}{2} f''(x+h)kk -$$
$$- \frac{1}{2}[f''(x)(h+k)(h+k) - f''(x)hh] + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x+h)\underbrace{k \dots k}_{m \text{ fois}} -$$
$$- \frac{1}{m!}[f^{(m)}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m \text{ fois}} - f^{(m)}(x)\underbrace{h \dots h}_{m \text{ fois}}] +$$
$$+ a_{m+1}(x+h)\underbrace{k \dots k}_{m+1 \text{ fois}} - [a_{m+1}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m+1 \text{ fois}} -$$
$$(9) \quad - a_{m+1}(x)\underbrace{h \dots h}_{m+1 \text{ fois}}] + R'_{m+1}(x, h, k),$$

حيث لدينا من اجل $\delta > |h|$ ، $\delta > |k|$ ، $|h+k| < \delta$:

$$(10) \quad |R'_{m+1}(x, h, k)| \leqslant \varepsilon(|k|^{m+1} + |h|^{m+1} + |k+h|^{m+1}).$$

بما ان التابع $a_{m+1}(x)$ مستمر فرضا يمكن اختيار عدد $\delta_1 \leqslant \delta$ بحيث يكون لدنيا من اجل $|h| \leqslant \delta_1$: $|a_{m+1}(x+h) - a_{m+1}(x)| \leqslant \varepsilon$

وبالتالي نستطيع كتابة مكان (9) :

$$0 = f'(x+h)k - f'(x)k + \frac{1}{2} f''(x+h)kk -$$
$$- \frac{1}{2}[f''(x)(h+k)(h+k) - f''(x)hh] + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x+h)\underbrace{k \dots k}_{m \text{ fois}} -$$
$$(11) \quad - \frac{1}{m!}[f^{(m)}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m \text{ fois}} - f^{(m)}(x)\underbrace{h \dots h}_{m \text{ fois}}] +$$
$$+ a_{m+1}(x)\underbrace{k \dots k}_{m+1 \text{ fois}} - a_{m+1}(x)\underbrace{(h+k)\dots(h+k)}_{m+1 \text{ fois}} +$$
$$+ a_{m+1}(x)\underbrace{h \dots h}_{m+1 \text{ fois}} + R''(x, h, k),$$

حيث

$$(12) \quad |R''(x, h, k)| \leqslant |R'_{m+1}(x, h, k)| + \varepsilon|k|^{m+1}.$$

وذلك باعتبار نفس الشروط الخاضعة لها x ، h ، k .

بتعويض k بـ $2k$ ، $3k$ ، ... ، $(m+1)k$ نحصل الى جانب (11) على جملة

علاقة $m+1$:

$$f'(x+h)\,2k - f'(x)\,2k + \frac{1}{2} f''(x+h)\,2k\,2k -$$
$$-\frac{1}{2}\left[f''(x)(h+2k)(h+2k) - f''(x)\,hh\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x+h)\,2k \ldots 2k -$$
$$-\frac{1}{m!}\left[f^{(m)}(x)(h+2k)\ldots(h+2k) - f^{(m)}(x)\underbrace{h\ldots h}_{m \text{ fois}}\right] +$$
$$+ a_{m+1}(x)\,2k\ldots 2k - a_{m+1}(x)(h+2k)\ldots(h+2k) +$$
$$+ a_{m+1}(x)\underbrace{h\ldots h}_{m+1 \text{ fois}} + R''(x, h, 2k) = 0,$$

. . . .

$$f'(x+h)(m+1)k - f'(x)(m+1)k + \frac{1}{2} f''(x+h)(m+1)k(m+1)k -$$
$$-\frac{1}{2}\left[f''(x)(h+(m+1)k)(h+(m+1)k) - f''(x)\,hh\right] + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x+h)\underbrace{(m+1)k\ldots(m+1)k}_{m \text{ fois}} -$$
$$-\frac{1}{m!}\left[f^{(m)}(x)\underbrace{(h+(m+1)k)\ldots(h+(m+1)k)}_{m \text{ fois}} -\right.$$
$$\left.-f^{(m)}(x)\underbrace{h\ldots h}_{m \text{ fois}}\right] +$$
$$+ a_{m+1}(x)\underbrace{(m+1)k\ldots(m+1)k}_{m+1 \text{ fois}} -$$
$$- a_{m+1}(x)\underbrace{(h+(m+1)k)\ldots(h+(m+1)k)}_{m+1 \text{ fois}} +$$
$$+ a_{m+1}(x)\underbrace{h\ldots h}_{m+1 \text{ fois}} + R''(x, h, (m+1)k) = 0.$$

نحوّل هذه الجملة. نطرح من كل مساواة، ابتداء من الثانية، المساواة السابقة؟ نحصل عندئذ على جملة تضم m مساواة. ثم إن الجملة الثالثة المنشأة بطريقة مماثلة تحوي (m-1) مساواة؟ اخيرا فإن آخر جملة، والتي رقمها (m+1)، تضم مساواة واحدة نريد ايجادها صراحة.

من البديهي إنه من اجل كل حد من هذه العلاقات يمكن انشاء النتيجة بشكل مستقل كنتيجة لجدول الفروق الموافق له ذي الرتبة (m+1). تشكل الحدود الاولى العمود (الذي نرمز له في شكل سطر):

$$\{1 \cdot f'(x+h)\,k,\ 2f'(x+h)\,k,\ \ldots,\ (m+1)\,f'(x+h)\,k\},$$

نلاحظ ان نتيجة جدول الفروق الموافق له منعدم حسب 37.2 ـ ب وجـ.

إن الوضعية هي نفسها من اجل كل الحدود باستثناء الحدود الاخيرة. بصفة خاصة، ينبغي النظر في الاعمدة (التي نرمز لها هنا في شكل سطور):

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(x+h) \underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}} \{1^m, 2^m, \ldots, (m+1)^m\},$$

(13)

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(x) \{\underbrace{(h+k) \ldots (h+k)}_{m \text{ fois}}, \underbrace{(h+2k) \ldots (h+2k)}_{m \text{ fois}}, \ldots$$
$$\ldots, \underbrace{(h+(m+1)k) \ldots (h+(m+1)k)}_{m \text{ fois}}\},$$

(14)

$$a_{m+1}(x) \{\underbrace{k \ldots k}_{m+1 \text{ fois}} - \underbrace{(h+k) \ldots (h+k)}_{m+1 \text{ fois}},$$
$$2^m \underbrace{k \ldots k}_{m+1 \text{ fois}} - \underbrace{(h+2k) \ldots (h+2k)}_{m+1 \text{ fois}}, \ldots, (m+1)^m \underbrace{k \ldots k}_{m+1 \text{ fois}} -$$

(15)
$$- \underbrace{(h+(m+1)k) \ldots (h+(m+1)k)}_{m+1 \text{ fois}}\}.$$

باستخدام 37.2 ـ د حيث نضع p=m+1، نجد ان نتيجة جدول الفروق للعمود (13) يساوي: $f^{(m)}(x+h) \underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}}$.

بازالة الاقواس في العمود (14) واستخدام تعدد خطية الشكل: $f^{(m)}(x)\, h \ldots h$ نرى انه من حقنا الّا نحتفظ سوى بالحدود

$$\frac{1}{m!} f^{(m)}(x)\, k \ldots k \{1^m, 2^m, \ldots (m+1)^m\}$$

(اما الحدود الاخرى فانها تُزال بفضل 37.2 ـ جـ)؛ يتبين من 37.2 ـ د ان النتيجة تكون: $f^{(m)}(x) \underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}}$.

نلاحظ في الفروق التي تشكل العمود (15) ان الحدود المسيطرة ذات الدرجة (m+1) بالنسبة لِـ k تختصر. نستطيع عدم اخذ الحدود التي لها درجة $\leqslant m-1$ بعين الاعتبار، كما ان نفس الملاحظة قائمة فيما يخص العمود (14). هكذا وبدون المساس بنتيجة جدول الفروق الموافق لذلك، يمكننا تعويض العمود (15) بالعمود التالي:

$$-a_{m+1}(x) \{(m+1)h\underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}},$$
$$2^m (m+1) h\underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}}, \ldots (m+1)(m+1)^m h\underbrace{k \ldots k}_{m \text{ fois}}\},$$

الذي نتيجته:

$$-a_{m+1}(x)(m+1)!\,h\underbrace{k\ldots k}_{m \text{ fois}}.$$

نصل في الاخير الى العلاقة التالية:

$$[f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)]\underbrace{k\ldots k}_{m \text{ fois}}=(m+1)!\,a_{m+1}(x)\,h\underbrace{k\ldots k}_{m \text{ fois}}+R \quad (16)$$

حيث: $|R|\leqslant C_m\cdot 2\varepsilon(|k|^{m+1}+|h|^{m+1}+|k+h|^{m+1})$

وهذا من اجل $|k|\leqslant\frac{\delta}{2(m+1)}$ ، $|h|\leqslant\frac{\delta}{2(m+1)}$ نثبت هنا h. عندئذ، لدينا من اجل كل العناصر k التي لها نظيم يساوي نظيم h:

$$|R|\leqslant C'_m\varepsilon|h|^{m+1}; \quad (17)$$

الّا ان ذلك يعني بأن الـm ـ شكل بالنسبة لـ k

$$\{[f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)]-(m+1)!\,a_{m+1}(x)\,h\}\underbrace{k\ldots k}_{m \text{ fois}}$$

لا يتجاوزر (بالنظيم) العدد $C'_m\varepsilon|h|^{m+1}$ على سطح الكرة ذات نصف القطر $|h|$. وبالتالي، فإن نفس الشكل لا يتجاور (بالتنظيم) العدد $C'_m\varepsilon|h|$، على سطح الكرة ذات نصف القطر 1. نحصل على المتراجحة الموالية بفضل 2 .42 ـ ج.

$$\|f^{(m)}(x+h)-f^{(m)}(x)-(m+1)!\,a_{m+1}(x)\,h\|\leqslant C''_m\varepsilon|h|$$

وهي متعلقة بالمؤثر الموافق للشكل المذكور. بما ان الثابت C''_m لا يتعلق بـh فإنه ينتج بان التابع $f^{(m)}$ يقبل الاشتقاق وبان العلاقة

$$f^{(m+1)}(x)=(m+1)!\,a_{m+1}(x),$$

وهو المطلوب. نختتم برهان النظرية بوضع m=1، ...، p-1.

تمارين

1 . اثبت انه إذا كان واحد على الاقل من معينات سيلفستر ذات الرتب الزوجية (41.2 ـ س) سالبا ، فإن الشكل التربيعي الموافق له غير معرف (اشارته متغيرة) وذلك بصفة مستقلة عن قيم واشارات المعينات الاخرى.

2 . اكتب المشتق الثاني للتابع x^{-1} (53.2).

3 . اكتب المشتق الثاني للتابع $y = f(x)$ العكس لتابع يقبل الاشتقاق مرتين $x = \varphi(y)$ (63.2 ـ ب).

نفرض ان تابعا $f(x): G \to R_1$ مع القيد $\Phi(x) = c \in Z$ ، يقبل قيمة عظمى مقيدة عند نقطة $a \in G \subset X$ (72.1 ـ أ). نفرض ايضا ان تابعا $\psi(x): G \to Z$ يتمتع بالعلاقتين $\psi(a) = \varphi(a)$, و $\psi'(a) = \varphi'(a)$ وان المؤثر $f'(a): X \to X$ قابل للقلب.

اثبت ان النقطة a نقطة مستقرة (بمفهوم القيمة القصوى المقيدة) ايضا للتابع $f(x)$. باعتبار القيد $\psi(x) = C$. لكن طابعها قد يتغير (قيمة عظمى ، صغرى ، انعدام قيمة قصوى).

5 . اثبت انه حتى تكون سطوح جماعة ثنائية الوسيط من الخطوط اللولبية في R_3 (φ هو المتغير، α و r هما الوسيطان):

$$x = r\cos(\varphi - \alpha), \quad y = r\sin(\varphi - \alpha), \quad z = A(r)\,\varphi$$

سطوحا متعامدة يلزم ويكفي أن يكون $A(r) = Cr^2$.

6 . ليكون التابع $f(x) = x^3 \sin\frac{1}{x}$ ، لدينا النشر :

$$f(x+h) = f(x) + a_1(x)\,h + a_2(x)\,\frac{h^2}{2} + o(h^2) \qquad (1)$$

من اجل $x \neq 0$, $|h| < |x|$، ولدينا من اجل $x = 0$:

$$h^3 \sin\frac{1}{h} = 0 + 0\cdot h + 0\cdot\frac{h^2}{2} + o(h^2),$$

بحيث ان المساواة (1) قائمة ايضا من اجل $x = 0$ عندما نضع

$f(0)=0$ ، $a_1(0)=a_2(0)=0$. لكن $f(x)$ لا يقبل مشتقا ثانيا عند $x=0$. فسر التناقض الظاهري بين هذه النتيجة والنظرية 2 .47 .

7 . قدم نص وبرهان شرط قابلية المعادلة الموالية للحل :

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\Phi(x,y),$$

حيث $X=X_1+X_2$ تفكيك للفضاء X الى مجموع مباشر .

8 . ليكن $y=y(x)$ تطبيقا من فضاء هيلبرتي H في نفسه، قابلا لمشتق أول وثان. نعلم ان $y'(x)=cT(x)$ حيث c ثابت و $T(x)$ مؤثر متعامد. اثبت ان $T(x)$ لا يتعلق بـ x وان التطبيق $y(x)$ يتكون من ازاحة وتمديد ودوران.

9 . ليكن $y(x): H\to H$ تطبيقا قابلا لمشتق أول وثان. نعلم ان $y'(x)=\frac{c}{|x-x_0|^2}T(x)$ حيث x_0 شعاع ثابت $T(x)$ مؤثر متعامد. اثبت ان $y(x)$ يتكون من تعاكس

$$z(x)=\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2},$$

وازاحة وتمدد ودوران.

10 . نقول عن تطبيق $y(x): H\to H$ انه امتثالي إذا كان $y'(x)=c(x)\,T(x)$ حيث $c(x)$ تابع عددي و مؤثر متعامد. اثبت العلاقة $(y''hk,\ y'l)=0.$ وذلك باعتبار ان $y(x)$ امتثالي وقابل للإشتقاق مرتين وان h ، k ، l ثلاثة اشعة كيفية متعامدة مثنى مثنى.

11 . (تتمة.) اثبت ضمن فرض التمرين السابق ان $y''hk=\mu y'h+\nu y'k$ واوجد المعاملين μ و ν.

12 . (تتمة.) ليكن $y(x)$ تطبقا امتثاليا قابلا للإشتقاق ثلاث مرات و $\rho(x)=\frac{1}{c(x)}$ ، اثبت أن $\rho''(x)\,hk=0,$ وذلك من اجل كل شعاعين متعامدين h و k.

13 . (تتمة.) اثبت ان $\rho''hk=\sigma(h,k),$ حيث =ثابتا.

14 . (تتمة.) اثبت ان $\rho(x) = \alpha \mid x - x_0 \mid^2 + \beta,$ حيث α و β ثابتان.

15 . (تتمة.) اثبت ان النقطتين x و $y(x)$ ($y(x)$ تطبيق امتثالي) تحققان العلاقة

$$(\alpha \mid x - x_0 \mid^2 + \beta)(\gamma \mid y - y_0 \mid^2 + \delta) = 1,$$

حيث x_0 و y_0 نقطتان ثابتتان وδ، وγ، ثابتان.

16 . (تتمة.) نعتبر المعادلة

$$\mid dy \mid = c(x) \mid dx \mid$$

على نصف مستقيم ينطلق من النقطة x_0 . اثبت، بالمكاملة، ان لدينا $\alpha = 0$ أو $\beta = 0.$ في عبارة التابع $\rho(x,$ (الوارد في التمرين 14)

ملاحظة. تبين هذه النتيجة عند استكمالها بنتائج التمرينين 8 et 9 ان كل تطبيق امتثالي من فضاء هيلبرتي في نفسه يردّ الى تركيب ازاحة وتمدد ودوران وتعاكس (نيفانلينا Nevanlinna).

17 . إن الجملة

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = z, \qquad \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = z^2$$

متلائمة وتقبل الحل البديهي $z(x, y) = 0.$. رغم ذلك فإن شرط التلاؤم 16. 2 (4) غير متوفر. كيف تفسر هذا التناقض الظاهري مع النظرية 16. 2 ـ أ؟

18 . اثبت انه، من اجل ان يكون لجملة معادلات

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1(z), \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = f_n(z)$$

ذات تابع مجهول $z(x).$ حلا $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ مهما كانت الشروط الابتدائية $z_0 = z(x_0),$ يلزم ويكفي الاّ تختلف التوابع $f_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n))$ الواحدة عن الاخرى الّا بعوامل عددية.

نبذة تاريخية

كان مبتكرا التحليل اللامتناهي نيوتن وليبنيتز قد طبقا التفاضليات من الرتب العالية (الثانية) لإستنتاج وحل معادلات تفاضلية عادية. قام اولر (1730) بدراسة عامة للتفاضليات من الرتب العالية، وانهى كوسى تلك الدراسة، بعد قرن من ذل: تاريخ، باستخدام نظرية النهايات. اصبح تعميم نظرية التوابع الى الفضاءات النظيمية امرا ممكنا بمجرد ان قدم فريشى (Frechet) (1911) تعريفه للتفاضلية. يمكن ان نجد مقلوب دستور تايلور، مثلا، في كتاب ل. أ: ليوستر نيك و ف. إ. سوبولاف «عناصر التحليل التابعي» (موسكو 1965، بالروسية) إن النظرية القديمة لفروبينيوس (الخاصة بالتوابع $y(k):Rn \to Rm$) التي حققت آنذاك (1876) مرحلة هامة في تطور النظرية العامة لجمل المعادلات الخطية ذات المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى، قد عُممت من طرف م. كارنار (Kerner) (1933) لتشمل التوابع في الفضاءات النظيمية، ومن طرف م. ديودوني (Dievdonné) (1960، الحالة العامة) لتشمل المعادلة. نشرت نظرية فابلن وتوماس سنة 1926.

الفصل 3

المكاملة في الفضاءات المتعددة الابعاد

تعد مكاملة التوابع لمتغير متعدد الابعاد وسيلة من أقوى وسائل الرياضيات. تعتبر النظريات المجردة الحديثة للمكاملة توابع معرفة على مجموعة كيفية ليست مزودة سوى بقياس جمعي. نقتصر هنا، ونحن نضع نصب أعيننا التطبيقات التحليلية المحضة، على اعتبار مجموعات بسيطة نسبياً (« الفضاءات المشحونة، أو المثقلة، ») وهو الأمر الذي يسمح بإنشاء نظرية مكاملة مماثلة لتكامل ريمان الوحيد البعد، وذلك دون المساس بخاصية الجمعية للقياس. يؤدي تطبيق مثل هذه النظرية على الفضاء الاقليدي ذي البعد الى النظرية المعروفة (الكلاسيكية) للتكاملات المضاعفة (§3 .5) وتكاملات السطوح (§3 .6)، التي نعتبر، بعدها التكاملات الموسعة (§3 .7).

حتى لا نثقل العرض فإننا ندرس التوابع ذات القيم الحقيقية؛ مع العلم ان النتائج الواردة تبقى قائمة من اجل التوابع التي تأخذ قيمها في فضاء شعاعي نظيمي، اما الاستثناءات النادرة فهي من النوع (3 .41(7)):

$$mX \inf_X f(x) \leqslant \int_X f(x)\, dx \leqslant mX \sup_X f(x).$$

التي لها مثيل في حالة التوابع ذات القيم المنتمية لفضاء شعاعي نظيمي (3 .41(8)).

§3 .1 . تكامل ريمان على فضاء مشحون

3 .11 . قبل تناول إنشاء التكامل الخاص بالتوابع ذات المتغير المتعدد الأبعاد نذكّر بتعريف تكامل تابع $f(x)$ لمتغير x يتجول في مجال $a \leqslant x \leqslant b$ (ي 9 .31).

نرمز بـ لتجزئةللمجال $a \leqslant x \leqslant b$:

$$\Pi = \{a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \ldots \leqslant x_n = b\}.$$

نضع $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ وΔx_i $d(\Pi) = \max \Delta x_i$ نختار في المجال $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ نقطة كيفية ξ_i ونشكل المجموع التكاملي:

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

يسمى عدد If **تكامل ريمان التابع $f(x)$ على المجال [a,b]**، إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد عدد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|If - S_\Pi(f)| < \varepsilon$$

مهما كانت التجزئة Π حيث $d(\Pi) < \delta$.

يمكن تقديم تعريف مكافىء للسابق بدلالة المتتاليات. نعتبر متتالية تجزئات Π_1، $\Pi_2, \ldots$ للمجال [a,b] بحيث $d(\Pi_k) \to 0$ نسمي ذلك **تقسيما غير منته لتجزئة**. عندما تؤول الاعداد S_{Π_k}، مهما كانت المتتالية $\{\Pi_k\}$ من النوع، الى نهاية مشتركة لا تتعلق باختيار المتتالية Π_k ولا بالنقاط المعملة ξ_i، فإننا نقول عن هذه النهاية انها تكامل التابع $f(x)$ على المجال [a,b]:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} S_{\Pi_k}(f).$$

نشير أخيراً الى تعريف آخر مكافىء للسابق، يكتب بدلالة النهاية وفق اتجاه (ي 21.4). لتكن E مجموعة التجزئات Π ذات نقطا معلمة؛ نرمز، من اجل عدد $\delta > 0$ معطي، بـ E_δ للمجموعة الجزئية المؤلفة من التجزئات $\Pi \in E$ التي تحقق $d(\Pi) < \delta$. تعين المجموعات الجزئية E_δ، عند تغير δ، اتجاها على E نرمز له بـ $d(\Pi) \to 0$. **إن تكامل التابع $f(x)$ هو النهاية If لمجاميعه التكاملية وفق هذا الاتجاه**؛ نلاحظ ان هذه النهاية تكون موجودة في نفس الوقت، مع التكامل If والتكامل $\int_a^b f(x)$، ثم إن لكل هذه التكاملات نفس القيمة عند وجودها.

على سبيل المثال فقد أثبت ان تكامل تابع مستمر $f(x)$ موجود.

21.3 . ننتقل الى التعريف العام لتكامل ريمان. نعتبر مكان

المجال$a \leqslant x \leqslant b$ مجموعة كيفية X كما ندخل مكان مجموعة اجزاء من المجال [a,b] جملة $\mathfrak{A}(X) = \mathfrak{A}$ مؤلفة من مجموعات الجزئية لِـ X تتمتع بالشروط التالية:

أ . المجموعة X نفسها والمجموعة الخالية تنتميان الى الجملة $\mathfrak{A}$.

ب. إذا انتمى A_1 و A_2 للجملة $\mathfrak{A}$ فان تقاطعهما ينتمي الى $\mathfrak{A}$.

ج . إذا كان $A_1 \in \mathfrak{A}, A \in \mathfrak{A}, A_1 \subset A,$ فانه توجد في $\mathfrak{A}$ مجموعات $A_2, \ldots, A_p$ بحيث $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p$ وبحيث تكون $A_1, \ldots A_p$ مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى.

تسمى جملة $\mathfrak{A}$ (من المجموعات الجزئية من X) تحقق الشروط أ، ب، ج **نصف حلقة**. وهكذا فان الجملة المؤلفة من كل المجالات المحتواة في مجال [a,b] تمثل نصف حلقة مجموعات.

نفرض فيما يلي أن X فضاء متري وان نصف الحلقة $\mathfrak{A}(X)$ يَتمتع أيضا بالشرط الموالي:

د . من اجل كل $\delta > 0,$ توجد تجزئة للمجموعة X مؤلفة من عدد منته من المجموعات $A_1, \ldots, A_p$ المنتمية لِـ $\mathfrak{A}(X)$، علما ان هذه المجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى واقطارها لا تتجاوز δ .

عندما يكون الشرط د محققا يصبح الفضاء المتري X شبه متراص (ي 3. 39) لأنه يقبل، من اجل كل $\delta > 0,$ δ - شبكه منتهية.

نقدم اخيرا الشرط الاخير المفروض على نصف الحقلة $\mathfrak{A}$:

ر. من اجل كل مجموعة $A \in \mathfrak{A}$ ، نعرّف عددا غير سالب mA بحيث اذا تعاطينا تجزئة: $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p,$

حيث $A_1, \ldots, A_p$ غير متقاطعة مثنى مثنى ومنتمية لِـ $\mathfrak{A}$، يكون:

$$mA = mA_1 + \ldots + mA_p$$

(شرط الجمعية أو قابلية الجمع)

يسمى العدد mA قياس المجموعة A. تسمى المجموعات $A \in \mathfrak{A}$، عند تحقق الشروط أ ـ د، خلايا، ويدعى الفضاء المتري X **فضاء مشحونا** ويسمى نصف الحلقة $\mathfrak{A}$ مع قياس الخلايا mA **شحنة الفضاء** X .

31. 3 . تعريف التكامل. ليكن $f(x)$ تابعا معرفا على فضاء مشحون X . نرمز بِـ Π لتجزئة للمجموعة X الى p خلية $A_1, \ldots, A_p$ غير متقاطعة مثنى مثنى. من اجل كل خلية من هذه الخلايا A_i نرمز بِـ $d(A_i)$ لقطرها أي الحد الاعلى للمسافات بين نقاط الخلية، وبِـ $d(\Pi)$ للقيمة العظمى لأقطار الخلايا A_i .

نختار في كل خلية A_i نقطة كيفية ξ_i ونشكل المجموع التكاملي

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\, mA_i. \tag{1}$$

يسمى العدد:

$$I_{\mathfrak{A}} f = \int_{X,\, \mathfrak{A}} f(x)\, dx \tag{2}$$

تكامل التابع $f(x)$ **على الفضاء** X **مع الشحنة** $\mathfrak{A}$، إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$ ، إيجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|I_{\mathfrak{A}} f - S_\Pi(f)| < \varepsilon$$

وذلك مهما كانت التجزئة Π مع $d(\Pi) < \delta$.

نرى إذن ان هذا التعريف يماثل تماما التعريف الاول لتكامل تابع $f(x)$ على مجال مغلق.

عند مواصلة هذا الاستدلال بشكل مماثل نستطيع صياغة التعريف الثاني بدلالة المتتاليات لنعتبر متتالية كيفية $\ldots \Pi_k, \ldots, \Pi_1$ من تجزئات

للفضاء X تحقق $d(\Pi_k) \to 0$ نسمي هذه المتتالية **تقسيما لا منتهيا للتجزئة.** إذا آلت الاعداد $S_{\Pi_k}(f)$ ، من اجل كل متتالية $\{\Pi_k\}$ من هذا النوع، الى نهاية مشتركة غير متعلقة باختيار المتتالية $\{\Pi_k\}$ والنقاط ξ_i، فإن هذه النهاية تسمى تكامل التابع f **على الفضاء المشحون** X.

ننتقل اخيرا الى التعريف الذي يكتب بدلالة النهاية وفق اتجاه. لتكن E مجموعة كل التجزئات (ذات النقاط المعملة) للفضاء X ، نرمز من اجل $\delta > 0$ ، بـ E_δ لمجموعة التجزئات التي يكون من اجلها $d(\Pi) < \delta$. من اجل عددين δ مختلفين فان الفضاءين E_δ الموافقين لهما يحتوي واحد منهما الآخر؛ ثم إن تقاطع كل المجموعات E_δ خال؛ وبالتالي فإن تقاطع المجموعات E_δ تعيّن اتجاها على E؛ نرمز له بطبيعة الحال، بـ $d(\Pi) \to 0$. تكامل التابع $f(x)$ هو، تعريفا، نهاية المجاميع التكاملية وفق الاتجاه $d(\Pi) \to 0$.

ينتج تكافؤ التعاريف الثلاثة الواردة اعلاه من الخاصيات الاساسية للنهاية وفق اتجاه (راجع ي17.4).

نقول عن كل تابع $f(x)$ يقبل تكاملا على الفضاء X بشحنة $\mathfrak{A}$ انه **يقبل المكاملة على X بالشحنة** $\mathfrak{A}$ أو باختصار، **قابل للمكاملة**، إن كان الفضاء X والشحنة $\mathfrak{A}$ مثبتين، نتناسى في الحالة الاخيرة الرمز $\mathfrak{A}$ في الاشارة الى التكامل.

41.3 . نشير هنا الى بعض الخاصيات الاساسية للتكامل عند افتراض وجوده وذلك دون الاعتماد على خاصيات التوابع الواقعة تحت رمز التكامل. سوف لن نقدم براهين على هذه الخاصيات، لأنها تتبع نفس الخطوات المقدمة في ي51.9 حيث اعتبرنا التكاملات على مجال مغلق: المرور الى النهاية في المجاميع التكاملية.

أ . ان كل تابع $f(x) \equiv C$ (= ثابتا) يقبل المكاملة على فضاء مشحون

X ، ولدينا :

$$\int_X f(x)\,dx = CmX. \qquad (1)$$

ب. إذا كان تابع $f(x)$ قابلا للمكاملة على فضاء مشحون X فإن التابع $Cf(x)$ ، مهما كان الثابت C ، يقبل ايضا المكاملة على X ولدينا :

$$\int_X Cf(x)\,dx = C\int_X f(x)\,dx. \qquad (2)$$

ج . إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين قابلين للمكاملة على فضاء مشحون X فإن مجموعها $f(x)+g(x)$ يقبل أيضا المكاملة على X ، ولدينا :

$$\int_X [f(x)+g(x)]\,dx = \int_X f(x)\,dx + \int_X g(x)\,dx. \qquad (3)$$

د . إن كل تابع قابل للمكاملة على فضاء مشحون X محدود على X.

ر . إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعين قابلين للمكاملة على الفضاء X ويحققان المتراجحة $f(x) \leqslant g(x)$ فإن :

$$\int_X f(x)\,dx \leqslant \int_X g(x)\,dx. \qquad (4)$$

بصفة خاصة إذا كان التابعان $f(x)$ و $|f(x)|$ قابلين للمكاملة على X ، فإن

$$\left|\int_X f(x)\,dx\right| \leqslant \int_X |f(x)|\,dx. \qquad (5)$$

إذا كانت قيم تابع $f(x)$ قابل للمكاملة على الفضاء X محصورة بين c و C ، أي $c \leqslant f(x) \leqslant C$ ، فإن :

$$cmX \leqslant \int_X f(x)\,dx \leqslant CmX. \qquad (6)$$

على سبيل المثال ، فان لدينا دائما :

$$\inf_X f(x)\cdot mX \leqslant \int_X f(x)\,dx \leqslant \sup_X f(x)\cdot mX. \qquad (7)$$

عندما يتعلق الامر بتوابع تأخذ قيمها في فضاء نظيمي ، فإن الدستورين (6) و(7) يحل محلها الدستور (ي12 .26 ـ ص) :

$$\frac{1}{mX}\int_X f(x)\,dx \in \overline{V(E)}, \qquad (8)$$

حيث يرمز E لمجموعة قيم التابع $f(x)$ على X، ويرمز $\overline{V(E)}$ للغلاف المحدب المغلق للمجموعة E.

س. نشير اخيرا الى نظرية اخرى برهانها هو اعادة حرفية لبرهان النظرية 27.9ي بعض تعويض المجال [a,b] بفضاء مشحون X.

نظرية. إذا تقاربت متتالية $f_1(x), f_2(x), \ldots$ توابع قابلة للمكاملة، بانتظام على الفضاء المشحون X، نحو تابع $f(x)$، فإن $f(x)$ يقبل ايضا المكاملة ولدينا:

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,dx.$$

لدينا نظرية مماثلة باعتبار السلسلة $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots$ التي حدها العام تابع قابل للمكاملة.

51.3 . بعض الانجازات الملموسة للتكامل.

أ . إذا اخترنا كفضاء X مجالا [a,b] وكخلايا A اية مجالات (تحوي أو لا تحوي أطرافها) وكقياس خلية A طول المجال المعتبر، فإننا نحصل على التعريف المعتاد لتكامل تابع لمتغير واحد.

ب. لتكن X بلاطة في فضاء بعده n:

$$X = \{x \in R_n:\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}.$$

نختار، كخلايا، كل البلاطات الجزئية $A \subset X$:

$$A = \{x \in X:\ \alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n\}$$

وكل المجموعات المستنتجة من المجموعات المعرفة اعلاه بتعويض بعض من الرموز $\leqslant$ بـ $<$. ثم نسمي قياس خلية A حجمها الاقليدي:

$$mA = \prod_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i).$$

يمكن اثبات، دون صعوبة تذكر، ان الشروط 21.3 أ ـ د متوفرة هنا. نلاحظ مع ذلك ان البرهان الشكلي على الشرط 21.3 ـ د ليس من السهولة بمكان، لكن هذا لن يمنعنا في الوقت الراهن من تناسي هذا

البرهان إذ اننا سنقدم ضمن 71.3 برهانا عله قضية أشمل من الشرط المذكور. يسمى التكامل المحصل عليه بواسطة هذا الانشاء **تكامل ريمان ذي الرتبة** n، ونرمز له بـ:

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

61.3 .توطئة حول انصاي الحلقات. يقبل المثال الاخير تعميا أساسيا: بعد تعاطي فضاءات مشحونة $X_1, \ldots, X_n$، يمكننا انشاء الفضاء المشحون $X = \coprod\limits_{i=1}^{n} X_i$ بالطريقة التي ننشيء بها بلاطة ذات بعد n بواسطة مجالات وحيدة البعد. لتحقيق هذه الفكرة، وهو ما سنقوم به في 71.3، ينبغي عرض النتيجتين الموالتين:

أ. توطئة. إذا كانت المجموعات $A_1, \ldots, A_k$ المنتمية لنصف الحلقة $\mathfrak{A}$ غير متقاطعة مثنى مثنى ومحتوية في مجموعة $A \in \mathfrak{A}$، فإنه توجد في $\mathfrak{A}$ مجموعات $B_{k+1}, \ldots, B_r$ بحيث:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup B_{k+1} \cup \ldots \cup B_r = A. \qquad (1)$$

حيث $Bk+1$، ...، Br، A، ...Ak مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى.

البرهان. من اجل $k = 1$، فان القضية واردة في تعريف نصف الحلقة (21.3 ـ ج). لنفرض ان القضية محققة من اجل رتبة k ولنثبت صحتها من اجل الرتبة $k + 1$. نعلم ان لدينا $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى ومنتمية الى نصف الحلقة $\mathfrak{A}$ ومحتواه في المجموعة $A \in \mathfrak{A}$. ينتج من فرض التدريج وجود مجموعات جزئية $B_{k+1}, \ldots, B_r$ في u تحقق التجزئة (1). إن المجموعة A_{k+1} لا تتقاطع مع ايه مجموعة من المجموعات $A_1, \ldots, A_k$، وعليه فهي محتواة في الاتحاد: $B_{k+1} \cup \ldots \cup B_r$، إذن:

$$A_{k+1} = A_{k+1}B_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+1}B_r \qquad (2)$$

يأتي من تعريف نصف الحلقة ان لدينا التجزئات التالية:

$$(3)\qquad \begin{cases} B_{k+1} = A_{k+1}B_{k+1} \cup B_{k+1}^{(1)} \cup \ldots \cup B_{k+1}^{(p_{k+1})}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_r = A_{k+1}B_r \cup B_r^{(1)} \cup \ldots \cup B_r^{(p_r)}, \end{cases}$$

حيث ان المجموعات الواردة في الاطراف اليمنى من (3) تنتمي الى $\mathfrak{A}$ وهي غير متقاطعة مثنى مثنى. بنقل (3) الى (1) واستخدام (2) نصل الى العلاقة:

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}B_{k+1} \cup \ldots \cup A_{k+1}B_r \cup B_{k+1}^{(1)} \cup \ldots \cup B_r^{(p_r)} = A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1} \cup B_{k+1}^{(1)} \cup \ldots \cup B_r^{(p_r)}$$

وهو المطلوب.

ب. توطئة. لتكن $A_1, \ldots, A_k$ مجموعات عددها منته من نصف حلقة $\mathfrak{A}$. توجد في $\mathfrak{A}$ مجموعات غير متقاطعة $B_1, \ldots, B_p$ بحيث $\bigcup_{j=1}^{p} B_j = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ وبحيث تمثل كل مجموعة A_i $(i = 1, \ldots, k)$ اتحاد بعض المجموعات B_j.

البرهان. من اجل k=1 فإن القضية مباشرة: يمكن وضع $B_1 = A_1$. بافتراض القضية قائمة من اجل رتبة **k** نبرهن على قيامها من اجل الرتبة k+1. توجد، حسب فرض التدريج، مجموعات غير متقاطعة $B_1^{(k)}, \ldots, B_p^{(k)}$ في $\mathfrak{A}$ بحيث $\bigcup_{j=1}^{p} B_j^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ وبحيث تمثل كل مجموعة $A_i,\ i = 1, \ldots, k$ اتحاد بعض المجموعات $B_j^{(k)}$. يأتى من تعريف نصف حلقة أننا نستطيع كتابة، من اجل كل $B_j^{(k)}$، تجزئة لهذه المجموعة مؤلفة من مجموعات غير متقاطعة أولاها: $B_j^{(k)} \cap A_{k+1}$:

$$(4)\qquad B_j^{(k)} = (B_j^{(k)} \cap A_{k+1}) \cup B_{j1} \cup \ldots \cup B_{jp_j} \quad (j = 1, \ldots, p).$$

ثم، حسب التواطئة أ، فإن المجموعة A_{k+1} يمكن كتابتها على شكل اتحاد مجموعات غير متقاطعة من $\mathfrak{A}$، أولى هذه المجموعات هي تقاطع A_{k+1} مع المجموعات $B_j^{(k)}$، j=1,...,p:

$$(5)\qquad A_{k+1} = (A_{k+1} \cap B_1^{(k)}) \cup \ldots \cup (A_{k+1} \cap B_p^{(k)}) \cup B_1 \cup \ldots \cup B_r.$$

نرى إذن ان كل المجموعات التي نأخذ اتحادها في الطرف الايمن من (4) و(5) تنتمي الى نصف الحلقة v ، وهي غير متقاطعة مثنى مثنى. من الواضح ان اتحاد بعض هذه المجموعات يعطي كلا من المجموعات $A_1, \ldots, A_{k+1}$. انتهى برهان التوطئة.

71.3 . جداء الفضاءات المشحونة. لتكن $X_1, \ldots X_n$ فضاءات مشحونة؛ نعتبر الجداء Z للمجموعات $X_1, \ldots, X_n$ ، اي مجموعة العناصر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ندخل على هذه المجموعة بنية فضاء مشحون كي لا نعقد العرض، نقتصر على الحالة التي يكون فيها n=2 ونرمز بـ $X_1 = X, \ X_2 = Y$.

نعرف خلايا الفضاء $Z = X \times Y$ على انها الجداءات C=A×B حيث A وB خلايا من X وY على التوالي. نرمز لمجموعة تلك الخلايا بـ $\mathfrak{A}(Z)$ نصف حلقة. إن الفضاء Z=X×Y باكمله ينتمي الى الجملة $\mathfrak{A}(Z)$ لأن $X \in \mathfrak{A}(X)$، و $Y \in \mathfrak{A}(Y)$. إذا كان $C_1 = A_1 \times B_1$، و$C_2 = A_2 \times B_2$ خليتين من Z فإن $C_1C_2 = A_1A_2 \times B_1B_2$ خلية ايضا من Z. ليكن $C_1 = A_1 \times B_1 \in \mathfrak{A}(Z)$ و$C = A \times B \in \mathfrak{A}(Z)$ بحيث $C_1 \subset C$. يعني ذلك ان $A_1 \subset A$ و $B_1 \subset B$. نجد في هذه الحالة خلايا غيرمتقاطعة $A_2, \ldots, A_p$ من $\mathfrak{A}(X)$ و $B_2, \ldots, B_q$ من $\mathfrak{A}(Y)$ بحيث:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p, \quad B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_q.$$

تمثل العبارة

$$A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup \ldots \cup (A_1 \times B_q) \cup \ldots \cup (A_p \times B_1) \cup (A_p \times B_2) \cup \ldots \cup (A_p \times B_q)$$

الخلية A×B على شكل اتحاد للخلية $A_1 \times B_1$ مع بعض الخلايا غير المتقاطعة الاخرى. ينتج من ذلك ان $\mathfrak{A}(Z)$ نصف حلقة لأن المسلمات 21.3 أ ـ جـ متوفرة.

نزود الفضاء Z بمسافة بالطريقة الطبيعية، كجداء فضاءين متريين، مثلا حسب الدستور (ي 61.3):

$$\rho(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = \sqrt{\rho^2(x_1, x_2) + \rho^2(y_1, y_2)}.$$

إذا كان $X = A_1 \cup \ldots \cup A_p$ و $Y = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ تفكيكين الى خلايا غير متقاطعة اقطارها $\leqslant \delta$، للفضاءين X و Y على التوالي ، فان

$$Z = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup \ldots \cup (A_p \times B_q)$$

يمثل تفكيكا للفضاء Z الى خلايا غير متقاطعة اقطارها $\leqslant \delta \sqrt{2}$، بحيث لأن المسلمة 21.3 ـ د تصبح هي الاخرى محققة.

اخيراً ، نضع ، من اجل خلية C=A×B ، mC=mA.mB . لنثبت ان قياس خلايا Z المعرفة بهذا الشكل تحقق مسلمة قابلية الجمع 21.3 ـ ر.

لتكن:

$$C = A \times B = (A_1 \times B_1) \cup \ldots \cup (A_k \times B_k) \qquad (1)$$

تجزئة الخلية C الى خلايا غير متقاطعة. نضع A على شكل اتحاد مجموعات (ليست بالضرورة غير متقاطعة):

$$A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$$

توجد في $\mathfrak{A}(X)$ ، حسب 61.3 ـ ب، خلايا غير متقاطعة $\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_p$ بحيث $A = \bigcup_{j=1}^{p} \widetilde{A}_j$ وبحيث تكون كل خلية A_i اتحادا لبعض الخلايا A_j.

كما انه توجد $\mathfrak{A}(Y)$ خلايا غير متقاطعة $\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_q$ بحيث $B = \bigcup_{1}^{q} \widetilde{B}_j$ وبحيث تكون كل خلية B_i اتحادا لبعض الخلايا $\widetilde{B}_j$. نرمز للتفكيكات الموافقة لذلك بـ:

$$A_i = \bigcup_r \widetilde{A}_r^{(i)}, \quad B_j = \bigcup_s \widetilde{B}_s^{(j)}.$$

تكتب العبارة (1) على الشكل:

$$C = A \times B = (\widetilde{A}_1^{(1)} \times \widetilde{B}_1^{(1)}) \cup (\widetilde{A}_2^{(1)} \times \widetilde{B}_1^{(1)}) \cup \ldots \cup (\widetilde{A}_r^{(k)} \times \widetilde{B}_s^{(k)})$$

ولدينا

$$mC = mA \cdot mB = \sum_{i=1}^{p} m\widetilde{A}_i \cdot \sum_{j=1}^{q} m\widetilde{B}_j.$$

من جهة أخرى،

$$\sum_{i=1}^{k} m(A_i \times B_i) = \sum_{i=1}^{k} mA_i \times mB_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_r m\widetilde{A}_r^{(i)}\right)\left(\sum_s m\widetilde{B}_s^{(i)}\right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} m\widetilde{A}_i m\widetilde{B}_j$$

لأن الخلايا $A_i \times B_i$ غير متقاطعة ولذا فكل حد من اليمين يساوي حدا من اليسار والعكس وبالعكس. ومنه تأتي المساواة المطلوبة:

$$mC = \sum_{i=1}^{k} m(A_i \times B_i).$$

وهكذا، إذن، فإن كل جداء فضاءات مشحونة يقبل هو أيضا بنيه فضاء مشحون. تسمى البنية الواردة هنا جداء شحنتي الفضاءين X و Y. يمكن تمديد هذا الانشاء، بالتدريج، ليشمل كل الحالات مهما كان عدد العوامل.

81.3 . المجموعات الاولية.

أ . **المجموعات الاولية** هي، تعريفا، الاتحادات المنتهية لخلايا فضاء مشحون.

يتبين من 61.3 ـ ب ان كل مجموعة أوليه P يمكن تمثيلها على شكل اتحاد منته من الخلايا غير المتقاطعة.

ب . **توطئة.** إذا كانت P وQ مجموعتين أوليتين وكان:

$$P = A_1 \cup \ldots \cup A_p,$$

$Q = B_1 \cup \ldots \cup B_q$ تمثل هاتين المجموعتين على شكل اتحاد خلايا غير متقاطعة مثنى مثنى، فإن الاحتواء $P \subset Q$ يستلزم:

$$\sum_{i=1}^{p} mA_i \leqslant \sum_{j=1}^{q} mB_j. \quad (1)$$

البرهان. بما أن $P \subset Q$ فان $A_i \subset Q$، ومنه:

$$A_i = A_iQ = \bigcup_{j=1}^{q} A_iB_j,$$

حيث ان حدود الطرف الايمن غير متقاطعة. ينتج إذن، استنادا الى 21.3 ـ ر، ان:

$$mA_i = \sum_{j=1}^{q} m(A_iB_j).$$

عندما يكون j مثبتا، فان الخلايا A_iB_j تصبح غير متقاطعة؛ توجد،

حسب 21. 3 ـ ج، خلايا غير متقاطعة $B_j^{(r_j)}, \ldots, B_j^{(1)}$ بحيث:

$$B_j = (A_1B_j) \cup \ldots \cup (A_pB_j) \cup B_j^{(1)} \cup \ldots \cup B_j^{(r_j)} \; (j=1, \ldots q)$$

بالنظر الى 21. 3 ـ ر، يتبين أن:

$$mB_j = \sum_{i=1}^{p} m(A_iB_j) + mB_j^{(1)} + \ldots + mB_j^{(r_j)} \geqslant \sum_{i=1}^{p} m(A_iB_j).$$

وبالتالي:

$$\sum_{j=1}^{q} mB_j \geqslant \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} m(A_iB_j) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{q} m(A_iB_j)\right) = \sum_{i=1}^{p} mA_i,$$

وهو المطلوب اثباته.

ج. على وجه الخصوص، فإننا نجد، عند وضع P=Q:

$$\sum_{i=1}^{p} mA_i = \sum_{j=1}^{q} mB_j. \qquad (2)$$

يمكننا إذن تعريف قياس mP لكل مجموعة أولية P بوصفه مجموع قياسات الخلايا غير المتقاطعة التي تشكل P، تثبت العلاقة (2) ان هذا التعريف سليم.

د. تقوم المتراجح (1) أيضا في الحالة التي تكون فيها الخلايا B_j متقاطعة (عند الاحتفاظ بالشروط الاخرى). ذلك اننا نستطيع، حسب 61. 3 ـ ب، ايجاد جماعة من الخلايا غير المتقاطعة $\tilde{B}_r$ (r=1,...,s) بحيث يكون $\bigcup_j B_j = \bigcup \tilde{B}_r$ وبحيث تكون كل B_jاتحاد بعض الخلايا $\tilde{B}_r$. إن قياس كل خلية B_j يساوي مجموع قياسات كل الخلايا $\tilde{B}_r$ المحتوية في B_j، ثم إن مجموع قياسات كل الخلايا B_j يساوي على الاقل مجموع قياسات كل الخلايا $\tilde{B}_r$ لأن كل خلية $\tilde{B}_r$ محتواة في خلية من الخلايا . لدينا الآن:

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i \subset \bigcup_{j=1}^{q} B_j = \bigcup_{r=1}^{s} \tilde{B}_r$$

ثم، بفضل أ:

$$\sum_{i=1}^{p} mA_i \leqslant \sum_{r=1}^{s} m\tilde{B}_r \leqslant \sum_{j=1}^{q} mB_j,$$

وهو المطلوب.

ر . إذا كانت مجموعة أولية P اتحادا لبعض الخلايا، متقاطعة كانت أو غير متقاطعة، $B_1, \ldots, B_q$، فإن المتراجحة التالية محققة:

$$mP \leqslant \sum_{j=1}^{q} mB_j.$$

بالفعل، توجد حسب د مجموعات غير متقاطعة $A_1, \ldots, A_p$ بحيث $\bigcup_i A_i = P = \bigcup_j B_j$؛ يستلزم التعريف ج والنتيجة د ان

$$mP = \sum_{i=1}^{p} mA_i \leqslant \sum_{j=1}^{q} mB_j,$$

وهو المطلوب.

§3 .2 . نظريات الوجود

نثبت في هذه الفقرة التوابع المستمرة للمكاملة وكذا التوابع التي لها نقاط « قليلة » (بالمفهوم الذي سنحدده فيا بعد).

3 .12 . نثبت هنا بأننا نستطيع الاقتصاد، عند البرهان على وجود تكامل، على التجزئات التي تتبع التجزئات المقسمة تقسيما كافياً. نقول، كالمعتاد، عن تجزئة Π' لمجموعة X إنها **تابعة أو موالية** بالنسبة لتجزئة Π اذا كانت خلايا التجزئة Π' اتحادات (بدون نقاط مشتركة) لخلايا التجزئة Π . من اجل كل تجزئة Π وكل $\delta > 0$، توجد تجزئة تابعة Π' بحيث $d(\Pi') < \delta$؛ لإنشاء مثل هذه التجزئة، نعتبر أية تجزئة Π'' بحيث $d(\Pi'') < \delta$، وهي موجودة حسب 3 .21 ـ د، ونؤلف التجزئة Π' المشكلة من كل تقاطعات خلايا Π مع خلايا Π''.

أ . **توطئة**. نفرض ان لدينا تجزئة Π، وان المتراجحة الموالية قائمة، من اجل كل $\varepsilon > 0$ وكل تجزئة تابعة Π':

$$|S_{\Pi}(f) - S_{\Pi'}(f)| \leqslant \varepsilon.$$

إذا كانت Π_1 تجزئة أخرى لها نفس الخاصية أي أن

$$|S_{\Pi_1}(f) - S_{\Pi_1'}(f)| \leqslant \varepsilon,$$

وهذا مهما كانت التجزئة التابعة Π_1'، فإن:

$$| S_\Pi (f) - S_{\Pi_1} (f) | \leqslant 2\varepsilon.$$

البرهان. نعتبر تجزئة جديدة Π_2 مشكلة من تقاطعات خلايا Π و Π_1، نختار النقاط المعلمة بشكل كيفي. إن التجزئة Π_2 تابعة بالنسبة لـ Π و Π_1. لدينا فرضا:

$$| S_\Pi (f) - S_{\Pi_2} (f) | \leqslant \varepsilon,$$
$$| S_{\Pi_1} (f) - S_{\Pi_2} (f) | \leqslant \varepsilon,$$

ومنه تأتي العلاقة المطلوبة.

ب. **نتيجة.** إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، ايجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الموالية، مهما كانت التجزئة Π لفضاء مشحون X حيث $d(\Pi) < \delta$، والتجزئة التابعة Π' :

$$| S_\Pi (f) - S_{\Pi'} (f) | < \varepsilon,$$

فإن التابع $f(x)$ يقبل المكاملة على الفضاء X.

بالفعل، فإن المتراجحة

$$| S_\Pi (f) - S_{\Pi_1} (f) | < 2\varepsilon$$

قائمة ضمن الافتراض المتخذ، حسب أ، وهذا مهما كانت التجزئتان Π و Π_1 مع $d(\Pi) < \delta$ و $d(\Pi_1) < \delta$ وهكذا يمكننا تطبيق مقياس كوشي على المجاميع التكاملية $S_\Pi (f)$ والاتجاه $d(\Pi) \to 0$، وهو ما يثبت وجود التكامل.

22.3 . نظرية وجود تكامل تابع مستمر.

أ. ليكن P جزءاً من فضاء متري X نرمز بـ:

$$\omega_f (P, \delta) = \sup_{\substack{\rho(x', x'') \leqslant \delta \\ x' \in P,\ x'' \in P}} | f(x') - f(x'') |$$

لتذبذب تابع $f(x)$ على المجموعة $P \subset X$.

ب. لتكن $P \subset X$ مجموعة أولية قياسها mP (81.3 ـ ج)

و $\Pi = \{P = \bigcup_{i=1}^{p} A_i\}$ تجزئتها الى خلايا غير متقاطعة. نرمز للمجموع التكاملي على المجموعة P ، أي المجموع ذي الشكل $\sum_{i=1}^{p} f(\xi_i)\, mA_i$، بـ $S_\Pi(f, P)$ ونخصص الرمز $S_\Pi(f)$ للحالة التي يكون فيها X÷ P ليكن $\max \operatorname{diam} A_i$ $= \delta$ (أي القيمة العظمى لاقطار Ai).

توطئة. لدينا المتراجحة التالية، من كل تجزئة تابعة Π' للمجموعة المذكورة P :

$$| S_\Pi (f, P) - S_{\Pi'} (f, P) | \leqslant \omega_f (P, \delta)\, mP. \tag{1}$$

البرهان. ليكن

$$\Pi' = \{P = A_{11} \cup \ldots \cup A_{1r_1} \cup \ldots \cup A_{p1} \cup \ldots \cup A_{pr_p}\}$$

حيث $A_i = \bigcup_{j=1}^{r_i} A_{ij}$. إن جزء المجموع التكاملي $S_{\Pi'}(f, P)$ الموافق للخلية A_i يكتب على الشكل:

$$\sum_{j=1}^{r_i} f(\xi_{ij})\, mA_{ij}, \quad \xi_{ij} \in A_{ij}$$

يحقق الحد الموافق لـه $f(\xi_i)\, mA_i$ الوارد في المجموع التكاملي $(\xi_i \in A_i)$ $S_\Pi (f, P)$ المتراجحة:

$$\left| f(\xi_i)\, mA_i - \sum_{j=1}^{r_i} f(\xi_{ij})\, mA_{ij} \right| =$$

$$\left| \sum_{j=1}^{r_i} [f(\xi_i) - f(\xi_{ij})]\, mA_{ij} \right| \leqslant \omega_f (P, \delta)\, mA_i,$$

ومنه تأتي (1).

إن النظرية الموالية اساسية. استعملنا في هذه النظرية تعاريف ونتائج أ و ب بافتراض ان P=X . ستكون الحالة P⊂X ، P≠X مفيدة في المستقبل (42. 3).

ج. نظرية. كل تابع $f(x)$ مستمر بانتظام على فضاء مشحون X ، قابل للمكاملة.

البرهان. من اجل $\varepsilon > 0$ ، يمكن ايجاد $\delta > 0$ بحيث $\omega_f (X, \delta) < \varepsilon/(2mX)$ وبالتالي، مهما كانت التجزئة Π حيث $d(\Pi) < \delta$ ومهما كانت التجزئة التابعة Π' ، فإن المتراجحة (1) تستلزم:

$$| S_{\Pi'}(f) - S_{\Pi}(f) | \leqslant \omega_f(X, \delta)\, mX \leqslant \varepsilon,$$

يبقى فقط تطبيق 12.3 ـ ب.

د . نتيجة . لإن كل تابع مستمر على متراص مشحون X قابل للمكاملة. ذلك ان كل تابع متستمر $f(x)$ على متراص X مستمر بانتظام (ي 71.5) ومن ثم تأتى النتيجة المطلوبة بفضل ج.

32.3 . سنحتاج الى تكاملات بعض التوابع المتقطعة التي لها مجموعة نقاط صغيرة نسبيا. لوصف مثل هذه المجموعات، نقدم التعاريف الموالية:

أ . لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري X و $x \in X$ نقطة كيفية. يسمى العدد:

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

مسافة النقطة y عن المجموعة A.

ب . تسمى المجموعة

$$U_\delta(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < \delta\}$$

ρ ـ جوارا للمجموعة $A \subset X$

ج . نقول عن مجموعة $A \subset X$ إنها محتواة تماما داخل مجموعة $B \subset X$ ، اذا تحقق الاحتواء $U_\delta(A) \subset$ من اجل عدد S<5.

د . لتكن A وB مجموعتين جزئيتين من فضاء متري X . نضع:

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y).$$

من الواضح أن d(A,B)=0 إذا وفقط إذا قبلت المجموعتان A وB، على الاقل، نقطة ملاصقة مشتركة، إن لم يكن الامر كذلك فإن $d(A, B) > 0$.

من البديهي انه إذا كان A محتوياً تماما داخل B، فإن; $d(A, X - B) > 0$ وبالعكس، إذا كان $d(A, X - B) > 0,$ فإن A محتو تماما داخل B.

ر. نقول عن مجموعة Z في فضاء مشحون X إنها **قابلة للاهمال** إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، جعل Z محتويا تماما داخل اتحاد منته من الخلايا $A_1, \ldots, A_p$ مع $\sum_{j=1}^{p} mA_j < \varepsilon$.

س. كل اتحاد منته Z من المجموعات القابلة للاهمال $Z_1, \ldots, Z_n$ يمثل هو ايضا مجموعة قابلة للإهمال: بالفعل، إذا كان Z_k محتويا تماما داخل اتحاد الخلايا $A_1^{(k)}, \ldots, A_{s_k}^{(k)}$، $k = 1, \ldots, n$ فإن Z محتو داخل اتحاد الخلايا؛ $A_1^{(1)}, \ldots, A_{s_1}^{(1)}, \ldots, A_1^{(n)}, \ldots, A_{s_n}^{(n)}$؛ زيادة على ذلك، إذا كانت الخلايا $A_j^{(k)}$ مختارة بحيث يكون:

$\sum_{j=1}^{s_k} mA_j^{(k)} < \frac{\varepsilon}{n}$، فإن $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{s_k} mA_j^{(k)} < \varepsilon$، وهو المطلوب.

42.3 ـ أ. كنا قدمنا في دراسة تكامل التوابت لمتغير واحد x, $a \leqslant x \leqslant b$ نظرية حول قابلية التوابع المستمرة بتقطع للمكاملة (ي 61.9).

نقدم الآن النتيجة المماثلة لتلك النظرية في حالة التوابع المعرفة على فضاء مشحون:

نظرية. ليكن X فضاء مشحونا و $Z \subset X$ مجموعة قابلة للإهمال. إن كل تابع محدود $f(x)$ مستمر بانتظام خارج كل جوار للمجموعة Z، تابع قابل للمكاملة على X.

البرهان. لنثبت اننا نستطيع، من اجل كل $\varepsilon > 0$, ايجاد $\delta > 0$ بحيث:

$$|S_\Pi(f) - S_{\Pi'}(f)| \leqslant \varepsilon$$

وذلك مهما كانت التجزئة Π مع $d(\Pi) < \delta$ والتجزئة Π' التابعة عند اثبات ذلك، تنتج النظرية من 12.3 ـ ب.

ليكن $M = \sup |f(x)|$ من اجل كل $\varepsilon > 0$، توجد حسب الفرض خلايا $A_1, \ldots, A_p$ مع $\sum_{j=1}^{p} mA_j < \varepsilon/(4M)$ اتحادها يحوي المجموعة Z الواقعة تماما داخله. نضع $B = X - \bigcup_{j=1}^{p} A_j$ يأتي من 32.3 ـ د ان $d(Z, B) = 2\rho > 0$. إن التابع $f(x)$ مستمر بانتظام خارج الـ ρ جوار

للمجموعة Z ، يوجد إذن $\tau > 0$ بحيث تستلزم العلاقة $\rho(x', x'') < 2\tau$، $x' \in B$ ، $x'' \in B$ المتراجحة $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon/(2mX)$. لنعتبر اية تجزئة Π للفضاء X مع $d(\Pi) < \delta = \min(\tau, \rho)$ واية تجزئة تابعة Π' .

نقسم الى صنفين مجموعة كل الخلايا $C_1, \ldots, C_n$ الواردة في التجزئة Π . يتشكل الصنف الأول من الخلايا المحتوية تماما في اتحاد الخلايا $A_1, \ldots, A_p$ ويحوي الصنف الثاني الخلايا المتبقية وهي التي لها نقاط مشتركة مع المجموعة B.

إن خلايا الصنف الثاني تقع بأكملها خارج الـ ρ ـ جوار للمجموعة Z لأن اقطارها اصغر من $\delta \leqslant \rho$، وهي تحوي من جهة أخرى نقاطا تبعد عن Z بمسافات تتجاوز 2ρ . ليكن P اتحاد خلايا الصنف الاول وQ اتحاد خلايا الصنف الثاني. نقسّم الى قسمين الخلايا D_i الواردة في التجزئة التابعة Π' ؛ يحوي القسم الاول خلايا محتواة في المجموعة P ويحوي الثاني خلايا محتواه في Q . لنقيّم فرق المجاميع التكاملية $S_\Pi(f)$ و $S_{\Pi'}(f)$. لدينا:

$$|S_\Pi(f) - S_{\Pi'}(f)| \leqslant |S_\Pi(f, P)| + |S_{\Pi'}(f, P)| + |S_\Pi(f, Q) - S_{\Pi'}(f, Q)|.$$

نقيّم الحدين الاولين الواردين في الطرف الايمن وذلك باستخدام التوطئة 3 .81 ـ ب:

$$(1) \quad |S_\Pi(f, P)| \leqslant M \sum_{C_i \subset P} mC_i \leqslant M \sum_{j=1}^{p} mA_j \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4},$$

$$(2) \quad |S_{\Pi'}(f, P)| \leqslant M \sum_{D_i \subset P} mD_i \leqslant M \sum_{j=1}^{p} mA_i \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4},$$

نجد ، بمراعاة التوطئة 3 .22 ـ ب:

$$(3) \quad |S_\Pi(f, Q) - S_{\Pi'}(f, Q)| \leqslant \omega_f(Q, \delta)\, mX \leqslant \frac{\varepsilon}{2mX}\, mX = \frac{\varepsilon}{2}$$

ينتج من (1)، (2)، (3) أن:

$$|S_\Pi(f) - S_{\Pi'}(f)| \leqslant \varepsilon,$$

وهو المطلوب.

ب. نتيجة. إذا كان $f(x)$ تابعا محدودا، منعدما على فضاء مشحون X

باستثناء مجموعة قابلة للإهمال Z ، فإنه يقبل المكاملة على X وتكامله منعدم.

بالفعل، التابع $f(x)$ منعدم وعليه فهو مستمر بانتظام خارج كل جوار للمجموعة Z ، تنتج قابليته للمكاملة من النظرية أ. ثم، باستخدام رموز هذه النظرية:

$$S_{\Pi}(f) = S_{\Pi}(f, P) + S_{\Pi}(f, Q) = S_{\Pi}(f, P)$$

لأن التابع $f(x)$ منعدم على المجموعة $Q \subset X - U_{\rho}(Z)$.

بالنظر الى (1) نستنتج:

$$|S_{\Pi}(f)| = |S_{\Pi}(f, P)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$$

إذن

$$\int_X f(x)\,dx = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f) = 0.$$

ج. نتيجة. لتكن $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ متتالية تجزئات فضاء مشحون x حيث $d(\Pi_n) \to 0$ و $m_n(Z)$ مجموع قياسات خلايا التجزئة Π_n التي تحتوي نقاطا من مجموعة قابلة للإهمال مثبتة Z. عندئذ $m_n(Z) \to 0$.

بالفعل، ان $m_n(Z)$ هو المجموع التكاملي للتابع $f(x)$ المساوي لـ1 على المجموعة Z و لـ0 خارج هذه المجموعة عندما نختار النقاط المعلمة ξ_i في $C_i \cap Z$. وعليه تأتي النتيجة ج من ب.

52. 3 . في الحالة التي يكون فيها الفضاء المشحون X متراصا، يمكننا اختصار افتراضيات النظرية 42. 3 ، ذلك اننا نستطيع عدم الاهتمام بالاستمرار المنتظم للتابع خارج جوارات المجموعة القابلة للإهمال المعطاة. نقدم في البداية هذه التوطئة:

أ. توطئة إذا كان $f(x)$ تابعا محدودا على متراص مشحون X، نقطا تقطعه تشكل مجموعة قابلة للإهمال Z، فإن $f(x)$ مستمر بانتظام خارج كل جوار للمجموعة Z.

البرهان. لنفرض العكس: من اجل بعض الاعداد $0 < \delta$ و $0 < \varepsilon$، توجد

متتالية نقاط x'_n, x''_n $(n=1,2,\dots)$ بحيث $\rho(x'_n, Z) \geqslant \delta$، $\rho(x''_n, Z) \geqslant \delta$، $\rho(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}$، $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$. بملا أن X متراص، يمكننا القول، ولو اقتضى الامر الانتقال الى المتتاليات الجزئية، ان للمتتاليات x'_n ، x''_n نهاية مشتركة z . إذن فإن z نقطة تقطع للتابع $f(x)$ (راجع ي 71.5 ـ ب)، وعليه فهي نقطة من Z. لكن المتراجحات $\rho(x'_n, Z) \geqslant \delta$ تستلزم ان $\rho(z, Z) \geqslant \delta$; وهو ما يناقض كون Z يمثل مجموعة كل نقاط تقطع التابع $f(x)$. انتهى برهان التوطئة.

ب. **نظرية**. إذا كانت المجموعة Z المؤلفة من نقاط تقطع تابع $f(x)$ محدود عله متراص مشحون X، قابلة للإهمال فإن التابع $f(x)$ قابل للمكاملة على X.

البرهان. ان التابع $f(x)$ مستمر بانتظام خارج كل جوار للمجموعة Z، حسب التوطئة أ؛ نطبق عندئذ 42.3 ـ أ.

§ 3.3 . المجموعات الجوردانية

13.3 ـ أ. تسمى مجموعة جزئية G من فضاء مشحون بشحنة $\mathfrak{A}$ **مجموعة جوردانية** (بعبارة أدق، جورداني بالنسبة للشحنة $\mathfrak{A}$) إذا كانت حافتها، أي مجموعة النقاط المشتركة بين ملاصق G وملاصق x–G، مجموعة قابلة للإهمال. تسمى مجموعة جوردانية مغلقة A داخليتها كثيفة اينما كان في A **حقلا جوردانيا**.

إن نقاط تقطع التابع المميز $\chi_G(x)$ لمجموعة G، أي التابع المساوي 1 من أجل $x \in G$ و 0 من أجل $x \notin G$، هي نقاط حافة المجموعة G. إذن إذا كانت G مجموعة جوردانية على متراص مشحون X فإن التابع $\chi_G(x)$ يقبل المكاملة (52.3 ـ ب). يسمى تكامل التابع $\chi_G(x)$ حجم المجموعة G، ونرمز له بـ$|G|$ (أو، إذا اقتضى الامر، بـ$|G|_{\mathfrak{A}}$).

ب. ليس من الضروري ان تكون الخلايا في متراص مشحون X مجموعات

جوردانية (انظر التمرين 7). لكن، بمجرد ان تكون خلية A مجموعة جوردانية فان حجمها $|A|$ يصبح مساويا للقياس الابتدائي mA للخلية. بالفعل، نعتبر مجموعا تكامليا للتابع $\chi_A(x)$ المنشأ انطلاقا من تجزئة كيفية Π. إذا كانت النقاط المعلمة ξ_i لخلايا .Π التي لها نقاط مشتركة مع A، مختارة في A فإن قيمة هذا المجموع تساوي مجموع قياسات الخلايا المعتبرة، وبالتالي فهذا المجموع يساوي، على الاقل، قياس الخلية A. ثم اذا كانت النقاط ξ_i لخلايا Π التي لها نقاط مشتركة مع X−A، مختارة في X−A، وهكذا يتضح ان قيمة المجموع التكاملي تساوي مجموع قياسات خلايا Π المنتمية باكملها الى A، وعليه فيه تساوي، عله الأكثر، قياس A. بما ان الخلية A جوردانية فرضاً، فإن حجمها، أي تكامل تابعها المميز يساوي قياس A بصفته نهاية اعداد مساوية، على الاقل، لقياس A، واعداد مساوية، على الاكثر، لنفس القياس. وهو المطلوب.

ج. إذا كانت كل خلايا فضاذ مشحون خلايا جوردانية فإننا نسمي هذا الفضاء **فضاء مشحونا نظيمياً** ونسمي الشحنة الموافقة له **شحنة نظيمية**. كنا أثبتنا في ب بأن الحجم A. لكل خلية A في فضاء مشحون نطيمياً يساوي القياس mA نستعمل، إضافة الى الرمز $|G|$، الرمز mG للإشارة الى حجم مجموعة جوردانية G في فضاء مشحون نظيمياً.

بتطبيق الاستدلال ب على اية مجموعة جوردانية G، نرى ان حجم كل مجموعة جوردانية G في فضاء مشحون نظيمياً يساوي، على الاقل، المجموع $\mu_{\Pi_1}(G)$ لأحجام الخلايا المحتواه في G لأية تجزئة Π_1، ويساوي، على الاكثر، المجموع $\mu^{\Pi_2}(G)$ لأحجام خلايا اية تجزئة Π_2، التي لها نقاط مشتركة مع G. وبالتالي نجد المتراجحة التالية عند الانتقال الى الحد الاعلى والحد الأدنى:

$$\sup_{\Pi} \mu_{\Pi}(G) \leqslant |G| \leqslant \inf_{\Pi} \mu^{\Pi}(G), \qquad (1)$$

وبما ان المجموعة G جوردانية فإن التابع $\chi_G(x)$ يقبل المكاملة، وعليه

يمكننا تعويض (1) بالمساواة:

$$\sup_{\Pi} \mu_{\Pi}(G) = |G| = \inf_{\Pi} \mu^{\Pi}(G). \qquad (2)$$

بصفة خاصة، من اجل كل مجموعة جوردانية G، ومن اجل كل $0 < \varepsilon$ ($|G| > \varepsilon$) يمكننا الاشارة الى مجموعتين أوليتين P وQ (كل منهما اتحاد خلايا غير متقاطعة) بحيث $P \subset G \subset Q$ وبحيث:

$$|Q| \leqslant |G| + \varepsilon, \quad |P| \geqslant |G| - \varepsilon.$$

د. توطئة. يمكننا، في فضاء مشحون نظيمياً، ومن اجل كل خلية A ومن اجل كل $\varepsilon > 0,$ الاشارة الى مجموعة اولية P تحوي تماما الخلية A في داخلها، بحيث $mP < mA + \varepsilon.$

البرهان. لتكن Γ حافة الخلية A؛ حينئذ فإن Γ مجموعة قابلة للإهمال. انها توجد، تعريفا، في داخل اتحاد منته من الخلايا $A_1, \ldots, A_p$ مجموع قياساتها أصغر من ε إن المجموعة الاولية $P = A \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ تحوي تماما الخلية A في داخلها. أما قياس هذه المجموعة فهو لا يتجاوز، حسب 3 .81 ـ د، مجموع قياسات A، A_1، ...، A_p الذي لا يتجاوز بدوره $mA + \varepsilon,$ وهو المطلوب.

ر. يمكننا اختصار التعريف 3 .32 ـ ر لمجموعة قابلة للإهمال في فضاء مشحون نظيمياً؛ في مثل هذا الفضاء X، تكون مجموعة $Z \subset X$ قابلة للإهمال، إذا استطعنا من أجل كل $\varepsilon > 0,$ إيجاد اتحاد منته من الخلايا $A_1, \ldots, A_p$ المغطية لِـZ (بدون ان نطالب بأن تكون Z محتواه تماما في داخل هذا الاتحاد) بحيث $\sum_{j=1}^{p} mA_j < \varepsilon.$

لإثبات ذلك، يكفي ان نلاحظ، بعد التأكد من وجود التغطية المذكورة، انه بالإمكان ايجاد تغطية اخرى نحصل عليها حسب د: نعوض كل خلية $A_j,\ j = 1, \ldots, p$ بمجموعة أولية P_j، ($mP_j \leqslant mA_j + \varepsilon/p$) تحوي تماما A_j في داخلها؛ إن اتحاد المجموعات P_j، مجموعة أولية P تحوي تماما في داخلها كل الخلايا ، وبصفة خاصة، المجموعة Z، ثم

إن قياس P لا يتجاوز ε.

يمكن القول ايضا ان مجموعة $Z \subset X$ تكون قابلة للإهمال إذا استطعنا من اجل كل $\varepsilon > 0$, ايجاد مجموعة جوردانية $G_\varepsilon \supset Z$ ، حيث $|G_\varepsilon| < \varepsilon$. بالفعل، بعد الحصول على مجموعة $G_\varepsilon \supset Z$ حيث $|G_\varepsilon| < \varepsilon$ انطلاقا من عدد $0 < \varepsilon$ معطي، يمكننا حسب ج، إيجاد مجموعة اولية $Q_\varepsilon \supset G$ حيث $|Q_\varepsilon| < 2\varepsilon$ مع العلم أن $0 < \varepsilon$ كيفي، إن المجموعة Z قابلة للاهمال حسب ما سبق.

3 .23 . نظرية. أ. إن التقاطع $G_1 \cap G_2$ لمجموعتين جوردانيتين مجموعة جوردانية.

ب. إن الاتحاد $G_1 \cap G_2$ لمجموعتين جوردانيتين مجموعة جوردانية؛ وإذا كان G_1 و G_2 غير متقاطعين فإن:

$$|G_1 \cap G_2| = |G_1| + |G_2|.$$

ج. إن المتمم $E - G$ لمجموعة جوردانية G بالنسبة لمجموعة جوردانية $G \subset E$ مجموعة جوردانية، ولدينا:

$$|E - G| = |E| - |G|.$$

البرهان. أ. ان حافة $G_1 \cap G_2$ لا تحوي اية نقطة تقع في آن واحد داخل G_1 و G_2 أو داخل متممي G_1 و G_2 لذا فإن حافة $G_1 \cap G_2$ محتواه في اتحاد حافتي المجموعتين و ، وهي تمثل مجموعة قابلة للإهمال بفضل 3 .32 ـ س. وبالتالي فإن المجموعة $G_1 \cap G_2$ جوردانية.

ب. لنفس السبب السابق، فإن حافة $G_1 \cup G_2$ مجموعة قابلة للإهمال، وهي محتواة في اتحاد حافتي المجموعتين G_1 و G_2، إذن فإن المجموعة $G_1 \cup G_2$ جوردانية. إذا كانت المجموعتان G_1 و G_2 غير متقاطعتين فإن $\chi_{G_1}(x) + \chi_{G_2}(x) = \chi_{G_1 \cup G_2}(x)$ ولدينا، حسب 3 .41:

$$|G_1 \cup G_2| = \int_X \chi_{G_1 \cup G_2}(x)\,dx = \int_X \chi_{G_1}(x)\,dx + \int_X \chi_{G_2}(x)\,dx = |G_1| + |G_2|.$$

جـ . الامر هنا كما ورد اعلاه إذ ان حافة E–G محتواه في اتحاد حافتي E و G بحيث ان المجموعة E–G جوردانية. بالنظر الى ب نرى أن $|E-G|+|G|=|E|$، ومنه يأتي (2)

33. 3 . التكامل على مجموعة جوردانية

أ . ليكن $f(x)$ تابعا محدودا على متراص مشحون X، $|f(x)|\leqslant M$ و $G\subset X$ مجموعة جوردانية حافتها Γ . نعرف تكامل التابع f(x) على المجموعة G بالدستور :

$$\int_G f(x)\,dx=\int_X f(x)\,\chi_G(x)\,dx. \quad (1)$$

إذا كان التابع f(x) مستمرا على G باستثناء مجموعة قابلة للإهمال Z ، فإن التابع $f(x)$ مستمر اينما كان على الفضاء X باستثناء المجموعة القابلة للاهمال $Z\cup\Gamma$. وبالتالي فإن التكامل (1) موجود حسب النظرية 52. 3 ـ ب .

بصفة خاصة (وهو الأمر الذي يمكن رؤيته مباشرة) فإن القواعد 41. 3 أ ـ س قائمة من اجل التكامل على مجموعة جوردانية؛ يجب فقط تعويض العدد mX الوارد في التقارير بـ $|G|$ يمكن اضافة أيضا القضية التالية .

ب . إذا كان تابع f(x) قابل للمكاملة على كلّ من مجموعتين جوردانيتين غير متقاطعتين G_1 و G_2 من متراص مشحون X ، فانه يقبل المكاملة على اتحاد هاتين المجموعتين ، ولدينا :

$$\int_{G_1\cup G_2} f(x)\,dx=\int_{G_1} f(x)\,dx+\int_{G_2} f(x)\,dx.$$

ينتج البرهان مباشرة من التفكيك :

$$\chi_{G_1\cup G_2}(x)=\chi_{G_1}(x)+\chi_{G_2}(x).$$

كما يمكن ان يكون للمجموعتين G_1 و G_2 نفس الجزء المشترك شريطة أن يكون هذا الاخير مجموعة قابلة للإهمال ، بصفة خاصة يمكن ان يكون

لـِ G_1 و G_2، نقاط مشتركة في حافتيها (لكن لا يمكن ان تشتركا في نقاط داخلية). ينتج من ذلك ان حجم المجموعة الجوردانية $G_1 \cup G_2$ **يساوي مجموع حجمي G_1 و G_2 عندما لا تكون لـِ G_1 و G_2 نقاط داخلية مشتركة.**

من البديهي ان القضايا المقدمة اعلاه تظل قائمة من اجل اي عدد (منته) من المجموعات $G_1, \ldots, G_k$، شريطة ان تكون هذه المجموعات غير مشتركة مثنى مثنى في نقاط داخلية.

ج. يمكن في فضاء مشحون نظيمياً (13.3 ـ ج) تعريف تكامل تابع $f(x)$ على مجموعة G بشكل مستقل عن التكامل على كل الفضاء. نسمي **تجزئة جوردانية للمجموعة** G مجموعة مجموعات جوردانية $E_1, \ldots, E_s$ لا تشترك مثنى مثنى في نقاط داخلية وتحقق الشرط $\bigcup_{j=1}^{s} E_j = G$. نشكل، من اجل كل تجزئة جوردانية Π المجموع التكاملي:

$$S_\Pi(f, G) = \sum f(\xi_j) \,|E_j|. \tag{2}$$

حيث ξ_j نقطة من E_j. ليكن $d(\Pi) = \max \operatorname{diam} E_j$.

نظرية. نحتفظ بالافتراضات الخاصة بالتابع. ان التكامل (1) يساوي نهاية المجاميع التكاملية (2) وفق اية متتالية $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ من التجزئات عندما يؤول $d(\Pi_n)$ الى الصفر.

البرهان. إن كل مجموع تكاملي (2) يساوي التكامل على X للتابع $f_\Pi(x)$ المساوي لـِ $f(\xi_j)$ من اجل $x \in E_j$ ولِـ 0 خارج المجموعة G. إن هذا التابع يقبل المكاملة لأنه مستمر خارج Z وحافات كل المجموعات الجوردانية E_j، علما أن اتحاد كل هذه المجموعات مجموعة قابلة للإهمال Z_1 (52.3 ـ ب). لتكن $A_1, \ldots, A_p$ جملة خلايا غير متقاطعة مثنى مثنى تحوي في داخلها المجموعة Z_1، مع العلم ان مجموع قياسات الخلايا أصغر من $\varepsilon/(4M)$، وليكن $P = \bigcup_{i=1}^{p} A_i$. بما ان X فضاء مشحون نظيمياً فإن

P مجموعة جوردانية (23.3 ـ ب)، و $|P| = mP < \varepsilon/(4M)$ إن التابع f(x) مستمر بانتظام خارج كل جوار للمجموعة Z_1 (52.3 ـ أ)؛ من اجل $\varepsilon > 0,$ يوجد $\delta > 0$ بحيث: $\max_{x\in X-P} |f(x) - f_\Pi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2mX}$

وهذا من اجل $d(\Pi) < \delta.$ وبالتالي، بمرعاة ب، يأتي:

$$\left|\int_G f(x)\,dx - S_\Pi(f, G)\right| = \left|\int_X f(x)\,\chi_G(x)\,dx - \int_X f_\Pi(x)\,\chi_G(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\int_P [f(x) - f_\Pi(x)]\,dx\right| + \int_{X-P} |f(x) - f_\Pi(x)|\,\chi_G(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_P |f(x)|\,dx + \int_P |f_\Pi(x)|\,dx + \int_{X-P} |f(x) - f_\Pi(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{4M} M + \frac{\varepsilon}{4M} M + \frac{\varepsilon}{2mX} mX = \varepsilon,$$

ومنه تأتي مقولتنا.

إذا كان التابع f(x) مستمرا على مجموعة جوردانية G، فإن لدنيا مباشرة:

$$(\varepsilon) \quad \left|\int_G f(x)\,dx - S_\Pi(f, G)\right| = \left|\int_G [f(x) - f_\Pi(x)]\,dx\right| \leqslant \omega_f(G, \delta)\,|G|$$

د. يمكن تفسير التعريف ج كما يلي: إن كل مجموعة جوردانية G في فضاء X مشحون نظيمياً فضاء مشحون خلاياه هي اجزاءه الجوردانية (أو تقاطعات الخلايا $A \subset X$ مع المجموعة G)، ينطبق قياس كل خلية مع حجمها. إن كل المسلمات 21.3 أ ـ د قائمة حسب 23.3. إن تكامل تابع f(x) على G بوصفه فضاء مشحونا هو تكامل التابع $f(x)\,\chi_G(x)$ على المجموعة الجوردانية G بمفهوم التعريف أ. في الحالة اليت يكون فيها التابع f(x) معرفا على G فقط، يمكننا اعتباره على كل X بوضع مثلا f(x)=0 من أجل $x \notin G$.

ر. اخيرا يمكن ايجاد تكامل تابع $f(x)$ على مجموعة جوردانية G بالشكل التالي. لتكن $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ متتالية كيفية من التجزئات لمتراص X حيث يؤول $d(\Pi_n)$ يؤول الى الصفر، نرمز بـ $C_1^{(n)}, \ldots, C_{k_n}^{(n)}$ لخلايا التجزئة

Π_n الواقعة في المجموعة G وليكن $\xi_j^{(n)} \in C_j^{(n)}$ نقطة كيفية مختارة. عندئذ تقبل المجاميع

$$\sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^{(n)})\, mC_j^{(n)} \qquad (4)$$

التكامل (1) كنهاية لها لما يؤول n الى ∞.

ذلك ان هذه المجاميع تمثل المجاميع التكاملية للتابع $f(x)\chi_G(x)$ من أجل التجزئة Π_n، حيثما نعلّم في الخلايا $C_j^{(n)}$ النقاط $\xi_j^{(n)}$، وفي الخلايا الاخرى نقاطا لا تنتمي الى G بما ان التابع $f(x)\chi_G(x)$ يقبل المكاملة على X(a) فإن المجاميع (4) تؤول نحو تكامل هذا التابع، أي ـ حسب أ ـ نحو تكامل التابع f(x) على المجموعة G.

س. **الشحنات المتكافئة**. نعتبر على نفس الفضاء المتري X شحنتين، أي نصفي حلقتين $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ مشكلتين على التوالي من الخلايا $A \in \mathfrak{A}$ ذات القياسات mA وmB على التوالي، إذن فإن المسلمات 21.3 أ ـ د محققة في كلتا الحالتين. نقول عن الشحنتين $B \in \mathfrak{B}$ انهما **متكافئتان** إذا كان كل تابع f(x) يقبل المكاملة على الفضاء X المزود بالشحنة يقبل ايضا المكاملة على X المزود بالشحنة $\mathfrak{A}$، والعكس بالعكس، وإذا كان، فضلاً عن ذلك:

$$\int_{X,\mathfrak{A}} f(x)\,dx = \int_{X,\mathfrak{B}} f(x)\,dx. \qquad (5)$$

نشير الى مقياس خاص بتكافؤ شحنتين نظميتين.

نظرية. إذا كانت كل خلية $A \in \mathfrak{A}$ مجموعة جوردانية بالنسبة للشحنة النظيمية $\mathfrak{B}$، واذا كانت كل خلية $B \in \mathfrak{B}$ مجموعة جوردانية بالنسبة للشجنة النظيمية $\mathfrak{A}$، وإذا تحققت العلاقات

$$\mu B = |B|_{\mathfrak{A}} \quad و \quad mA = |A|_{\mathfrak{B}}$$

فإن الشحنتين $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ متكافئتان.

البرهان. يكفي، بفضل التناظر، معالجة الحالة التي يكون فيها التابع $f(x)$ قابلا للمكاملة على الفضاء X المزود بالشحنة $\mathfrak{A}$، ثم استنتاج، ضمن

افتراض النظرية، قابلية $f(x)$ للمكاملة على X المزود بالشحنة $\mathfrak{B}$ وكذا استنتاج المساواة (5). ليكن $f(x)$ تابعا بحق الشرط المعتبر وليكن $\sum f(\xi_j)\mu B_j$ (حيث $(\xi_j \in B_j)$) مجموعه التكاملي بالنسبة للشحنة $\mathfrak{B}$. يمكن وضع هذا المجموع على الشكل $\sum f(\xi_j) \mid B_j \mid_{\mathfrak{A}}$. بتقسيم التجزئة، يؤول المجموع الأخير طبقا لـ ج نحو نهاية مساوية لتكامل $f(x)$ باعتبار الشحنة $\mathfrak{A}$؛ يتبين إذن ان التابع $f(x)$ يقب المكاملة بالنسبة للشحنة $\mathfrak{B}$، وأن تكامليه بالنسبة للشحنتين متطابقان، وهو المطلوب.

ص. **مثال**. كنا زودنا، في 51.3 ـ ب، بلاطة X ذات بعد n بشحنة بواسطة جملة من البلاطات الجزئية

$$A = \{x \in X:\ \alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n\} \tag{6}$$

(حيث يمكن تعويض أي رمز $\leqslant$ بالرمز $<$)، حيث ان قياس كل بلاطة جزئية A يساوي حجم هذه البلاطة vA.

نختار هنا كبلاطة X المكعب ذي البعد n:

$$X = \{x \in R_n:\ -1 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ \ldots,\ -1 \leqslant x_n \leqslant 1\},$$

وكخلايا البلاطات الجزئية ذات الشكل الخاص التالي:

$$B = \left\{x \in X: \frac{p_1}{2^q} \leqslant x_1 \leqslant \frac{s_1}{2^q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{2^q} \leqslant x_n \leqslant \frac{s_n}{2^q}\right\},$$
$$q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad p_1,\ s_1,\ \ldots,\ p_n,\ s_n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$
$$p_j \leqslant s_j \leqslant p_j + 1 \quad (j = 1,\ \ldots,\ n)$$

(حيث يمكن تعويض $\leqslant$ بـ$<$). نرمز لجملة كل البلاطات B بـ $\mathcal{B}$ تمثل البلاطات B اما المكعبات طول اضلاعها $1/2^q$، وما اجزاء حافات هذه المكعبات. اذا غضضنا النظر عن الحافات فإن كل مكعبين من الجملة $\mathfrak{B}$ اما ان يكونا غير متقاطعين واما أن يكون واحد منهما محتويا في الآخر. في الحالة الأخيرة، يمكن الحصول على المكعب الكبير باتمام المكعب الصغير بمكعبات من الجملة $\mathfrak{B}$ أبعادها هي أبعاد المكعب الصغير. ينتج من ذلك أن الجملة $\mathfrak{B}$ نصف حلقه. نضع كما سبق قياس خلية B مساويا لحجمها

. vB وهكذا فإن الجملة $\mathfrak{B}$ تعين شحنة، نود ان نبين بأن الشحنة B تكافىء الشحنة الابتدائية التي نرمز لها بـ.$\mathfrak{A}$

يكفي أن نثبت بأن كل بلاطة جزئية A (راجع (6)) مجموعة جوردانية في الشحنة $\mathfrak{B}$ وأن.$vA = {}_{\mathfrak{B}}|A|$ تأتي النتيجة الاولى من كوْن حافة كل بلاطة A، من اجل كل $\varepsilon > 0$، يمكن بطبيعة الحال تغطيتها بعدد منته من مكعبات الجملة $\mathfrak{B}$ حجمها الكلي أصغر تماما من ε. ثم، باعتبار بلاطة A، يمكن انشاء بلاطتين P وQ بمكعبات الجملة $\mathfrak{B}$. بحيث يكون $P \subset A \subset Q$ ويكون فرق احجام P, A, Q أصغر من ε. إذن، لدينا بفضل 3 .23 ـ جـ:

$$|A|_{\mathfrak{B}} = \sup |P|_{\mathfrak{B}} = \sup vP = vA,$$

وهو المطلوب.

يمكن القيام بانشاء مماثل باعتبار أي مكعب

$$X = \{x \in R_n : |x_1 - a_1| \leqslant d, \ldots, |x_n - a_n| \leqslant d\}$$

وذلك بواسطة خلايا من الشكل:

$$B = \left\{x \in X : \frac{p_1}{2^q} \leqslant \frac{x_1}{d} \leqslant \frac{s_1}{2^q}, \ldots, \frac{p_n}{2^q} \leqslant \frac{x_n}{d} \leqslant \frac{s_n}{2^q}\right\}$$

حيث تحقق القيم $q, p_1, s_1, \ldots, p_n, s_n$ نفس الشروط الواردة أعلاه.

3 .43 . التكامل المكرر.

أ . ليكن X وY فضاءين مشحونين و$X \times Y = W$ جدائهما بالشحنة الواردة في 3 .71 .

لتكن $A \subset X$،و$B \subset Y$ خليتين حافتاهما $\Gamma(A) \subset X$ و$\Gamma(B) \subset Y$ على التوالي، من البديهي ان حافة الخلية $A \times B \subset W$ محتواه في المجموعة $(\Gamma(A) \times B) \cup (A \times \Gamma(B))$ زيادة على ذلك ، إذا وجدت $\Gamma(A)$ داخل اتحاد الخلايا $A_1, \ldots, A_p$، تماما ، و$\Gamma(B)$، داخل اتحاد الخلايا $B_1, \ldots, B_q$، فان $(\Gamma(A) \times B) \cup (A \times \Gamma(B))$ تقع تماما داخل اتحاد

الخلايا :

$$(A_1 \times B) \cup \ldots \cup (A_p \times B) \cup (A \times B_1) \cup \ldots \cup (A \times B_q)$$

علما ان مجموع قياسات هذه الخلايا لا يتجاوز :

$$mA_1mB + \ldots + mA_pmB + mAmB_1 + \ldots + mAmB_q =$$
$$= (\sum_{i=1}^{p} mA_i)\, mB + mA\, (\sum_{j=1}^{q} mB_j).$$

ينتج من ذلك ان الخلية A×B جوردانية عندما تكون الخلايا A وB كذلك . وبالتالي اذا كان X و Y فضاءين مشحونين نظيمياً فإن W=Y×Y فضاء مشحون نظيمياً .

ب . ليكن $f(w) \equiv f(x, y)$ تابعا معرفا ومستمرا بانتظام على مجموعة $U \subset X \times Y$.

نظرية . إذا كانت المجموعة U جوردانية وكانت (من اجل كل $y \in Y$ مثبت) المجموعة $X_y = \{x \in X : x \times y \in U\}$ (« مقطع افقي للمجموعة U ») جوردانية في X ، فإن التابع :

$$F(y) = \int_{X_y} f(x, y)\, dx \qquad (1)$$

يقبل المكاملة بالنسبة لـ y، ولدينا :

$$\int_Y F(y)\, dy = \int_U f(w)\, dw. \qquad (2)$$

البرهان . لتكن Π_X, Π_Y على التوالي تجزئتين للفضاءين X و Y لى خلايا A_i, B_j لا تتجاوز أقطارها δ . عندئذ تشكل الجداءات $A_i \times B_j$ تجزئة لـ $X \times Y$ الى خلايا اقطارها أصغر من $\delta\sqrt{2}$. تكوّن التقاطعات $(A_i \times B_j) \cap U$ تجزئة جوردانية Π للمجموعة U حيث $d(\Pi) \leqslant \delta\sqrt{2}$. وتشكل التقاطعات $A_i \cap X_y$ تجزئة جوردانية Π_y للمجموعة X_y حيث $d(\Pi_y) \leqslant \delta$.

لدينا حسب 33. 3 (3) :

$$\left| \int_{X_y} f(x, y)\, dx - \sum_i f(\xi_i, y)\, m(A_i \cap X_y) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_f(\delta) \mid X_y \mid \leqslant \omega_f(\delta)\, mX.$$

نضع فيما سبق $y = \eta_j \in B_j$ ونضرب في mB_j ثم نجمع وفق j:

$$\left|\sum_j \int_{X_{\eta_j}} f(x, \eta_j)\, dx \cdot mB_j - \sum_j \sum_i f(\xi_i, \eta_j)\, m(A_i \cap X_{\eta_j})\, mB_j\right| \leqslant \omega_f(\delta)\, mXmY.$$

دعنا نهتم في المجموع المزدوج السابق بالحدود التي تضم عناصر $A_i \times B_j$ (هي الخلايا التي تنتمي اليها النقاط $((\xi_i, \eta_j))$) تحوي نقاطا من حافة المجموعة U. بما ان U مجموعة جوردانية فإن مجموع القياسات $\nu(\delta)$ للخلايا المعتبرة نؤول الى الصفر عندما يؤول δ، الى الصفر، وذلك بفضل 42. 3 ـ ج. إذا عوضنا كلاً من الحدود المذكورة بـ $f(\xi_i, \eta_j)\, m[(A_i \times B_j) \cap U]$، فإن تغيّر المجموع يكون $2M\nu(\delta)$، على الاكثر. وبالتالي:

$$(3)\quad \left|\sum_j \int_{X_{\eta_j}} f(x, \eta_j)\, dx \cdot mB_j - \sum_{i,\, j} f(\xi_i, \eta_j)\, m[(A_i \times B_j) \cap U]\right| \leqslant \omega_f(\delta)\, mXmY + 2M\nu(\delta).$$

يمثل الحد الثاني في يسار (3) مجموعا تكامليا نهايته هي الكمية:

$$\int_U f(w)\, dw.$$

وهكذا فان المجموع الاول يقبل نهاية لما $\delta \to 0$، وبما انه مجموع تكاملي للتابع $F(y)$ على الفضاذ المشحون Y، يمكننا القول ان التابع $F(z1)$ يقبل المكاملة وان المساواة (2) قائمة، وبذلك ينتهي البرهان.

يمكن كتابة العلاقة (2) كما يلي

$$(4)\qquad \int_U f(x, y)\, dx\, dy = \int_Y \left\{\int_{X_y} f(x, y)\, dx\right\} dy.$$

يسمى التكامل الوارد في الطرف الايمن **تكاملاً مكرراً** (أو مزدوجا). ترد المساواة (4) حساب التكامل على مجموعة $U \subset W$ الى حساب تكامل مكرر يحوي تكاملا على المجموعة X_y وتكاملا على Y باعتبار كل واحد منها على حدة.

ج. بتعويض X بـ Y في نص النظرية نحصل على النتيجة التالية:

نظرية. اذا كانت كل مجموعة $Y_x = \{y \in Y : x \times y \in U\}$ (« مقطع شاقولي

للمجموعة U ») جوردانية (في Y) ، فان التابع :

$$\Phi(x) = \int_{Y_x} f(x, y)\, dy$$

يقبل المكاملة بالنسبة لِـx ، ولدينا :

$$\int_X \Phi(x)\, dx = \int_U f(w)\, dw.$$

53. 3 . التكاملات المتعلقة بوسيط . نعتبر هنا التكاملات ذات الشكل :

$$\Phi(t) = \int_X f(x, t)\, dx, \qquad (1)$$

حيث X فضاء مشحون وt وسيط يتغير في فضاء متري t.

نفرض ان التابع f(x,t) يقبل المكاملة بالنسبة لِـX من اجل $t \in T$. علينا ان ندرس خاصيات التابع :$\Phi(t)$، ينبغي بادىء ذي بدء تعيين شروط استمرار هذا التابع ثم شروط قابليته للمكاملة وللإشتقاق ضمن الافتراضات الخاصة على الفضاء T.

كنا درسنا الحالة التي يكون فيهاX=[b,c]في 9 .18 ـ 48 .

أ . يمكن البرهان على النظرية المتعلقة باستمرار $\Phi(t)$ باتباع الطريقة الواردة في ي 9 .18 ـ 48 .

نظرية . إذا كان التابع f(x,t) مستمرا بانتظام على الفضاء المتري X×T ، أي إذا آلت الكمية:

$$\omega_f(X \times T, \delta) \equiv \sup_{\substack{\rho(x', x'') \leqslant \delta \\ \rho(t', t'') \leqslant \delta}} |f(x', t') - f(x'', t'')|$$

الى الصفر عندما يؤول δ الى 0 ، فإن التابع $\Phi(t)$ مستمر على الفضاء T.

البرهان: من اجل $0 < \varepsilon$ معطى ، نبحث عن $0 < \delta_0$ بحيث $\delta < \delta_0$ يستلزم العلاقة $\omega_f(X \times T, \delta) < \varepsilon/mX$. ليكن $\rho(t', t'') \leqslant \delta < \delta_0$; عندئذ :

$$|\Phi(t') - \Phi(t'')| = \left| \int_X [f(x, t') - f(x, t'')]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_X |f(x, t') - f(x, t'')|\, dx \leqslant \omega_f(X \times T, \delta)\, mX.$$

ومنه يأتي:

$$\omega_\Phi (T, \delta) \equiv \sup_{\rho (t', t'')<\delta} | \Phi (t') - \Phi (t'') | \leqslant \omega_f (X \times T, \delta)\, mX < \varepsilon,$$

وهو مايبين الاستمرار المنتظم للتابع $\Phi (t)$ على الفضاء T.

ب. نفرض الآن ان الفضاءين X و T مشحونان ونرمز لقياس بـ μ عندئذ يكون التابع $\Phi (t)$، بوصفه تابعا مستمرا بانتظام على فضاء مشحون، قابلا للمكاملة بالنسبة لـ (22.3 ـ ج).

نظرية. نحتفظ بالافتراضات السابقة، عندئذ:

$$\int_T \Phi (t)\, dt \equiv \int_T \left\{ \int_X f (x, t)\, dx \right\} dt = \int_X \left\{ \int_T f (x, t)\, dt \right\} dx. \quad (2)$$

البرهان. إن الفضا $T \times X$ مشحون ايضا ثم ان قياس كل خلية منه $C = A \times B$ يساوي $mA \cdot \mu B$ (71.3). نلاحظ ايضا ان التابع $f (x, t)$ المستمر بانتظام على $T \times X$ يقبل المكاملة على هذا الفضاء (22.3 ـ ج). إذن فإن المساواة (2) لا تعبّر سوى عن قاعدة ردّ تكامل الى تكاملات متكررة وهي القاعدة التي اثبتناها في 43.3 .

ج. نفرض الآن ان الوسيط t بتغير فضاء شعاعي نظيمي T وان التابع $f (x, t)$ يقبل، من اجل كل $x \in X$ ومن اجل $t = t_0$ مشتقا $\frac{\partial f (x, t_0)}{\partial t}$ وذلك بمفهوم 32.1 .

نظرية. اذا كان التابع $\frac{\partial f (x, t)}{\partial t}$ $((X \times T \to X \times L (T))$ مستمرا بالنسبة لـ t عند $t = t_0$، ومستمرا بانتظام بالنسبة لـ $x \in X$، فان التابع $\Phi (t)$ يقبل الاشتقاق ولدينا:

$$\frac{d}{dt} \int_X f (x, t)\, dx \Big|_{t=t_0} = \int_X \frac{\partial f (x, t_0)}{\partial t}\, dx. \quad (3)$$

البرهان: نطبق النشر الناتج من 24.1 ـ د:

$$f (x, t) = f (x, t_0) + \frac{\partial f (x, t_0)}{\partial t} (t - t_0) + \varepsilon (x, t) (t - t_0),$$

حيث

$$\| \varepsilon (x, t) \| \leqslant \varepsilon \equiv \sup_{t_0 \leqslant \theta \leqslant t} \left| \frac{\partial f (x, \theta)}{\partial t} - \frac{\partial f (x, t_0)}{\partial t} \right|.$$

بالمكاملة حداً حداً ، نحصل على :

$$\int_X f(x, t)\, dx = \int_X f(x, t_0)\, dx + (t - t_0) \cdot \int_X \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial t}\, dx + \\ + (t - t_0) \cdot \int_X \varepsilon(x, t)\, dx.$$

بما ان

$$\int_X |\varepsilon(x, t)|\, dx \leqslant \varepsilon m X,$$

وان $\varepsilon \to 0$ لما $|t - t_0| \to 0$ بفضل الاستمرار المنتظم لِـ $\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}$ عند $t = t_0$، فإن التابع $\Phi(t)$ يقبل جزءا خطيا رئيسيا بالنسبة لِـ $t - t_0$ يساوي التكامل الوارد في الطرف الايمن من (3)، علما ان هذا التكامل يؤثر على الشعاع $t - t_0$. ينتمي بذلك البرهان على القضية.

د نتيجة: نحتفظ بالإفتراض جـ من اجل كل اتجاه τ في الفضاء T فإن وجود واستمرار المشتق $\frac{\partial f(x, t)}{\partial \tau}$ يستلزمان قابلية التابع $\Phi(t)$ للإشتقاق وفق الاتجاه τ كما ان لدينا العلاقة :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_X f(x, t)\, dx = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial \tau}\, dx.$$

63. 3 . متتاليات في شكل دلتا . نقول عن نقطة y من فضاء مشحون X انها **نقطة جوردانية** اذا وجدت من اجل كل $\delta > 0$, مجموعة جوردانية U قطرها $\leqslant \delta$ تحوي النقطة y تماما في داخلها . نقول عن متتالية $D_1(x)$, $D_2(x)$, ... من التوابع القابلة للمكاملة غير السالبة **انها متتالية في شكل دلتا من اجل النقطة** y إذا تحقق الشرطان التاليان من اجل كل مجموعة جوردانية U تحوي النقطة y في داخلها تماما :

1) $$\lim_{n \to \infty} \int_U D_n(x)\, dx = 1,$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \int_{X-U} D_n(x)\, dx = 0$$

حينئذ ، إذا كان تابع $f(x)$ مستمرا عند x=y وكانت كل الجداءات $f(x) D_n(x)$ قابلة للمكاملة على الفضاء X ، فإن العلاقة التالية قائمة :

$$\lim_{n \to \infty} \int_X D_n(x) f(x)\, dx = f(y).$$

إن البرهان على القضية السابقة مماثل لبرهان النظرية ي 55. 12 ـ ب ،

حيث يكفي تعويض التابع $D_n(x, y)$ بـ $D_n(x)$ والمجال Q، بالفضاء المشحون X والجوار $U_\delta(y)$ بمجموعة جوردانية U تحوي النقطة y في داخلها تماما، قطرها صغير بشكل يجعل الفرق بين اية قيمة للتابع $f(x)$ على U و $f(y)$ لا يتجاوز عددا $0 < \varepsilon$ معطى.

§ تطبقات في الفضاءات المشحونة

14.3 . أ . ليكن X فضاء مشحونا بنصف حلقة $\mathfrak{A}$ خلاياها A لها قياس mA. نعلم ان القياس تابع للخلايا غير سالب وجمعي. زيادة على القياس توجد توابع اخرى جمعية للخلايا تأخذ قيما اشاراتها مختلفة.

نعبّر على جمعية تابع للخلايا $\Phi(A)$ وجمعية القياس mA بالعلاقة:

$$\Phi(A) = \Phi(A_1) + \ldots + \Phi(A_p) \qquad (1)$$

القائمة كلما كانت خلية A تمثل اتحاد خلايا غير متقاطعة $A_1, \ldots, A_p$. نقول عن تابع $\Phi(A)$ انه **جمعي بقوة** إذا كانت المساواة (1) قائمة من اجل خلايا $A_1, \ldots, A_p$ تقاطعاتها قابلة للإهمال.

نفرض فيما يلي ان $\Phi(A) = 0$ من اجل كل خلية A تحقق $mA = 0$.

ب . نعتبر على سبيل المثال التابع للخلايا التالي:

$$\Phi(A) = \int_A f(x)\, dx, \qquad (2)$$

حيث $f(x)$ تابع مستمر (بانتظام) على فضاء مشحون بانتظام X. تنتج الجمعية القوية لهذا التابع من 33.3 ـ ب. إذا اخذ التابع $f(x)$ قيما مختلفة الاشارة فإن الامر كذلك فيما يخص التابع $\Phi(A)$. إذا كان $mA = 0$، فإن لدينا بطبيعة الحال $\Phi(A) = 0$.

جـ. إذا كان $\Phi_1(A), \Phi_2(A)$ تابعين جمعين (بقوة) فإن كل عبارة خطية $\alpha_1\Phi_1(A) + \alpha_2\Phi_2(A)$ (حيث α_1 و α_2 معاملان حقيقيان) تابع للخلايا وهو، بطبيعة الحال، جمعي (بقوة) ايضاً. وهكذا يتبين ان التوابع الجمعية (بقوة) للخلايا تشكل فضاء شعاعياً.

د . إذا كان $mA > 0$، يسمى الكسر $\Phi(A)/mA$ **القيمة الوسطى** (أو المتوسطة) للتابع $\Phi(A)$ على الخلية A.

3 . 24 . أ . نقول عن متتالية . . $A_1, \ldots, A_s,$ من الخلايا انها **تتقلص** نحو نقطة $y \in X$ لما $s \to \infty$ (ونرمز لذلك بـ $A_s \to y$) إذا وقعت النقطة y داخل كل خلية A_s أو على حافة كل منها وإذا حوت كل كرة متمركزة في y كل هذه الخلايا ابتداء من رقم كيفي.

ب . ليكن $A_s \to y$; إذا كانت لمتتالية الاعداد $\Phi(A_s)/mA_s$ $(mA_s > 0)$ نهاية لا تتعلق باختيار المتتالية A_s حيث $mA_s > 0$ وتتقلص نحو النقطة y فإننا نسمي هذه النهاية **كثافة التابع** $\Phi(A)$ **عند النقطة** y. نشير لكثافة تابع خلايا بنفس الحرف لكننا نكتبه بالشكل الصغير. وهكذا:

$$\varphi(y) = \lim_{A_s \to y} \frac{\Phi(A_s)}{mA_s}$$

جـ . إن المتراجحة 3 .41(7) المطبقة على تابع (2) لخلايا ، وهي:

$$\inf_A f(x) \cdot mA \leqslant \Phi(A) = \int_A f(x)\, dx \leqslant \sup_A f(x) \cdot mA$$

واستمرار $f(x)$ على X يستوجبان ان يكون التابع (2) للخلايا قابلا لكثافة قيمتها عند كل نقطة $y \in X$ هي $f(y)$. زيادة على ذلك ، يتبين من التعريف ذاته ان التابع $\Phi(A)$ يمثل التكامل على الخلية A لكثافة هذا التابع. نلاحظ ان النتيجة الاخيرة ذو طابع عام إذا تعلق الامر بفضاء مشحون نظيمياً وتام X: سنبين في 3 .44 ان كل تابع للخلايا $\Phi(A)$ جمعي (بقوة) وقابل لكثافة $\varphi(x)$ مستمرة (بانتظام) يمكن استخلاصه من كثافته وذلك بالمكاملة على الخلايا.

3 . 34 .أ . توطئة . إذا قبل تابعان $\Phi_1(A)$ و $\Phi_2(A)$ لخلايا ، عند نقطة y ، كثافتين $\varphi_1(y)$ و $\varphi_2(y)$ على التوالي ، فإن التابع $\Phi(A) = \alpha_1\Phi_1(A) + \alpha_2\Phi_2(A)$ لخلايا ، مهما كان العددان الحقيقيان α_1 و α_2 ، يقبل عند النقطة y الكثافة

البرهان: يأتي من العلاقة:

$$\frac{\Phi(A)}{mA}=\alpha_1\frac{\Phi_1(A)}{mA}+\alpha_2\frac{\Phi_2(A)}{mA}$$

عندما ننتقل الى النهاية: $A\to y.$.

ب. توطئة. لتكن $A_1, \ldots, A_p$ تجزئة لخلية A، مع $mA>0$ وفق خلايا غير متقاطعة (تقاطعاتها قابلة للإهمال)، إذا كانت القيمة المتوسطة لتابع جمعي (بقوة) Φ على كل خلية A_j، مع $mA_j>0$، اصغر بالقيمة المطلقة من كمية γ، فإن القيمة المتوسطة للتابع Φ على الخلية A اصغر ايضا من γ بالقيمة المطلقة.

البرهان. ينتج من العلاقات:

$$\frac{|\Phi(A_1)|}{mA_1}\leqslant\gamma, \ldots, \frac{|\Phi(A_p)|}{mA_p}\leqslant\gamma$$

ان $$|\Phi(A_1)|\leqslant\gamma mA_1, \ldots |\Phi(A_p)|\leqslant\gamma mA_p;$$

وهكذا فإن:

$$|\Phi(A)|=|\Phi(A_1)+\ldots+\Phi(A_p)|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma(mA_1+\ldots+mA_p)=\gamma mA$$

ومنه: $$\frac{|\Phi(A)|}{mA}\leqslant\gamma,$$

وهو المطلوب.

ج. توطئة. إذا كانت الكثافة $\varphi(x)$ لتابع لخلايا $\Phi(A)$، جمعي على فضاء تام ومشحون X، مطابقة للصفر فإن التابع $\Phi(A)$ منعدم على كل خلية A.

إن التوطئة قائمة بالضرورة من اجل تابع جمعي بقوة.

البرهان. ليكن $\Phi(A_1)\neq 0$ من اجل خلية $A=A_1$, $mA_1>0$. عندئذ يكون $\gamma=|\Phi(A_1)|/mA_1>0$.

نعتبر تجزئة للخلية A_1 الى خلايا اصغر اقطارها اقل من 1 . يتبين من التوطئة ب انه توجد توطئة من هذا النوع، نرمز لها بِـ A_2، القيمة المتوسطة للتابع Φ عليها اصغر بالطويلة من γ على الاقل. بطريقة مماثلة، نقسم الخلية A_2 الى خلايا اصغر، اقطارها اقل من 1/2، نرمز لها بِـ A_3، القيمة المتوسطة للتابع Φ عليها اصغر بالطويلة من γ ايضا. نواصل القيام بهذه العملية فنحصل على متتالية خلايا اقطارها تؤول الى الصفر، والقيمة المتوسطة للتابع Φ على كل منها تساوي على الاقل γ بالطويلة. إن الفضاء X تام فرضا، توجد حسب ي 47.3 ـ أ نقطة $y \in X$ بحيث تحوى كل كرة متمركزة عند هذه النقطة كل الخلايا $\ldots A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$ ابتداء من رتبة معينة، مع الملاحظة ان النقطة y تنتمي الى ملاصق كل هذه الخلايا. هكذا يتبين ان المتتالية $A_1, \ldots, A_s, \ldots$ تتقلص نحو النقطة y . لدينا فرضان $\lim\limits_{s\to\infty} |\Phi(A_s)| / mA_s = 0;$ حسب الانشاء.

لكن $|\Phi(A_s)| / mA_s \geqslant \gamma > 0.$

يثبت التناقض المحصل عليه انه لا توجد خلية A تحقق $mA > 0$ و $\Phi(A) \neq 0.$ انتهى برهان التوطئة.

44.3 . نظرية. إذا كان تابع جمعي $\Phi(A)$ لخلايا يملك كثافة $\varphi(x)$ مستمرة على X ، فإن لدينا:

$$\Phi(A) = \int_A \varphi(x)\, dx \tag{1}$$

وذلك مهما كانت الخلية A . (من البديهي ان هذه النتيجة تظل قائمة عندما يكون التابع ΦA جمعياً بقوة).

البرهان. نعتبر تابعا لخلايا هو: $\Psi(A) = \int_A \varphi(x)\, dx.$

كنا رأينا في 14.3 ـ ب و24.3 ـ ج ان هذا التابع جمعي وكثافته هي التابع $\varphi(x)$. نلاحظ ان الفرق $\Phi(A) - \Psi(A)$ هو ايضا تابع جمعي لخلايا

(14.3 ـ ج) كثافته منعدمة على كل خليلة A ؛ وهكذا

$$\Phi(A) = \Psi(A) = \int_A \varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

وهو المطلوب اثباته.

54.3 . ليكن $x = \theta(u)$ تطبقا من فضاء مشحون نظيمياً وتام U ، نرمز بـ لقياس خلاياه، في فضاء مشحون نظيمياً وتام X ، نرمز بـ mA لقياس خلاياه.

نفرض ان التطبيق θ وحيد القيمة ومستمر وجورداني، اي يحوّل كل خلية B قياسها موجب من الفضاء U الى مجموعة جوردانية $\theta(B)$ قياسها موجب من الفضاء X ، كما يحوّل كل خليتين B_1 و B_2 بدون نقاط داخلية مشتركة الى مجموعتين جوردانيتين $\theta(B_1)$ و $\theta(B_2)$ على التوالي، بدون نقاط داخلية مشتركة ايضا. نفرض، زيادة عما سبق، ان $\theta(U) = X$. نعرف على الخلايا B من الفضاء U التابع

$$\Phi(B) = m(\theta(B)).$$

(بما ان المجموعة $\theta(B)$ جوردانية على X فإن العدد: $m(\theta(B)) = |\theta(B)|$ معين بطريقة وحيدة.) إن التابع $\Phi(B)$ جمعي بفضل 33.3 ـ د. لنفرض ان لهذا التابع كثافة:

$$\varphi(u) = \lim_{B \to u} \frac{\Phi(B)}{\mu B} = \lim_{B \to u} \frac{m(\theta(B))}{\mu B}$$

مستمرة (بالنسبة لِـ u). يسمى هذا التابع $\varphi(u)$ **معامل عوج القياس** μ للتطبيق θ. يمكن ان نصل كل تابع $f(x)$ مستمر على الفضاء X التابع المستمر $g(u) = f(\theta(u))$ على الفضاء U . باعتبار معامل عوج القياس $\varphi(u)$ للتطبيق θ، يمكننا ربط تكامل $f(x)$ على الفضاء X بتكامل تابع على الفضاء U ؛ بصفة خاصة لدينا الدستور التالي:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_U g(u)\,\varphi(u)\,du. \qquad (1)$$

نتناول البرهان على هذه القضية باعتبار التابع الجمعي للخلايا $B \subset U$

$$\Psi(B) = \int_{\theta(B)} f(x)\,dx.$$

لنبحث عن كثافته. من اجل $\mu B > 0$, لدينا:

$$\frac{\int\limits_{\theta(B)} f(x)\,dx}{\mu B} = \frac{\int\limits_{\theta(B)} f(x)\,dx}{m(\theta(B))} \cdot \frac{m(\theta(B))}{\mu B} \qquad (2)$$

نفرض ان الخلية B تتقلص نحو النقطة u. بما ان التطبيق θ مستمر، فإن المجموعة الجوردانية $\theta(B)$ تتقلص نحو النقطة $x = \theta(u)$. بما ان التابع $f(x)$ مستمر، فإن الكسر الاول في الطرف الايمن من (2) يؤول الى النهاية $f(x)$. اما الكسر الثاني فيقبل فرضاً، النهاية $\varphi(u)$. وهكذا فإن التابع $\Psi(B)$ يقبل كثافة مساوية لِـ $f(x)\varphi(u) = g(u)\varphi(u)$ مستمرة على U يتبين من النظرية 3. 44، من اجل كل خلية في الفضاء U، بصفة خاصة على الفضاء U نفسه، اننا نستطيع كتابة الدستور المعبر عن تابع الخلايا بدلالة كثافته:

$$\Psi(U) = \int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_U g(u)\,\varphi(u)\,du,$$

وهو المطلوب.

§ 3 .5 . تكامل ريمان في فضاء اقليدي

3 .15 ـ أ. لتكن البلاطة:

$$X = \{x \in R_n :\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

كنا عينا بنية فضاء مشحون (3 .51 ـ ب) باختبار قياسي كل خليه:

$$A = \{x \in X :\ \alpha_1 \leqslant x_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n\}$$

مساويا لحجمها الاقليدي $|A| = \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$. يصدق هذا القول ايضا على الخلايا المحصل عليها انطلاقا من الخلايا السابقة وذلك بتعويض بعض الرموز $\leqslant$ بِـ $<$، اي بأن نطرح من A بعض اجزاء حافتها.

ب. تكون مجموعة Z قابلة للإهمال في X (3 .42 ـ ر) إذا كانت، من اجل كل $\varepsilon > 0$، محتواه في اتحاد منته من خلايا (1) غير متقاطعة مجموع احجامها $\leqslant \varepsilon$. إن حافة كل خلية مجموعة قابلة للإهمال لأن (مثلا) المستوى $x_j = \gamma$، من اجل كل $\varepsilon > 0$ وكل $C > 0$، يوجد تماما في داخل الخلية

$$\{x \in R_n:\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ \ldots,\ \gamma - C\varepsilon \leqslant x_j \leqslant \gamma + C\varepsilon,\ \ldots,\ a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

التي يساوي حجمها $(b_1 - a_1) \ldots 2C\varepsilon \ldots (b_n - a_n)$، وبالتالي يمكن جعل هذا الحجم بواسطة اختبار لائق للثابت C. وهكذا يتبين ان الفضاء X مشحون نظيمياً (13.3 ـ ج). ينتج حسب 13.3 ـ ر، انه إذا عرفنا مجموعة قابلة للإهمال Z فإننا نستطيع اعتبار اية تغطيات لِـ Z بخلايا قياسها الكلي $\leqslant \varepsilon$، وليس فقط التغطيات التي تحوي Z في داخلها تماما.

جـ . لنثبت ان كل جزء من X معرف بمعادلة من الشكل:

$$x_i = \varphi(x'),\ x' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

حيث φ تابع مستمر معطى على بلاطة

$$B' = \{x \in R_{n-1}:\ a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, \ldots, a_{i-1} \leqslant x_{i-1} \leqslant b_{i-1},\ a_{i+1} \leqslant x_{i+1} \leqslant b_{i+1}, \ldots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n\}$$

أو على جزء متراص كيفي K' منها، مجموعة قابلة للإهمال في X.

ليكن $\varepsilon > 0$ كيفياً، وبمراعاة الاستمرار المنتظم للتابع φ على K'، نبحث عن $\delta > 0$ بحيث $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leqslant \varepsilon$ عندما يكون $|x' - y'| \leqslant \delta,\ x' \in K'\ y' \in K'$. نقسم البلاطة B' الى خلايا A'_j، حيث $d(A'_j) \leqslant \delta$.

نختار في كل مجموعة غير خالية $A'_j \cap K'$ بشكل كيفي نقطة ξ_j ونعتبر في R_n البلاطة

$$B_j = \{x \in R_n:\ \varphi(\xi_j) - \varepsilon \leqslant x_i \leqslant \varphi(\xi_j) + \varepsilon,\ x' \in A'_j\}.$$

ينتج من تعريف العدد δ ان كل نقطة من هذا السطح التي تسقط على A'_j نقطة تنتمي الى البلاطة B_j. وبالتالي فإن هذا السطح ينتمي الى اتحاد كل البلاطات B_j. ثم إن مجموع قياسات هذه البلاطات لا يتجاوز $\sum mA'_j \leqslant 2\varepsilon mB' 2\varepsilon$ بما ان ε كيفي فإن ذلك يثبت القضية.

د . إن الصورة الهندسية في X المقابلة للتمثيل الوسيطي:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(u_1, \ldots, u_k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = f_n(u_1, \ldots, u_k) \end{array}\right\} (u_1, \ldots, u_k) = u \in U \subset R_k;\quad k < n, \tag{2}$$

حيث U جزء متراص في R_n و$f_1(u), \ldots, f_n(u)$ توابع لها في الساحة U مشتقات أولي مستمرة، مجموعة قابلة للاهمال. بالفعل، يتبين من نظرية المرتبة 47.1 ـ ب، ان كل نقطة $u \in U$ تقبل جوارا تكون فيه المعادلات (2) مكافئة لمعادلة او معادلات من الشكل (1)، إذن فهي تعرّف مجموعة قابلة للإهمال في R_n. نرى بتطبيق النظرية الخاصة بالتغطية المنتهية ان الصورة في R_n لكل المتراص U مجموعة قابلة للإهمال. ينتهي بذلك البرهان على القضية.

ر. ينتج من جـ ان كل مجموعة $G \subset X \subset R_n$ معرفة بمتراجحات من الشكل

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant x_i \leqslant \psi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \; i =$$

حيث $1, \ldots, n$ (مع امكانية تعويض بعض الرموز ≽بـ>) مجموعة جوردانية في X، وبالتالي تملك حجما نرمز له، كما ورد اعلاه، بـ $|G|$ إن الحجم $|G|$ لا يتعلق باختيار البلاطة $X \subset R_n$ المحتواه في المجموعة G؛ لهذا السبب نسمي الكمية $|G|$ حجم المجموعة G في الفضاء R_n في البعد n.

س. نورد هنا بعض الخاصيات الاولية للاحجام في R_n. إذا كانت مجموعة $G \subset R_n$ لها حجم، فإن كل انسحاب a $G + a, a \in R_n$ له نفس الحجم. ينتج ذلك من كوْن الخلايا في R_n التي نستخدمها في قياس الأحجام (البلاطات) لا يتغير حجمها اثر اي انسحاب.

إذا كانت $E \subset R_n$ مجموعة و λ عددا موجبا، نرمز بـ λE لصورة E بتحاك نسبة λ ومركزه في مصدر الاحداثيات. إذا كانت G مجموعة جوردانية فإن λG مجموعة جوردانية ايضا، كما ان حجمي هاتين المجموعتين مرتبطان بالعلاقة $|\lambda G| = \lambda^n |G|$ لأن هذه العلاقة قائمة من اجل كل بلاطة.

بدمج تحاك وانسحاب نحصل على العلاقة

$$|\lambda(G + a)| = |\lambda G + a| = \lambda^n |G|\,^*$$

(*) إذا كانت الخلايا المتوفرة تسمح بالقيام ليس بكل الإنسحابات والتحاكيات بل فقط بتلك المعنية، مثلا، بالقيم الناطقة للوسيطين a وλ، فإن العلاقة الواردة تنتج بواسطة انتقال اضافي الى النهاية.

هناك صعوبة اكبر في البرهان على ان المجموعات الجوردانية لا تتغير احجامها عند القيام بتحويل عمودي (الدوران)؛ سنرى ذلك في ر. إن الاستدلال السابق لا يشمل مباشرة هذه الحالة لان صورة بلاطة، اي متوازي سطوح مستطيل اضلاعه موازية لمحاور الإحداثيات، بواسطة دوران لم تعد بلاطة.

ص. توطئة. إن المكعب المحصل عليه بتحويل عمودي لبلاطة مكعبة، Q ضلعها 1 (وبالتالي حجمها يساوي 1) له حجم يساوي ايضا 1.

البرهان. لتكن S كرة مركزها في مصدر الاحداثيات وحجمها يساوي 1؛ من اجل $\varepsilon > 0$ معطى ومن اجل h صغير بكفاية، يمكن الاشارة الى مجموعة T مؤلفة من N(h)=N بلاطات مكعبة اضلاعها تساوي h بدون نقاط داخلية مشتركة بحيث تكون كل هذه البلاطات محتواة في داخل الكرة $S(1+\varepsilon)$ وتحوي هي نفسها الكرة $S(1-\varepsilon)$ إن حجم T محصور بين احجام الكرات:

$$(1-\varepsilon)^n \leqslant h^n N(h) \leqslant (1+\varepsilon)^n \quad (3)$$

نجري تحويلا عموديا τ للفضاء فيصبح المكعب Q هو المكعب الذي نرمز لحجمه بـ v. إن البلاطات المكعبة التي اضلاعها h والتي تشكل المجموعة T تصبح مكعبات متحاكية مع المكعب τQ، ونسبة هذا التحاكي هي h، ثم يتبين من س ان احجامها هي $h^n v$. تتحول الكرتان $S(1-\varepsilon)$ و $S(1+\varepsilon)$ الى نفس الكرتين. اما T فتتحول الى مجموعة τT مؤلفة من مكعبات عددها N(h) ايضا واضلاعها h وبدون نقاط داخلية مشتركة. ستكون هذه المجموعة محتواه في الكرة $S(1+\varepsilon)$ وتحوي الكرة $S(1-\varepsilon)$. كما أن حجم هذه المجموعة هو $N(h) \cdot h^n v$ المحصور ايضا بين احجام الكرات:

$$(1-\varepsilon)^n \leqslant N(h)\, h^n v \leqslant (1+\varepsilon)^n. \quad (4)$$

ينتج من (3) (4) ان لدينا

$$\frac{(1-\varepsilon)^n}{(1+\varepsilon)^n} \leqslant v \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^n}{(1-\varepsilon)^n}$$

بما ان $0 < \varepsilon$ كيفي فإن $v=1$، وهو المطلوب.

ط. توطئة. إن حجم متوازي اضلاع مستطيل لا يتغير عند القيام بتحويل عمودي.

البرهان. إذا كانت اطوال اضلاع متوازي اضلاع مستطيل قابلة للقياس، فإنه يمكن ان يكون مشكلا بمكعبات، وبالتالي تأتي نتيجة التوطئة من التوطئة ص (ومن 33.3 ـ ب). اما إذا كان الامر غير ذلك فيمكننا تعويض متوازي الاضلاع بالدقة التي نريد (بمفهوم اطوال الاضلاع، وبالتالي بمفهوم الحجم) بمتوازي اضلاع اطوال اضلاعه قابلة للقياس، وهو ما يثبت التوطئة.

ع. نظرية. إن الحجم $|G|$ المجموعة جوردانية $G \subset R_n$ لا يتغير عند القيام بتحويل عمودي.

البرهان. من اجل $0 < \varepsilon$ معطى، نبحث عن مجموعتين $G_\varepsilon^- \subset G,\ G_\varepsilon^+ \supset G$ مؤلفتين من بلاطات بدون نقاط داخلية مشتركة بحيث يكون

$$|G| - \varepsilon \leqslant |G_\varepsilon^-| \leqslant |G| \leqslant |G_\varepsilon^+| \leqslant |G| + \varepsilon. \quad (5)$$

إن صور المجموعات $G_\varepsilon^- \subset G \subset G_\varepsilon^+$ بواسطة تحويل عمودي τ هي على التوالي $\tau G_\varepsilon^- \subset \tau G \subset \tau G_\varepsilon^+$، وبمراعاة التوطئة ط (و33.3 ـ ب) يأتي $|\tau G_\varepsilon^+| = |G_\varepsilon^+|,\ |\tau G_\varepsilon^-| = |G_\varepsilon^-|$ وبالتالي:

$$|G| - \varepsilon \leqslant |G_\varepsilon^-| = |\tau G_\varepsilon^-| \leqslant |\tau G| \leqslant |\tau G_\varepsilon^+| = |G_\varepsilon^+| \leqslant |G| + \varepsilon. \quad (6)$$

ينتج من (6) ان $||\tau G| - |G|| \leqslant \varepsilon$ ابما ان $0 < \varepsilon$ كيفي فإن لدينا $|\tau G| = |G|,$ ، وهو المطلوب.

ف. تبرز التوطئة الموالية مميزات مجموعة قابلة للإهمال في R_n بدلالة القياس والمسافة.

توطئة. لتكن Z مجموعة قابلة للإهمال في بلاطة $X \subset R_n$ من اجل كل

$\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ يمكننا ايجاد مجموعة اولية $X \subset B$ قياسها $\varepsilon \geqslant$ تحوي المجموعة Z تماما في داخلها، وهي نفسها محتواه في δ الجوار لِـ Z.

البرهان. يتبين من التعريف انه توجد، من اجل $\varepsilon > 0$ معطى مجموعة اولية $X \subset I'$ تحوي المجموعة Z تماما في داخلها وقياسها $\varepsilon \geqslant$. تمثل هذه المجموعة الاولية P اتحادا منتهيا لبعض البلاطات التي يمكن اختيارها مغلقة؛ إذن فإن P مغلقة ايضا. نرمز بِـS لجزء P المؤلف من النقاط x التي تبعد عن Z بمسافة $\delta \geqslant$. إن المجموعة S مغلقة. ثم إن كل نقطة $x \in S$ تنتمي الى خلية (مفتوحة) قطرها $\delta/2 >$؛ تشكل كل هذه الخلايا تغطية لِـS ويمكننا ان نستخرج منها تغطية منتهية لِـS. يُمثل اتحاد كل خلايا التغطية المنتهية مجموعة أولية Q. كما ان الفرق $B = P - QP$ يمثل ايضا مجموعة أولية؛ إنه يحوي Z تماما في داخله ولا يحوي اية نقطة من المجموعة S، أي انه محتو في S ـ الجوار للمجموعة Z، وهو المطلوب.

25.3 ـ أ. إننا عرفنا أحجام المجموعات الجوردانية ذات البعد n في R_n. لنعتبر فضاء جزئيا R_k بعده k في R_n. يمكننا تزيده بالجداء السلمي المأخوذ عن الفضاء R_n وانشاء اساس عمودي؛ $g_1, \ldots, g_k$؛ ثم باستخدام بلاطات اضلاعها موازية للأشعة $g_1, \ldots, g_k$ نستطيع ايجاد بنية فضاء مشحون وقياس الأحجام كما ورد في 15.3 (من اجل k=n). لنتفق على الاشارة بِـ $|G|_k$ لحجم مجموعة جوردانية $G \subset R_k$. يتبين من 15.3 ـ ع ان العدد $|G|_k$ لا يتعلق باختيار الاساس العمودي $g_1, \ldots, g_k$، لأن كل اساس آخر يُحصل عليه من الاساس السابق بواسطة تحويل عمودي، وهو تحويل يحتفظ، كما رأينا، باحجام المجموعات الجوردانية. تمكننا هذه النتيجة برد تكامل مضاعف n مرة الى تكاملات لها تضاعف اصغر من n. تستخدم هذه النتيجة مثلا في نظريات الهندسة الاولية الخاصة بحساب احجام بعض الاجسام وذلك بضرب الارتفاع في مساحة القاعدة (قاعدة الجسم).

ب. نعتبر ساحة محدودة $G \subset R_n$ تتكون حافتها من عدد منته من السطوح معادلاتها تكتب على الشكل $x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ حيث φ_i توابع مستمرة للمتغيرات المستقلة. تمثل هذه المجموعة مجموعة جوردانية (15.3 ـ ر) تصدق عليها طريقة المكاملة الواردة في 33.3. إن المسقط E للساحة G على مستوى الاحداثيات $x_1, \ldots, x_{n-1}$ هو ايضا مجموعة جوردانية (في R_{n-1}) (لأن كل نقطة من الساحة E هي مسقط نقطة من حافة G) (لأن كل نقطة من الساحة E هي مسقط نقطة من حافة E، وحافة G ايضا، تقبل تفكيكا الى عدد منته من الاجزاء، كل جزء منه تصفه معادلة محلولة بالنسبة لإحداثية (يجب وضع $x_n = 0$).

نعتبر المسقط E للساحة G كفضاء مشحون X' (في الفضاء R_{n-1}) بالخلايا الموافقه له، يقع مسقط الساحة G على محور العناصر x_n على قطعة مستقيمة نعتبرها كفضاء مشحون X' بالخلايا المعتادة (اي المجالات). إن المجموعة G محتواه في الجداء الديكارتي $X' \times X''$؛ إذا حولنا هذا الجداء الى فضاء مشحون حسب 71.3 فإن خلاياه تحتفظ بنفس القياس المحصل عليه في الفضا R_n.

ج. إن المقاطع الشاقولية للمجموعة $G \subset X' \times X''$ لها عموما شكل معقد. نفرض مؤقتا ان كل مستقيم مواز لمحور العناصر x_n ومار بـG يخرق الساحة G وفق قطعة مستقيمة وحيدة معينة مثلا بمتراجحات من الشكل:

$$\varphi(x') \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \psi(x')$$
$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

(وقد تنحل عند نقطة) [راجع الرسم 5.3 ـ 1].

نظرية. تحتفظ بالافتراضات السابقة. لدينا من اجل كل تابع $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ مستمر في الساحة G، العلاقة

$$\int_G f(x)\, dx = \int_E \left\{ \int_{x_n=\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})}^{\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, dx_n \right\} dx'. \quad (1)$$

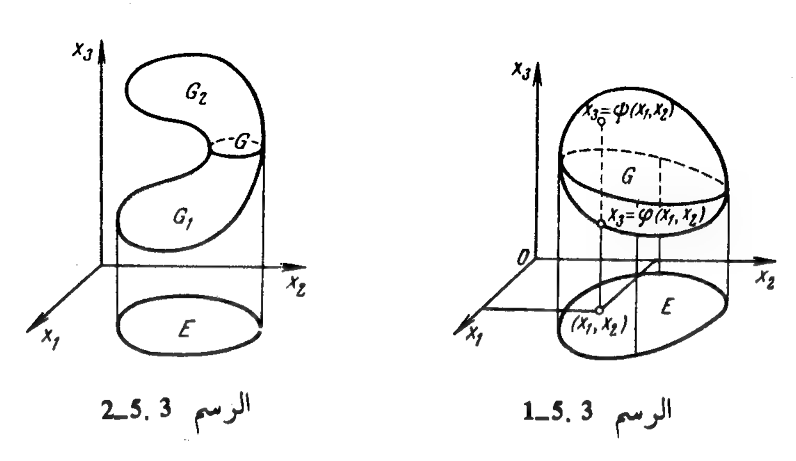
تسمح هذه العلاقة برد تكامل على ساحة ذات بعد n الى تكامل على ساحة ذات بعد n_1 متبوع بتكامل وحيد البعد.

للبرهان على هذه النظرية يكفي ان نضع في النظرية العامة 43.3 ـ ج

$Y = [a_n, b_n], \quad Y_x = \{x_n \in R_1 : \varphi(x') \leqslant x_n \leqslant \psi(x')\} \quad U = G$، $X = E$،

والواقع اننا تأكدنا من توفر كل الشروط اللازمة لذلك.

د. إذا كانت الساحة G من شكل اكثر تعقيداً (بعض المستقيمات الموازية لمحور الاحداثيات x_n والمارة بـG تخرق G وفق اكثر من قطعة مستقيمة واحدة) وتمكنا من تفكيكها الى عدد منته من الساحات .. $G_1, G_2,$ ذات الشكل المعتبر اعلاه والتي لا تملك نقاطا مشتركة الّا على الحافة (راجع الرسم 5.3 ـ 2) فإن التكامل على الساحة G يمكن كتابته على شكل مجموع تكاملات على ساحات بسيطة، ونستطيع تطبيق على كل من هذه التكاملات طريقة الحساب الواردة اعلاه.



الرسم 3 .5_2 الرسم 3 .5_1

35.3. امثلة.

أ. نعتبر الحالة التي يكون فيها n=2. تسمح النظرية 25.3 ـ ج عندئذ بالتعبير عن التكامل على ساحة مزدوجة البعد G (الرسم 5.3 ـ 3) بواسطة تكاملين بسيطين:

$$(1)\qquad \int\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{x=a}^{b} \left\{ \int\limits_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,\ y)\,dy \right\} dx.$$

إذا كاملنا على مستطيل اضلاعه موازية لمحاور الاحداثيات (الرسم 5.3 ـ 4) فإن حديْ التكامل الداخلي ثابتان : ; $\varphi(x) = \alpha,\ \psi(x) = \beta$ بالتالي

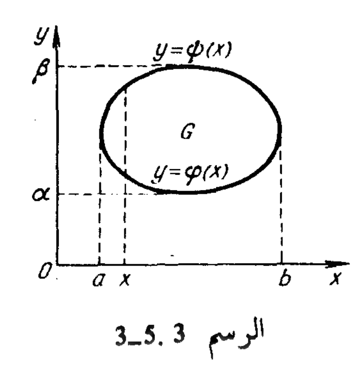
$$\int\limits_G f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_{x=a}^{b} \left\{ \int\limits_{y=\alpha}^{\beta} f(x,\ y)\,dy \right\} dx.$$

وهكذا عندما يكون

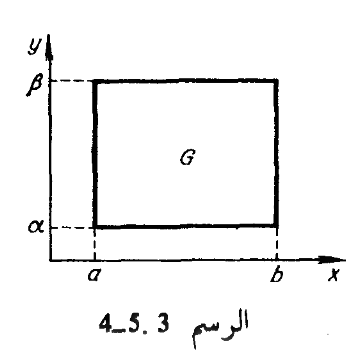
$$G = \{ x,\ y:\ 3 \leqslant x \leqslant 4,\ 1 \leqslant y \leqslant 2 \},\ f(x,\ y) = \frac{1}{(x+y)^2},$$

$$\int\limits_G \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int\limits_{x=3}^{4} \left\{ \int\limits_{y=1}^{2} \frac{\partial y}{(x+y)^2} \right\} dx = \int\limits_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$[\ln(x+1) - \ln(x+2)]\,|_3^4 = \ln\frac{5\cdot 5}{6\cdot 4} = \ln\frac{25}{24}$$



الرسم 3.5 ـ 3



الرسم 3.5 ـ 4

ب . إذا كانت الساحة G ليست مستطيلا اضلاعه موازية لمحاور الاحداثيات، فيجب ان نأخذ بعين الاعتبار تعلق حديْ التكامل الداخلي بـ x.

نحسب على سبيل المثال تكامل التابع $f(x,\ y) = x^2/y^2$ على الساحة G المحصورة بين المستقيمين x=2 و $y = x$ والقطع الزائدي $xy = 1$ (الرسم 5.3 ـ 5). إن مسقط الساحة G على محور العناصر x يطابق المجال [1,2] . عند تثبيت عنصر x على هذا المجال فإن المستقيم الموازي لمحور

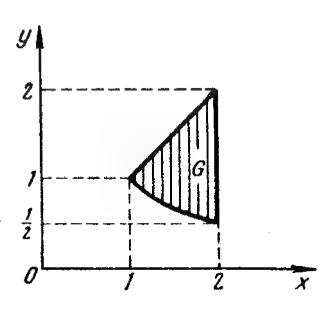
العناصر y يقطع الساحة G وفق المجال $1/x \leqslant y \leqslant x$.

يتبين من الدستور (1) ان لدينا:

$$\int_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy\right\}dx =$$

$$\int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{x}dx = \int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}$$



الرسم3 .5 ـ 5

نلاحظ، باستنتاج الدستور 25.3 (1)، إنه كان بالامكان اجراء المكاملة الداخلية، ليس بالنسبة للإحداثية x_n، بل بالنسبة لأية احداثية اخرى من بين $x_1, \ldots, x_{n-1}$. إن اختيار ترتيب المكاملة، الذي هو بدون اهمية من الناحية النظرية، يمكن ان يلعب دورا كبيرا في تسهيل او تعقيد الحسابات.

لو شرعنا في المثال السابق بتثبيت y بدل x فإن المستقيم الافقي الموافق لذلك يقطع الساحة G وفق المجال $\frac{1}{y} \leqslant x \leqslant 2$ من اجل $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$، و $y \leqslant x \leqslant 2$ من اجل $1 \leqslant y \leqslant 2$؛ وبالتالي تأخذ الحسابات الشكل التالي:

$$\int_G \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_{y=\frac{1}{2}}^{1} \left\{ \int_{x=\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right\} dy +$$

$$+ \int_{y=1}^{2} \left\{ \int_{x=y}^{2} \frac{x^2}{y^2}\,dx \right\} dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=\frac{1}{y}}^{2} dy +$$

$$+ \int_{1}^{2} \frac{1}{y^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{x=y}^{2} dy = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{y^2}\left(8-\frac{1}{y^3}\right) dy +$$

$$+ \frac{1}{3}\int_{1}^{2} \frac{1}{y^2}(8-y^3)\,dy = \frac{1}{3}\left(-\frac{8}{y}+\frac{1}{4y^4}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(-\frac{8}{y}-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{17}{12}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}$$

ج. تقدم الآن مثالا في حساب تكامل مضاعف ثلاث مرات وذلك برده الى عدة تكاملات وحيدة البعد. لنحسب التكامل:

$$\int_G \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$$

حيث تمثل الساحة G رباعي وجوه محصورا بين المستويات $x = 0,$ ، $y = 0,$ ، $z = 0,$ ، $x + y + z = 1$ (الرسم 3 .5 ـ 6).

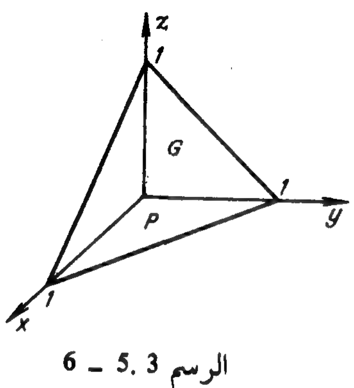
إن المسقط P لرباعي الوجوه G على المستوى x, y يمثل مثلثا يقع في هـذا المستـوى، وهـو محصـور بين المستقيمات $x = 0,$ ، $y = 0,$ ، $x + y = 1.$. إن المستقيم الشاقولي المار بنقطة ثابتة (x, y) يقطع الساحة G وفق المجال $0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y$. لدينا إذن، حسب الدستو (1):

$$\int_G \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3} = \int_P \left\{ \int_{z=0}^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right\} dx\,dy.$$

لنحسب التكامل الداخلي:

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big|_{z=1-x-y}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right)$$



الرسم 3 .5 ـ 6

علينا ان نكامل التابع المحصل عليه، والمتعلق بالمتغيرين x و y، على الساحة P. إن مسقط P على محور العناصر x هو المجال $0 \leqslant x \leqslant 1$. نثبّت x على هذا المجال؛ فنلاحظ أن المستقيم الموافق لذلك والموازي لمحور العناصر y يقطع لمجال $0 \leqslant y \leqslant 1 - x$. وبالتالي

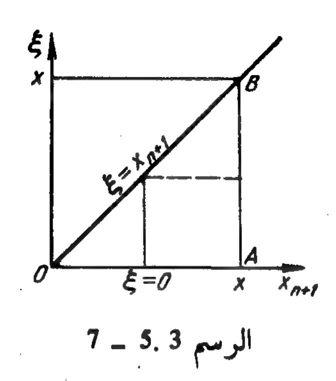
$$\int_P \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \left\{ \int_{y=0}^{1-x} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dy \right\} dx =$$
$$\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$$

د . تكامل ديركليت. لنثبت دستور ديركليت:

$$\int_{x_n=0}^{x} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi$$

الذي يرد تكاملا مضاعفا n مرة وغير محدد لتابع ذي متغير واحد الى تكامل بسيط. من اجل n=1 فإن الدستور يأتي مباشرة. لنفرض صحته من اجل عدد طبيعي n ولنثبته من اجل الرتبة n+1. من اجل ذلك نحسب التكامل:

$$I = \int_{x_{n+1}=0}^{x} \left\{ \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\xi=0}^{x_{n+1}} (x_{n+1}-\xi)^{n-1} f(\xi)\, d\xi \right\} dx_{n+1}.$$



الرسم 3 .5 ـ 7

يجري التكامل الخارجي بالنسبة للمتغير x_{n+1}، من 0 الى x (الرسم 3 .5 ـ 7). اما التكامل الداخلي، من اجل x_{n+1} مثبت، فيجرى بالنسبة للمتغير ξ من 0 الى x_{n+1}. نصل في آخر المطاف الى تكامل على داخل المثلث OAB. لنرد هذا التكامل الى تكاملين بسيطين شريطة ان يجرى التكامل الخارجي بالنسبة للمتغير ξ، الذي يتغير من 0 الى x وان يجرى التكامل الداخلي، بالنسبة لِـ x_{n+1}، علما أن x_{n+1} يتغير في حدود المثلث OAB من $x_{n+1} = \xi$ الى $xnt = x$، حيث ξ، مثبت، وهكذا نكتب:

$$I = \int_{\xi=0}^{x} \left\{ \int_{x_{n+1}=\xi}^{x} \frac{1}{\Gamma(n)} f(\xi)(x_{n+1}-\xi)^{n-1} dx_{n+1} \right\} d\xi =$$

$$\frac{1}{\Gamma(n)} \int_{\xi=0}^{x} f(\xi) \left\{ \int_{x_{n+1}=\xi}^{x} (x_{n+1}-\xi)^{n-1} dx_{n+1} \right\} d\xi.$$

يعطي حساب التكامل الداخلي:

$$\int_{x_{n+1}=\xi}^{x} (x_{n+1}-\xi)^{n-1} dx_{n+1} = \frac{(x_{n+1}-\xi)^n}{n} \Big|_{x_{n+1}=\xi}^{x} = \frac{(x-\xi)^n}{n}$$

إذن:

$$I = \frac{1}{n\Gamma(n)} \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^n d\xi = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^n d\xi$$

وهو المطلوب.

3 .45 ـ أ. مبدأ كافاليري (Cavalieri). إذا استخدمنا «المقاطع الافقية» لمجموعة جوردانية G فإننا نستطيع الوصول الى طريقة اخرى في تحويل تكامل مضاعف n مرة الى تكامل مضاعف n_1 مرة وتكامل بسيط.

لنفرض ان الساحة G في 3 .25 ـ ب تتمتع بالشرط التالي: المسقط على E لتقاطع G مع كل مستو   (نرمز لهذا التقاطع بِـ   ) جزء جورداني من المجموعة الجوردانية E (الرسم 3 .5 ـ 8). عندئذ يعطي الدستور 3 .43 (4) العلاقة:

$$\int_G f(x)\,dx = \int_Y \left\{ \int_{E_y} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)\,dx_1 \ldots dx_{n-1} \right\} dy,$$

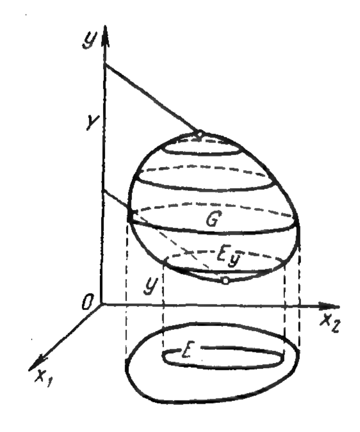
حيث يمثل Y مسقط الساحة G على محور العناصر x_n.

يمتد التكامل الداخلي على المقطع E_y. بصفة خاصة نحصل من اجل $f(x) \equiv 1$ على شرط كاف يضمن المساواة بين حجمي جسمين (وهو الشرط المقدم من طرف كافالييري):

إذا كان لجسمين $G^{(1)}$ و $G^{(2)}$، من اجل كل y، مقطعان $E_y^{(1)}$ و $E_y^{(2)}$ من نفس المساحة فإن حجمي هذين الجسمين متساويان.

يكون الوضع في غاية البساطة إذا كانت كل المقاطع من نفس المساحة . لدينا في تلك الحالة:

$$|G| = \int_G 1 \cdot dx = SmY.$$



الرسم 3 .5 ـ 8

ب. المستوى الموازن ومركز الثقل. ليكن ω مستويا في الفضاء R_3 ؛ نزود احد نصفي الفضاء اللذين يعرفهما هذا المستوى باشارة + والآخر باشارة - وذلك بشكل كيفي. يسمى في الميكانيكا، من اجل نقطة مادية $M(x, y, z) \in R_3$ تحمل كتلة m، جراء m في المسافة $\rho(M, \omega)$ التي تفصل النقطة M عن المستوى ω، والمزود بالاشارة $\varepsilon(M)$ المزود بها نصف الفضاء الذي تنتمي له النقطة M يسمى هذا الجداء **عزم سكون النقطة M بالنسبة للمستوى** ω. باعتبار جسم $G \subset R_3$ كثافة كتلته $\mu(M)$ [*]، فإننا نسمي **عزم السكون بالنسبة للمستوى** الكمية:

$$P(G, \omega) = \iiint_G \varepsilon(M)\rho(M, \omega)\mu(M)\,dx\,dy\,dz. \quad (1)$$

نقول عن المستوى ω إنه **موازن لجسم** G اذا تحققت العلاقة:

$$P(G, \omega) = 0.$$

ليكن G جسما معطى، لنبحث عن المستوى الموازن ω لـ G على الشكل $z = z_0$. من اجل نقطة $M(x, y, z)$ ومن اجل أي مستو $z = z_0$، إذا زودنا نصف المستوى $z > z_0$ بالاشارة + فإن لدينا: $\varepsilon(M)\rho(M, \omega) = z - z_0$، بحيث ان:

$$P(G, \omega) = \iiint_G (z - z_0)\mu(M)\,dx\,dy\,dz.$$

باعدام هذه الكمية نحصل فيما يتعلق بـ على المعادلة:

$$\iiint_G \mu z\,dx\,dy\,dz = z_0 \iiint_G \mu\,dx\,dy\,dz,$$

(*) من وجهة النظر الرياضية فإن الكتلة $m(Q)$ المحتواه في ساحة Q تابع جمعي خاص للساحة Q، اما الكثافة $\mu(M)$ للكتلة $m(Q)$ فهي كثافة هذا التابع الجمعي بالمفهوم الوارد في 24.3 ـ ب:

$$\mu(M) = \lim_{Q \to m} \frac{m(Q)}{|Q|}$$

يتبين من النظرية 44.3 أن الكتلة $m(Q)$ يعبرّ عنها بدلالة كثافتها $\mu(m)$، شرط ان تكون هذه الأخيرة مستمرة، وذلك وفق الدستور:

$$m(Q) = \int_G \mu(M)\,d_V$$

ومنه يأتي:

$$z_0 = \frac{\iiint_G \mu z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \mu \, dx \, dy \, dz}.$$

إن الكمية $\iiint_G \mu \, dx \, dy \, dz$ هي الكتلة الكلية للجسم . نفرض دائما انها موجبة.

نرى على وجه الخصوص انه يوجد في جماعة المستويات المتوازنة $z =$ ثابتا ، مستو موازن وحيد. بطريقة مماثلة، يمكننا ايجاد مستو موازن في كل جماعة مستويات متوازنة اخرى. هناك مثلا ، المستويان الموازنان $x = x_0$ et $y = y_0$ avec مع:

$$x_0 = \frac{\iiint_G \mu x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \mu \, dx \, dy \, dz}, \quad y_0 = \frac{\iiint_G \mu y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G \mu \, dx \, dy \, dz}. \tag{2}$$

إذا كان الجسم المعتبر متجانسا ($\mu(x, y, z) =$ ثابتا) فإن الدساتير تصبح اكثر بساطة:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{\iiint_G x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G dx \, dy \, dz}, \quad y_0 = \dfrac{\iiint_G y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G dx \, dy \, dz}, \\ z_0 = \dfrac{\iiint_G z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_G dx \, dy \, dz}. \end{array} \right. \tag{3}$$

من الواضح ان المقام في هذه الدساتير مطابق لحجم الجسم G.

تسمى النقطة ذات الاحداثيات x_0, y_0, z_0 مركز ثقل الجسم G. تجدر الملاحظة الى ان كل مستو موازن يمر بهذه النقطة. لإثبات ذلك نفرض ان $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (والاّ نقوم بانسحاب للجسم) اي ان:

$$(4) \qquad \iiint_G \mu x\, dx\, dy\, dz = \iiint_G \mu y\, dx\, dy\, dz = \iiint_G \mu z\, dx\, dy\, dz = 0.$$

علينا الآن ان نتأكد من ان كل مستو ω مار بمركز الاحداثيات هو مستو موازن.

يمكـن ان نعـرف ذلـك المستـوى بشعـاعـه الواحـدي والنـاظمـي $m = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. نزود نصفي الفضـاءيـن المعنين بـالمستـوى ω بالإشارتين + و − بشكل يجعل الشعاع m موجها نحو الفضاء الجزئي المزود بـ+. إذا اخذنا ذلك بعين الاعتبار فإن المسافة بين النقطة والمستو ω تكتب على النحو:

$$\varepsilon(M)\, \rho(M, \omega) = (M, m) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

ولذلك فإن عزم الجسم G بالنسبة للمستوى ω سيكون:

$$P(G, \omega) = \iiint_G (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\, \mu\, dx\, dy\, dz = 0$$

وهذا حسب العلاقات (4).

تبقى الاستدلالات السابقة قائمة فيما يخص الاجسام في R_n، مهما كان n=1، 2، 3، ... فيما يتعلـــق بحســـاب العبـــارتين (2) و (3) المعنيتين لإحداثيات مركز الثقل، فإنه من الطبيعي تطبيق مبدأ كافاليري. وهكذا، باجراء التكامل الداخلي على مقطع افقي للجسم G في العبارة الاخيرة (3) نحصل على المساحة $S(z)$ لهذا المقطع، وبعد ذلك تتحول عبارة الاحداثية z_0 الى نسبة تكاملين بسيطين:

$$z_0 = \frac{\int_{z_1}^{z_2} zS(z)\, dz}{\int_{z_1}^{z_2} S(z)\, dz},$$

حيث ان z_1 z_2 هما الاحداثيتان الثالثتان للنقطتين السفلى والعليا على التوالي، للجسم G. من الواضح اننا نستطيع القيام بنفس الشيء وبطريقة مماثلة للسابقة، فيما يتعلق بالعبارتين (2) و (3).

55.3 . الحجم ذو البعد k لمتوازن وجوه ذي بعد

أ . تسمى المجموعة k-d المؤلفة من الاشعة x المعطاة بالدستور :

$$x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, k$$

متوازي اضلاع بعده k مولدا عن الاشعة $g_1, \ldots, g_k$ (في اي فضاء شعاعي). الرسم 5.3 ـ 9 من اجل$k = 3$).

إذا زودنا الفضاء R_k ذا البعد k المولد بالاشعة $g_1, \ldots, g_k$ بجداء سلمي فإننا نستطيع حسب 15.3 ـ أ، ادخال بنية فضاء شعاعي على اية بلاطة منه؛ يتبين بفضل 15.3 ـ ر ان متوازي الاضلاع P_k يصبح مجموعة جوردانية، إذن يمكننا وصله بعدد $V_k(P_k)$ وهو حجمه ذو البعد .

لتكن $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n$ جملة فضاءات ابعادها منتهية ومولدة على التوالي بشعاع الاول، شعاعين الاولين ،...، n شعاعا الاول من مجموعة معطاة من n شعاعا مستقلة خطيا g_1 ،...، g_n $(\in R_n)$، ونفرض ان الجداء السلمي في كل من هذه الفضاءات هو جداء اكبر هذه الفضاءات الذي هو R_n. هناك صلات بين الاحجام V_1 ،...، V_n لمتوازيات الاضلاع P_1 ،...، P_n المولدة على التوالي عن الاشعة g_1 ؛ ثم g_1 ، g_2 ؛ ... ثم g_1 ، g_2 ،... g_n وهي الاشعة التي سنقوم بابرازها. بما ان الاحجام لا تتغير بواسطة تحويل عمودي (15.3 ـ ص)، يمكننا افتراض ان وضع المحاور في الفضاء R_n يجعل الاشعة g_1 ،...، g_{n-1} تقع في المستوى المصعد $x_n = 0$ ان المقطع الافقي لمتوازي الاضلاع:

$$P_n = \{x \in R_n : x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1} + \alpha_n g_n,$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \ i = 1, \ldots, n\}$$

بواسطة $x_n = y$ يأخذ الشكل:

$$E_y = \{x \in R_n : x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1} + \alpha_n(y) g_n,$$
$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n-1\}$$

ويمثل مسحوب القاعدة السفلى

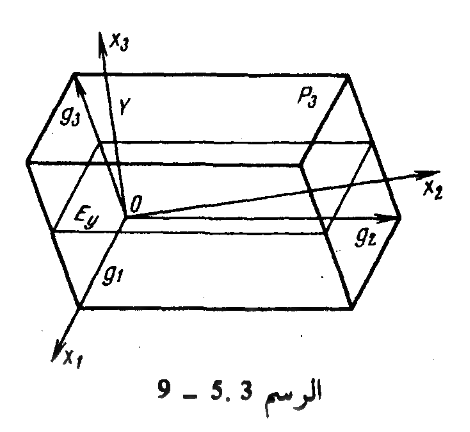
$$E_0 = \{x \in R_n : x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{n-1} g_{n-1}\}$$

لشعاع ثابت $\alpha_n(y) g_n$. ولذا فإن لكل المقاطع E_y نفس المساحة (المساوية لـ V_{n-1}). وهكذا فإن لدينا إذن:

$$V_n = V_{n-1} mY = V_{n-1} h_n,$$

حيث $mY = h_n$ هو طول مسقط الشعاع g_n على المحور $y = x_n$، اي ارتفاع متوازي الاضلاع P_n. اخيرا نرى ان حجم متوزاي اضلاع يساوي جداء مساحة أي مقطع افقي، بصفة خاصة القاعدة، في طول ارتفاعه. بتكرار استعمال هذه النتيجة وتطبيق العلاقة البديهية $|g_1| = V_1 = h_1$ نجد

$$(1) \quad V_n = V_{n-1} h_n = V_{n-2} h_{n-1} h_n = \ldots$$
$$\ldots = V_1 h_2 \ldots h_n = h_1 h_2 \ldots h_n.$$



الرسم 3 .5 ـ 9

ب. يمكننا بواسطة الدستور (1) البرهان بطريقة جبرية محضة على ان (ل 37. 8):

$$(2) \qquad V_n = \sqrt{\det \| (g_i, g_j) \|} = |\det \| \xi_i^{(j)} \| |,$$

حيث يمثل $\xi_i^{(j)}$ الاحداثية ذات الرتبة i للشعاع g_j ضمن اساس عمودي كيفي (لكنه ثابت) للفضاء R_n.

جـ. يتبين من 25.3 ـ أ ان الحجم من البعد k لمتوازي الاضلاع ذي البعد k المنشأ على الاشعة g_1 ، ... ، g_k في R_n يمكن حسابه بدون الخروج عن الفضاء ذي البعد k R_k المولد عن الاشعة g_1 ، ... ، g_k والمزود بالجداء السلمي المأخوذ عن R_n. يؤدي بنا ذلك الى الدستور:

$$V_k = \sqrt{\det \| (g_i, g_j) \|_{i, j=1, \ldots, k}}. \quad (3)$$

نذكر هنا بأن لدينا المساواة:

$$\det \| (g_i, g_j) \|_{i, j=1, \ldots, k} = \sqrt{\sum_{i_1 < \ldots < i_k} [M^{1 \ldots k}_{i_1 \ldots i_k} (g_1, \ldots, g_k)]^2}, \quad (4)$$

حيث يمثل $M^{1 \ldots k}_{i_1 \ldots i_k}$ الاصغري من الرتبة k للمصفوفة $\| \xi^{(j)}_i \|$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$ الموافق للسطور ذات الارقام $i_1, \ldots, i_k$ (ل. 37.8).

سنقوم بتطبيق الدستور (4) لاستنتاج بعض خاصيات الحجم من البعد k، وهي الخاصيات التي سنحتاجها في المستقبل.

د. نرمز لحجم متوازي الاضلاع المنشأ على الاشعة g_1 ، ... ، g_k ايضا بـ $| [g_1, \ldots, g_k] |$. (ان للرمز $[g_1, \ldots, g_k]$ معنى لكننا لن نوضعه الآن.)

إذا كانت الاشعة $g_1, \ldots, g_i$ متعامدة على كل من الاشعة g_{i+1} ، ... ، g_k فإن

$$| [g_1, \ldots, g_k] | = | [g_1, \ldots, g_i] | \, | [g_{i+1}, \ldots, g_k] |.$$

لدينا بالفعل:

$$| [g_1, \ldots, g_k] | = \left| \begin{matrix} (g_1, g_1) \ldots (g_1, g_i) & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (g_i, g_1) \ldots (g_i, g_i) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & (g_{i+1}, g_{i+1}) & \ldots & (g_{i+1}, g_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \quad \ldots \quad 0 & (g_k, g_{i+1}) & \ldots & (g_k, g_k) \end{matrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} (g_1, g_1) \dots (g_1, g_i) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (g_i, g_1) \dots (g_i, g_i) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (g_{i+1}, g_{i+1}) \dots (g_{i+1}, g_k) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (g_k, g_{i+1}) \dots (g_k, g_k) \end{vmatrix} =$$

$$= | [g_1, \dots, g_i] | \, | [g_{i+1}, \dots, g_k] |,$$

وهو المطلوب.

ر . إذا كان ج عدداً ثابتا فإن:

$$| [g_1 + cg_2, g_2, \dots, g_k] | = | [g_1, g_2, \dots, g_k] |,$$

وهو ما ينتج مباشرة من (4) ومن خاصيات الاصغريات يأتي من ذلك بكل سهولة ان حجم متوازي الاضلاع من البعد k لا يتغير عندما نضيف لاي شعاع g_i من الاشعة التي تولده $(i = 1, \dots, k)$ عبارة خطية للأشعة الاخرى.

س . من اجل $|g_1| \leqslant M$ ، ... ، $|g_k| \leqslant M$، $|h_1| \leqslant m$، ... ، $|h_k| \leqslant$ (حيث $m \leqslant 1$، $M \geqslant m$) فإن احجام متوازيات الاضلاع المولدة على التوالي عن الاشعة $g_1 + h_1, \dots, g_k + h_k$ و $g_1, \dots, g_k$ بالدستور:

$$| [g_1 + h_1, \dots, g_k + h_k] |^2 = \tag{5}$$
$$= | [g_1, \dots, g_k] |^2 + C_n m (M + m)^{2k-1}\theta, \quad | \theta | \leqslant 1,$$

حيث C_n ثابت $(C_n \leqslant 3n^2 (n!)^3)$.

بالفعل ليَكن: $g_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ ، $h_j = \sum \lambda_{ij} e_i$

نشريْ الشعاعين g_j et h_j وفق اساس متعامد $\{e_i\}$. نرمز بـ (i) للدليل المركب $(i_1, \dots, i_k)$ حيث $i_1 < \dots < i_k$؛ لتكن $j = (j_1, \dots, j_k)$ اي تبديل للاعداد i_1، ... ، i_k و $\varepsilon(j)$ اشارة عندئذ

$$| [g_1 + h_1, g_2, \dots, g_k] |^2 = \sum_{(i)} [\sum_{(j)} \varepsilon(j) (a_{1j_1} + \lambda_{1j_1}) a_{2j_2} \dots a_{kj_k}]^2 =$$
$$= \sum_{(i)} [\sum_{(j)} \varepsilon(j) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k} + \sum_{(j)} \varepsilon(j) \lambda_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k}]^2 =$$
$$= \sum_{(i)} [\sum_{(j)} \varepsilon(j) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{kj_k}]^2 + R = | [g_1, g_2, \dots, g_k] |^2 + R$$

حيث نجد ، عندما نرمز بـ ν لتبديل كيفي للأعداد $i_1, \ldots, i_k$, on a

$$|R| \leqslant \sum_{(i)} |2 \sum_{(j)(\nu)} \varepsilon(j)\varepsilon(\nu) a_{1j_1} \ldots a_{kj_k} \lambda_{1\nu_1} a_{2\nu_2} \ldots a_{k\nu_k} +$$
$$+ [\sum_{(j)} \varepsilon(j) \lambda_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{kj_k}]^2 | \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{(i)} [2 \sum_{(j)(\nu)} M^{2k-1} m + (\sum_{(j)} m M^{k-1})^2] \leqslant$$
$$\leqslant 3mM^{2k-1} (k!)^3 \leqslant A_n m M^{2k-1},$$

حيث A_n ثابت هو

$$A_n = 3 \max_k (k!)^3 \leqslant 3 (n!)^3.$$

وهكذا نجد ان

$$| [g_1 + h_1, g_2, \ldots, g_k] |^2 = | [g_1, g_2, \ldots, g_k] |^2 =$$
$$= A_n m M^{2k-1} \theta_1, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

بطريقة مماثلة نحصل على:

$$| [g_1 + h_1, g_2 + h_2, g_3, \ldots, g_k] |^2 =$$
$$= | [g_1 + h_1, \ldots, g_2, \ldots, g_k] |^2 + A_n m (M + m)^{2k-1} \theta_2,$$
$$|\theta_2| \leqslant 1,$$

. . . .

$$| [g_1 + h_1, \ldots, g_k + h_k] |^2 = | [g_1 + h_1, \ldots, g_{k-1} +$$
$$+ h_{k-1}, g_k] |^2 + A_n m (M + m)^{2k-1} \theta_k, \quad |\theta_k| \leqslant 1.$$

بجمع المتساويات نحصل على (5).

65. 3 . امثلة اخرى.

حجم بسيط: نسمي بسيطا بعده k مولدا عن الاشعة $g_1, \ldots, g_k$ (في اي فضاء شعاعي) المجموعة Σ_k المؤلفة من الاشعة x المعطاة بالدستور:

$$x = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_k g_k, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant 1 \qquad (1)$$

(المغلف المحدب للنقاط $g_1, \ldots, g_k$ et 0). بطريقة مماثلة لـ55. 3 ـ أ نلاحظ ان البسيطات ذات البعد k في الفضاء الاقليدي R_n لها احجام ابعادها k. هناك علاقات تربط بين الاحجام $|\Sigma_1|, |\Sigma_2|, \ldots, |\Sigma_n|$ للبسيطات $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ المولدة على التوالي عن الاشعة $g_1; g_1, g_2$

وهي العلاقات التي سنبرزها الآن. $g_1, \ldots, g_n$; . . .

ارتفاع بسيط Σ_k هو الطول h_k للعمود الساقط من طرف الشعاع g_k على الفضاء الجزيئي R_{k-1} المولد عن الاشعة $g_1, \ldots, g_{k-1}$ (الرسم 5.3 ـ 10). إن البسيط Σ_k معطى بالشروط (1)؛ اما مقطعه بالمستوى الموازي لـ R_{k-1} والذي يبعد عن Σ_{k-1} بمسافة s فتعينه الشروط:

$$x = \frac{s}{h_k}(\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_{k-1} g_{k-1} + g_k),$$

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, k-1), \ \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \leqslant 1.$$

من الواضح ان هذا المقطع يمثل هة الآخر بسيطا نحصل عليه انطلاقا من Σ_{k-1} بواسطة انسحاب وتحاك نسبته s/h_k يتبين من 15.3 ـ س ان مساحة المقطع يساوي $|\Sigma_{k-1}| \cdot \left(\frac{s}{h_k}\right)^{k-1}$.

ينتج بفضل مبدأ كالفييري 45.3 ان:

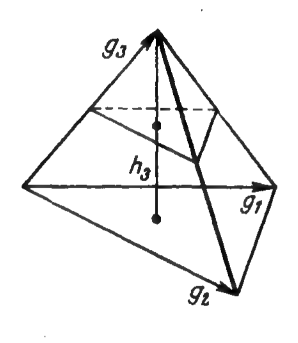
$$|\Sigma_k| = \int_0^{h_k} \left(\frac{s}{h_k}\right)^{k-1} |\Sigma_{k-1}| \, ds = \frac{h^k}{k} |\Sigma_{k-1}|.$$

ثم من العلاقة البديهية $|\Sigma_1| = h_1 = |g_1|$, يأتي:

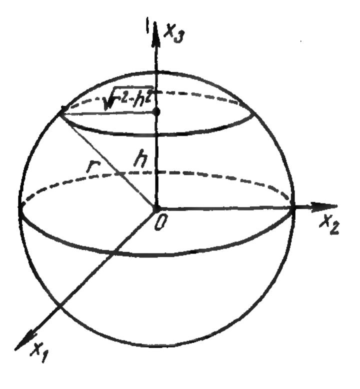
$$|\Sigma_n| = |\Sigma_{n-1}| \frac{h_n}{n} = \ldots = \frac{h_1 \ldots h_n}{n!}.$$

بمقارنة ذلك بحجم متوازي الاضلاع 55.3 (1) نحصل على:

$$|\Sigma_n| = \frac{1}{n!} |[g_1, \ldots, g_n]|.$$



الرسم 5.3 ـ 10



الرسم 5.3 ـ 11

ب . حجم كرة ذات بعد n ليكن :

$$S_n(r) = \{x \in R_n : |x| \leqslant r\}.$$

بما ان كل كرتين من نفس البعد متحاكيتان فإن :

$|S_n(r)| = r^n S_n(1) = C_n r^n$ حيث C_n ثابت ينبغي ايجاده. إن مقطع الكرة $S_n(r)$ بمستو مصعد $x_n = h, |h| \leqslant r$ كرة ذات بعد $(n-1)$ نصف قطرها $\sqrt{r^2-h^2}$ (الرسم 3 .5 ـ 11) طبقا لمبدأ كالفييري 3 .45 ـ أ فإن :

$$|S_n(r)| = \int_{-r}^{r} |S_{n-1}(\sqrt{r^2-h^2})|\, dh = C_{n-1} \int_{-r}^{r} (r^2-h^2)^{\frac{n-1}{2}} dh.$$

نجري التعويض $h = r\sin\theta$، نجد عندئذ (ي 11 . 45) :

$$C_n r^n = |S_n(r)| = C_{n-1} r^n \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n\theta\, d\theta =$$

$$= C_{n-1} r^n B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = C_{n-1} r^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

ومنه :

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

بما ان $C_1 = S_1(1) = 2$ فإن $C_2 = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \pi,\ C_3 = \frac{4}{3}\pi$ وعموما لدينا :

$$C_n = 2\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} =$$

$$= 2\frac{\Gamma^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

يأتي اخيراً :

$$|S_n(r)| = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \qquad (2)$$

3 .75 . معامل عوج حجم بواسطة تطبيق قابل للإشتقاق .

أ . ليَكن $x = x(u)$ تطبيقاً قابلا للإشتقاق من ساحة محدودة $U \subset R_n$ في ساحة محدودة $X \subset R_n$ يكتب هذا التطبيق بالتفصيل كما يلي :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n(u_1, \ldots, u_n). \end{cases} \quad (1)$$

يتبين من 3 .15 ـ ب ان صورة حافة كل بلاطة U $B \subset$ مجموعة قابلة للإهمال في الساحة X ، وبالتالي يحوّل التطبيق $x(u)$ كل بلاطة B الى مجموعة جوردانية $x(B)$. نريد ان نحسب معامل عوج القياس (3 .54) :

$$\varphi(u) = \lim_{B \to u} \frac{|x(B)|}{|B|}.$$

إذا كان $x(u)$ تطبيقا خطيا فإن $x(B)$ هو متوازي الاضلاع الذي تمثل اضلاعه صور اضلاع البلاطة بواسطة $x(u)$ ليكن :

$$\begin{matrix} (\Delta u_1, & 0, & \ldots, & 0), \\ (0, & \Delta u_2, & \ldots, & 0), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (0, & 0, & \ldots, & \Delta u_n) \end{matrix}$$

اضلاع البلاطة B و :

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}u_1 + \ldots + a_{1n}u_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}u_1 + \ldots + a_{nn}u_n \end{cases}$$

التطبيق $x = x(u)$ عندئذ تكون صور اضلاع البلاطة B هي على التوالي :

$$\begin{matrix} (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})\,\Delta u_1, \\ (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})\,\Delta u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})\,\Delta u_n, \end{matrix}$$

وهكذا يكون حجم متوازي الاضلاع $x(B)$ مساويا (3 .55 ـ ج) لِـ :

$$|x(B)| = |\det \| a_{ij} \|| \, \Delta u_1 \ldots \Delta u_n = |\det \| a_{ij} \|| \, |B|.$$

إذن

$$\frac{|x(B)|}{|B|} = |\det \| a_{ij} \| |, \quad (2)$$

وهذه القيمة هي بالضبط معامل عوج القياس.

ب. نعتبر الآن تطبيقا قابلا للإشتقاق وكيفيا $x(u)$. نبرز عند نقطة معطاة $a \in U$ الجزء الخطي الرئيسي:

$$x(a + \Delta u) = x'(a) \Delta u + o(\Delta u). \quad (3)$$

إن المؤثر $(R_n \to R_n)$ $x'(a)$ معطى بالمصفوفة اليعقوبية (52.1 ـ أ)

$$x'(a) \cong \begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1(a)}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n(a)}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1(a)}{\partial u_n} & \cdots & \frac{\partial x_n(a)}{\partial u_n} \end{Vmatrix}.$$

نظرية: من اجل تطبيق قابل للإشتقاق $x(u)$ ، فإن معامل عوج الحجم يمكن حسابه بالدستور:

$$\varphi(a) \equiv \lim_{B \to a} \frac{|x(B)|}{|B|} = |\det x'(a)|. \quad (4)$$

البرهان: نقوم به في عدة مراحل. نثبت في البداية العلاقة (4) في الحالة التي تكون فيها البلاطات B المتقلصة نحو النقطة a هي المكعبات. نرى بعد ذلك ان (4) تبقى قائمة من اجل كل بلاطات وحتى من اجل كل مجموعات جوردانية تتقلص نحو النقطة a (85.3 ـ ب).

ج. نفرض في البداية ان التطبيق $x'(a)$ غير منحل أي ان $\det x'(a) \neq 0$. يتبين من النظرية 65.1 حول التابع المقلوب أنه توجد ساحة V تحوى النقطة صورتها بواسطة تطبيق تفاتشاكلي ساحة $W \subset X$ تحوى النقطة $b = x(a)$.

عندما يتجول الشعاع في المكعب $h \in R_n$ في المكعب $\left\{-\frac{1}{2} \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{2},\ i = 1,.., n\right\}$ فإن الشعاع $x'(a)h$ يتجول في متوازي الاضلاع غير المنحل S الذي حجمه هو $|S| = |\det x'(a)|$ بما ان متوازي الاضلاع S غير منحل فإنه يحوى في داخله كرة نصف قطرها

$c > 0$. نثبّت بشكل كيفي عددا $0 < \varepsilon$ ونعتبر $c\varepsilon$ - الجوار $S_{c\varepsilon}$ منمتوازي الاضلاع S إن هذا الجوار مغطى باتحاد متوازي الاضلاع S مع مسحوبات متوازى الاضلاع εS ، علما ان كل متوازى اضلاع من متوازيات الاضلاع الاخيرة له نقاط مشتركة مع S لأن كلا منها يحوى كرة نصف قطرها $c\varepsilon$. وهكذا فإن كل ال $c\varepsilon$ - جوار مغطى بمتوازى الاضلاع S $(1 + \varepsilon)$ نحصل من اجل حجم المجموعة $S_{c\varepsilon}$ المتراجحة التالية:

$$| S_{c\varepsilon} | \leqslant (1 + \varepsilon)^n | S | = (1 + \varepsilon)^n | \det x' (a) |.$$

مهما كان البلاطة المكعبية A ذات الضلع δ ، فإن حجم ال $c\varepsilon\delta$- - جوار من البلاطة $x' (a) A$ يمكن تقديره، بسبب التحاكي، كما يلي:

$$| (x' (a) A)_{c\varepsilon\delta} | \leqslant (1 + \varepsilon)^n | x' (a) A | =$$
$$= (1 + \varepsilon)^n, \ \delta^n | \det x' (a) | = (1 + \varepsilon)^n | A | | \det x' (a) |.$$

ليكن $0 < \varepsilon$ معطى، لنبحث عن $0 < \delta$ بحيث تكون الكمية $o (\Delta u)$ في (3) تقبل من اجل كل $| \Delta u | < \delta \sqrt{n}$ التقدير: $| o (\Delta u)| \leqslant c\varepsilon | \Delta u |$. لتكن $A \subset V$ بلاطة مكعبية ضلعها δ تحوى النقطة 0 في داخلها أو على حافتها و $B = a + A$ من اجل $h \in A$ فإن النقطة $a + h$ تبعد عن a بمسافة $\delta \sqrt{n}$ على الاكثر، وبالتالي فإن المسافة بين الشعاع $x (a + h)$ والشعاع $x (a) + x' (a) h$ لا تتجاوز $c\varepsilon\delta$ اي ان اول هذين الشعاعين ينتمي الى الـ $c\varepsilon\delta$ - جوار من متوازى الاضلاع $b + x' (a) A$. إذن يمكننا ايجاد حاد اعلى لـ $| x (B) |$ يكتب بدلالة $| B |$:

$$| x (B) | \leqslant | (b + x' (a) A)_{c\varepsilon\delta} | = | (x' (a) A)_{c\varepsilon\delta} | \leqslant \quad (5)$$
$$\leqslant (1 + \varepsilon)^n | A | | \det x' (a) | = | (1 + \varepsilon)^n | B | \cdot | \det x' (a) | .$$

كي نحد من الادنى $| x (B) |$ بواسطة $| B |$ ، نستدل كمل يلي:

نرمز بـ$D + b$ لمتوازى الاضلاع المتحاكى والمتحد المركز مع متوازى الاضلاع $b + x' (a) A$ مع العلم ان نسبة هذا التحاكي هي $1 - \varepsilon$. من الواضح ان $D = x' (a) C$ حيث يمثل $C + a$ البلاطة المتحاكية والمتحدة المركز مع البلاطة المكعبية $A + a$، علما ان نسبة هذا التحاكي هي $1 - \varepsilon$.

ليكن $u = u(x)$ التابع العكسي للتابع $x(u)$ بحيث ان $a = u(b)$ إن التابع $u(x)$ قابل للإشتقاق في الساحة W، ولدينا:

$$u(b+k) = a + u'(b)\, k + o(k). \qquad (6)$$

من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، نبحث عن $\delta > 0$ بحيث تكون الكمية $o(k)$ في (6) قابلة للتقدير $|o(k)| \leqslant \varepsilon |k|$ من اجل كل $|k| < \delta$. من المؤكد أننا نستطيع ان نقبل بان يكون نفس العدد δ الذي يؤدي الى المتراجحة (5). يطبق المؤثر $u'(b)$ متوازي الاضلاع S على البلاطة المكعبية Q، عكسيا، ومتوازى الاضلاع D على البلاطة المكعبية C. إن صورة متوازى الاضلاع $b + D$ بواسطة التطبيق $x \to u(x)$ محتواه في الـ $\varepsilon\delta$ ـ جوار من المكعب $a + C$، وبالتالي في المكعب B؛ بعبارة اخرى:

$$u(b + x'(a)\, C) \subset B$$

أو وهو الامر نفسه:

$$x(B) \supset b + x'(a)\, C.$$

ينتج من ذلك المتراجحة التالية الخاصة بالاحجام:

$$|x(B)| \geqslant |b + x'(a)\, C| = |x'(a)\, C| = \qquad (7)$$
$$= (1-\varepsilon)^n\, |x'(a)\, A| = (1-\varepsilon)^n\, |B|\, |\det x'(a)|.$$

عند مقارنة المتراجحتين (5) و(7) يمكننا التأكيد على صحة المتراجحة المضاعفة التالية وذلك من اجل كل $\varepsilon > 0$ وكل بلاطة مكعبية B ضلعها $\delta \leqslant \delta(\varepsilon)$، تحوى النقطة a:

$$(1-\varepsilon)^n\, |\det x'(a)| \leqslant \frac{|x(B)|}{|B|} \leqslant (1+\varepsilon)^n\, |\det x'(a)|.$$

يثبت ذلك النظرية في الحالة التي يكون فيها $\det x'(a) \neq 0$.

د. نفرض الآن ان $x'(a) = 0$ لكن $x'(a) \neq 0$. عندئذ يحول المؤثر $x'(a)$ المكعب Q الى متوازى الاضلاع المنحل $S = x'(a)\, Q$ نرمز بـ r، $0 < r < n$ لمرتبة المصفوفة $x'(a)$. يقع متوازى الاضلاع S في مستوٍ r بعده r وهو يحوى كرة بعدها r ومركزها في مصدر الاحداثيات ونصف

قطرها c . من اجل $\varepsilon > 0$ نبحث عن $\delta > 0$ بحيث تكون الكمية $o(\Delta u)$ في المساواة (3) تقبل التقدير $|o(h)| \leqslant c\varepsilon |h|$ من اجل كل $\Delta u = h$، $|h| < \delta$؛ إن الشعاع $x(a+h)$ ينتمي، من اجل كل $h \in A$ الى الـ $c\varepsilon\delta$ - جوار من متوازى الاضلاع $x'(a) A + b$ لكن تقاطع المستوى γ وهذا الجوار، كما هو الحال في ج، تقع في متوازى اضلاع T حجمه (ذو البعد r) $|S|_r |B| (1+\varepsilon)^r \leqslant$. ثم إن الـ $c\varepsilon\delta$ - جوار المذكور يحوى بعض النقاط غير المنتمية للمستوى γ وتنتمي كل هذه النقاط الى جداء متوازى الاضلاع T في كرة نصف قطرها $\varepsilon\delta$ في الفضاء الجزئي ذي البعد $n - r$، العمودي على المستوى γ ، في الفضاء R_n لهذا السبب نجد ان حجم الساحة $x(B)$ لا يتجاوز الكمية:

$$|T|_r (\varepsilon\delta)^{n-r} \leqslant (1+\varepsilon)^r \varepsilon^{n-r} \delta^{n-r} \delta^r |S_r| = (1+\varepsilon)^r \varepsilon^{n-r} |B| |S_r|.$$

وهكذا يتبين ان لدينا في الحالة المعتبرة:

$$\frac{|x(B)|}{|B|} \leqslant (1+\varepsilon)^r \varepsilon^{n-r} |S_r|.$$

من اجل $B \to a$ أي $\varepsilon \to a$ فإن لدينا: $\lim\limits_{B \to a} \frac{|x(B)|}{|B|} = 0.$

ر . تبقى معالجة حالة واحدة وهي عندما يكون $x'(a) = 0$ بحيث ان المؤثر $x'(a)$ يحوّل المكعب Q الى نقطة، وهي مصدر الاحداثيات في الفضاء X . ليكن $\varepsilon > 0$ معطى، نبحث عن $\delta > 0$ بحيث تكون الكمية $o(h)$ في (3) تقبل التقدير $|o(h)| \leqslant \varepsilon |h|$ من اجل كل $|h| < \delta$ وهكذا فإن المسافة بين الشعاع $x(a+h)$ والنقطة $x(a) = b$ لاتتجاوز، من اجل $|h| < \delta$، العدد $\varepsilon\delta$. وبالتالي فإن الصورة $x(B)$ للبلاطة B تقع في الكرة ذات نصف القطر $\varepsilon\delta$. المتمركزة في النقطة b. إذن:

$$\frac{|x(B)|}{|B|} \leqslant C \frac{(\varepsilon\delta)^n}{\delta^n} = C\varepsilon^n,$$

وعندما يؤول B الى a (اي ε الى 0) فإن الكمية $\frac{|x(B)|}{|B|}$ تؤول الى 0 . اخيرا لدينا في كل الحالات الممكنة:

$$\lim_{B \to a} \frac{|x(B)|}{|B|} = |\det x'(a)|,$$

وبذلك ينتهي البرهان على النظرية ب.

85.3 . تغيير المتغيرات في تكامل مضاعف. بمقدورنا الآن، بتطبيق النظرية 54.3 ، صياغة القاعدة الاساسية لتغيير المتغيرات في تكامل مضاعف.

نظرية. ليكن $x = x(u)$ تطبيقا جوردانيا (54.3) قابلا للإشتقاق من مجموعة متراصة جوردانية $U \subset R_n$ على مجموعة متراصة جوردانية $X \subset R_n$ بحيث يكون داخل المجموعة U مطبقا بواسطة $X(u)$ على داخل المجموعة X وحافة U على حافة X . لنفرض ان تابعا $f(x)$ مستمر على المجموعة X . عندئذ يتحقق الدستور الموالى:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_U g(u) \det x'(u)\,du, \qquad (1)$$

حيث $g(u) = f(x(u))$.

البرهان: إذا كان U مكعبا في R_n ، فإن النتيجة المطلوبة تأتي من النظريتين 54.3 و75.3 ـ ب وهذا عندما نأخذ بعين الاعتبار، في الحالة الراهنة، كوننا نستطيع اختيار كخلايا جماعة مكعبات محتواة في U (33.3 ـ ص). إذا كانت U مجموعة اولية أي اتحادا منتهيا من المكعبات بدون نقاط داخلية مشتركة، فإن النتيجة المطلوبة تنتج بجمع المتساويات من النمط (1) المكتوبة من اجل كل مكعب من هذه المكعبات.

لنعالج الحالة العامة التي يكون فيها U مجموعة جوردانية كيفية نبحث، من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عن مجموعة مفتوحة أولية $Q \subset R_n$ تحوى الحافة Z للمجموعة X تماما في داخلها ولها قياس $\leqslant \varepsilon$. إن الصورة العكسية التامة $F \subset U$ للمجموعة $X - QX$ جزء مغلق من U ليس له اية نقطة مشتركة مع

الحافة W للمجموعة U بحيث ان $d(F, W) > 0$ ‎δ = (‏32.3 ـ د). ثم، باستخدام التوطئة 15.3 ـ ط؛ نبحث عن مجموعة اولية P قياسها $\leqslant \varepsilon$ تحوى W تماما في داخلها وهي نفسها محتواة في الـ δ ـ جوار من W. إن الفرق $U - P$ مجموعة أولية تحول الى مجموعة جوردانية $X \supset Y$ تحوى المجموعة $X - Q$ بحيث ان $m(X - Y) \leqslant mQ \leqslant \varepsilon$. يمكننا الآن كتابة:

$$\int_X f(x)\,dx = \int_Y f(x)\,dx + \int_{X-Y} f(x)\,dx,$$

$$\int_U g(u) \det x'(u)\,du = \int_{U-P} g(u) \det x'(u)\,du + \int_{P \cap U} g(u) \det x'(u)\,du.$$

لما كانت المجموعة $U - P$ اولية فإن النتائج المحصل عليها هنا تستلزم:

$$\int_{U-P} g(u) \det x'(u)\,du = \int_Y f(x)\,dx.$$

بما ان $m(X - Y) \leqslant \varepsilon$, $mP \leqslant \varepsilon$ on a فإن:

$$\left| \int_{X-Y} f(x)\,dx \right| \leqslant \max_X |f(x)|\,\varepsilon,$$

$$\left| \int_{P \cap U} g(u) \det x'(u)\,du \right| \leqslant \max_X |f(x)| \cdot \max_U |\det x'(u)| \cdot \varepsilon.$$

ومنه يأتي:

$$\left| \int_X f(x)\,dx - \int_U g(u) \det x'(u)\,du \right| \leqslant \max_X |f(x)| \left(1 + \max_U |\det x'(u)|\right) \varepsilon,$$

وبما ان $\varepsilon > 0$ كيفي، فإن لدينا المساواة (1)، وهو المطلوب اثباته.

ب. نرجع الى الدستور 75.3 (4):

$$\lim_{B \to a} \frac{|x(B)|}{|B|} = |\det x'(a)|, \tag{2}$$

الذي برهنا عليه اعلاه في حالة البلاطات المكعبية B. لتكن B_1، $B_2, \ldots, B_\nu, \ldots$ متتالية كيفية من المجموعات الجوردانية ذات القياسات الموجبة $mB_\nu = |B_\nu|$ المتقلصة نحو النقطة a. يتبين مما اثبتناه في أ ان:

$$|x(B_\nu)| = \int_{x(B_\nu)} dx = \int_{B_\nu} |\det x'(u)|\,du;$$

وبالتالي، يأتي من استمرار $x'(u)$:

$$\frac{|x(B_\nu)|}{|B_\nu|} = \frac{1}{|B_\nu|}\int_{B_\nu} |\det x'(u)|\, du \to |\det x'(a)|;$$

وهكذا يتضح ان الدستور (2) قائم ليس من اجل المكعبات فحسب بل ايضا من اجل كل المجموعات الجوردانية B المتقلصة نحو النقطة a.

سنكتب فيما يلي $|A|$ بدل $|\det A|$.

95. 3 . امثلة .

أ . مساحة شكل مستو ضمن الاحداثيات القطبية.

ليكن $X \subset R_2 = \{x, y\}$ شكلا مستويا (ساحة جوردانية). تكتب مساحته على الشكل التكاملي:

$$S = |X| = \iint_X dx\, dy. \qquad (1)$$

إذا انتقلنا الى الاحداثيات القطبية

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

فإننا نحصل على:

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

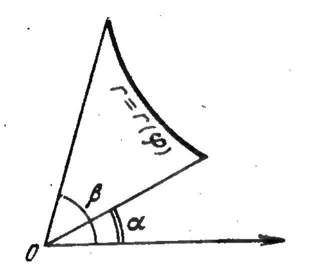
وبالتالي نجد، من اجل الساحة U المواقة لذلك في المستوى r, φ:

$$S = \iint_X dx\, dy = \iint_U r\, dr\, d\varphi. \qquad (2)$$

نفرض ان الساحة X محصورة بنصفي مستقيمين $\varphi = \alpha$ و $\varphi = \beta$ ومنحنى $r = r(\varphi)$ (الرسم 5. 3 ـ 12). عندئذ، بوضع التكامل (2) في شكل تكامل مكرر، تكامله الداخلي بالنسبة r نجد:

$$S = \iint_U r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{r=0}^{r(\varphi)} r\, dr \right\} d\varphi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi.$$

وهو الدستور الذي استنتجناه مباشرة (ي 26.g).



الرسم 3 .5 ـ 12

ب . مساحة شكل G محدود بمنحن $x^{2/\lambda} + y^{2/\mu} = 1 \quad (x > 0, y > 0)$ ومحوري الاحداثيات. نفرض ان الاسّين $2/\lambda$ و $2/\mu$ عددان حقيقيان موجبان.

نستخدم في البداية المتغيرين $x^{1/\lambda} = X, y^{1/\mu} = Y$ لأننا ننوي استعمال الاحداثيات القطبية. إن الساحة Q الموافقة لذلك في المستوى x، y مقسمة هي الاخرى بواسطة محوري الاحداثيات وبربع لدائرة $X^2 + Y^2 = 1$. زيادة على ذلك، لدينا:

$$\left|\frac{\partial (x, y)}{\partial (X, Y)}\right| = \begin{vmatrix} \lambda X^{\lambda-1} & 0 \\ 0 & \mu Y^{\mu-1} \end{vmatrix} = \lambda\mu X^{\lambda-1} Y^{\mu-1};$$

إذن:

$$S = \iint_G dx\, dy = \lambda\mu \iint_Q X^{\lambda-1} Y^{\mu-1}\, dX\, dY.$$

ننتقل الى الاحداثيات القطبية، $X = r\cos\varphi$ ، $Y = r\sin\varphi$ ؛ وبمراعاة ي 11 .45، نجد:

$$S = \lambda\mu \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} r^{\lambda+\mu-1} \cos^{\lambda-1}\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \int_0^{\pi/2} \cos^{\lambda-1}\varphi \sin^{\mu-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda\mu}{2(\lambda+\mu)} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)},$$

حيث يمثل $B(p, q)$ التابع بيتا لاولر (Euler)، اما $\Gamma(s)$ فهو التابع غاما لأولر (ي 45.5.11).

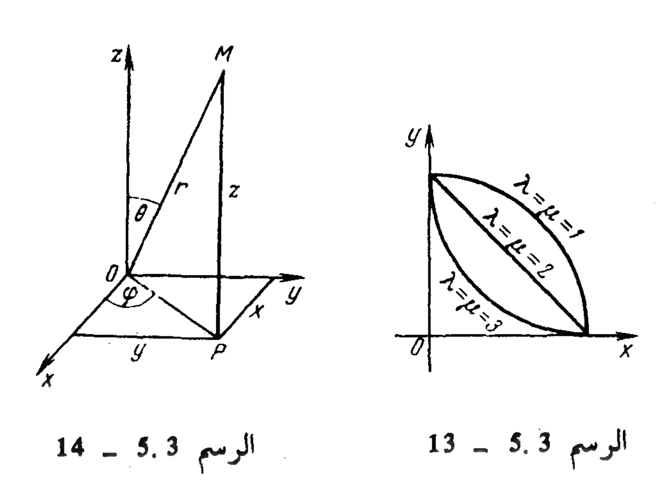
حالات خاصة (الرسم 5.3 ـ 13):

$\lambda=\mu=1$ (قوس دائرة): $S=\frac{1}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{4}$;

$\lambda=\mu=2$ (قطعة مستقيمة): $S=\frac{1}{2}\frac{\Gamma^2(1)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}$;

$\lambda=\mu=3$ (قوس منحنى كوكبي): $S=\frac{3}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{3\pi}{32}$.

ج. الاحداثيات الكروية في R_3. تتشكل جملة الاحداثيات الكروية في الفضاء الاقليدي ذي الثلاثة ابعاد R_3 حيث ترمز x, y, z للإحداثيات المستطيلة، من الكميات التالية (الرسم 5.3 ـ 14)



الرسم 5.3 ـ 14 الرسم 5.3 ـ 13

المسافة r التي تفصل النقطة O عن النقطة $M(x, y, z)$

الزاوية θ التي يشكلها نصف المستقيم OM مع نصف المحور الموجب الحامل للعناصر z

الزاوية φ التي يُشكلها المسقط OP لنصف المستقيم OM على المستوى x, y مع نصف المحور الموجب الحامل للعناصر x.

من الواضح ان

$$\begin{cases} z = r\cos\theta, \\ x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi. \end{cases} \qquad (3)$$

زيادة على ذلك:

$$\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}\right| = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

وبالتالي، من اجل ساحتين G و U الاول توافق الثانية عند وصفها على التوالي ضمن الاحداثيات الديكارتية والاحداثيات الكروية، نجد ان:

$$\iiint_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_U f(x, y, z)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

حيث ينبغي تعويض المتغيرات x, y, z في الطرف الايمن G بعباراتها الواردة في (3).

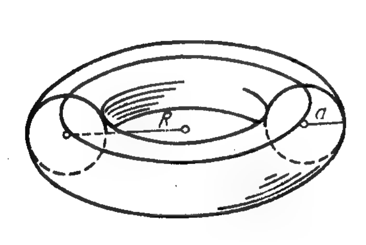
د. لنحسب حجم جسم $G \subset R_3$ انطلاقا من معرفة مقاطعه S_φ بواسطة انصاف المستويات $\varphi =$ ثابتا $\in [0,2\pi]$ (حيث يمثل φ الاحداثية الكروية الثالثة [راجع ج]) (راجع الرسم 5.3 ـ 15).

لدينا ضمن الاحداثيات الكروية:

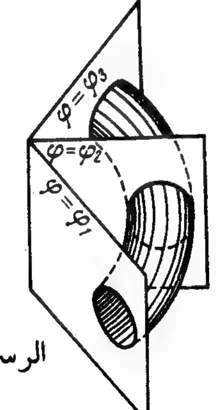
$$|G = \iiint_G dx\,dy\,dz = \iiint_U r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left\{\iint_{S_\varphi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\right\}d\varphi.$$

ندخل في نصف المستوى S_φ الاحداثيات الديكارتية $z = r\cos\theta$ و $\rho = r\sin\theta$. عندئذ نحصل من اجل الساحة G_φ الموافقة لذلك في المستوى ρ, z, على:

$$\iint_{S_\varphi} r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \iint_{S_\varphi} r\sin\theta\,dr\,d\theta = \iint_{G_\varphi} \rho\,dz\,d\rho.$$



الرسم 5.3 ـ 16



الرسم 5.3 ـ 15

إن التكامل الوارد في الطرف الايمن يمثل الاحداثية الافقية $\rho_C(\varphi)$ لمركز ثقل الشكل C_φ (45.3 ـ ب) بعد ضربه في المساحة $|G_\varphi|$ لهذا الشكل. نحصل بذلك على:

$$|G| = \int_0^{2\pi} \rho_C(\varphi)\, |G_\varphi|\, d\varphi.$$

سيكون مسألتنا محلولة بمجرد معرفتنا، من اجل كل $\varphi \in [0, 2\pi]$ ، لمساحة الشكل G_φ والمسافة $\rho_C(\varphi)$ التي تفصل مركزه عن محور العناصر z.

لدينا، من اجل الطادة المبينة في الرسم 16.5.3 ،

$$|G_\varphi| = \pi a^2,\ \rho C(\varphi) = R;$$

وبالتالي:

$$|T| = 2\pi \cdot \pi a^2 R = 2\pi^2 a^2 R.$$

§ 6.3 . تكامل سطح

16.3 . تعريف تكامل سطح.

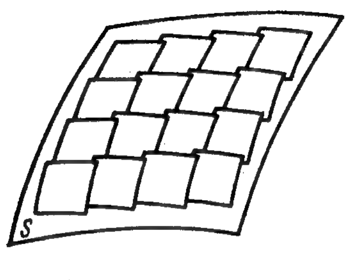
أ . ليكن $x = \varphi(u)$ $(R_k \to R_n)$ تطبيقا معرفا وقابلا للإشتقاق باستمرار في ساحة $U \subset R_k$ لتكن $G \subset U$ مجموعة جوردانية مغلقة. تسمى المجموعة $S = \varphi(G) \subset R_n$ سطحا بعده k في R_n .

نريد أن نعرف تكامل السطح:

$$\int_S f(x)\, dS \qquad (1)$$

لتابع $f(x)$ معطى ومستمر على S.

يمكن ان نفسر التكامل الموافق له على ساحة مستوية S ككتلة كلية لهذه الساحة، هذا إذا مثل التابع $f(x)$ كثافة الكتلة عند النقطة x . بطريقة مماثلة، ينبغي ان يكون للتكامل (1) مفهوم كتلة كل السطح S ، إذا كان $f(x)$ يمثل الكثافة. بصفة خاصة، وباعتبار $f(x) \equiv 1$ ، فإن تعريفنا هو تعريف مساحة السطح S .



الرسم 6.3 ـ 1

كي نتجنب تراكب الاجزاء الرئيسية للسطح S، نفرض ان تطبيق $x = \varphi(u)$ تقابلي باستثناء ممكن بمجموعة قابلة للإهمال $Z \subset G$.

ب. ننتقل الآن الى التعاريف الدقيقة. نعتبر تجزئة جوردانية كيفية $\Pi = \{E_i\}$ للمجموعة G؛ ليكن $d(\Pi)$، كالمعتاد، القطر الاعظمي للمجموعات E_i. نثبت نقطة كيفية ξ_i في كل مجموعة E_i، ونعتبر في المجموعة E_i، التطبيق الخطيب «الماس»:

$$\xi_i + \Delta u \to \varphi(\xi_i) + \varphi'(\xi_i)\,\Delta u.$$

إن صورة المجموعة E_i بواسطة هذا التطبيق مجموعة جزئية جوردانية للمنوعة الخطية ذات البعد k الموافقة لها: تؤلف المجموعات E_i تغطية على شكل «قرميدات» للسطح S (الرسم 6.3 ـ 1). نزوّد كل «قرميدة» E_i بـ«كثافة» منتظمة $f(\varphi(\xi_i))$، فنرى ان «وزن» كل التغطية «القرميدية» يساوي:

$$\sum_i f(\varphi(\xi_i))\,|E_i|_k. \tag{2}$$

نبحث الآن عن القيمة $|E_i|_k$. يكتب التطبيق $x = \varphi(u)$ على شكل احداثيات كالتالي:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, \ldots, u_k). \end{aligned}$$

إن المشتق $\varphi'(u)$ مؤثر خطي $(R_k \to R_n)$ مصفوفته هي

$$\varphi'(u) \cong \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1}, & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_k} \end{matrix} \right\|.$$

نعتبر في البداية E_i متوازى اضلاع مستطيلا اضلاعه:

$$\begin{cases} g_1 = (\Delta u_1, \ 0, \ \dots, \ 0 \ ), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k = (\ 0, \ \ 0, \ \dots, \ \Delta u_k). \end{cases}$$

عندئذ يكون $\varphi'(\xi_i) B_i = \mathrm{E}_i$ متوازى الاضلاع المنشأ على الاشعة:

$$\varphi'(\xi_i) g_1 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} \right) \Delta u_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi'(\xi_i) g_k = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_k}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_k} \right) \Delta u_k.$$

اما حجمه ذو البعد k $|\mathrm{E}_i|_k$ فيساوى، طبقا لـ3 .25، الجذر المربع لمجموع مربعات كل الاصغريات من الرتبة k للمصفوفة $\varphi'(u)$ بعد ضربه في $\Delta u_1 \dots \Delta u_k$. نرمز حسب 3 .55 ـ د لهذه الكمية بـ

$$|\mathrm{E}_i|_k = \left| \left[\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_1}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_k} \right] \right| \Delta u_1 \dots \Delta u_k. \quad (3)$$

ان اية مجموعة جوردانية E مؤلفة، حسب 3 .13 ـ ج، بشكل من الاشكال من الخلايا B_j؛ ثم إن الكمية $\varphi'(\xi_i)$ ثابتة من اجل i مثبت؛ ولذا نرى، عند القيام بنفس العملية من اجل E_i (مكان E)، ان الدستور (3) يبقى قائما من اجل كل المجموعات الجوردانية:

$$|\mathrm{E}_i|_k = \left| \left[\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_1}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_k} \right] \right| |E_i|. \quad (4)$$

يكتب إذن المجموع (2) على الشكل:

$$\sum_i f(\varphi(\xi_i)) \left| \left[\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_1}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial u_k} \right] \right| |E_i|;$$

وهو يمثل مجموعا تكامليا للتكامل:

$$\int_G f(\varphi(u)) \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ \dots, \ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| du. \quad (5)$$

بما ان $f(\varphi(u))$ و $\left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right|$ مستمران على G فإن المجاميع التكاملية (4) تؤول الى التكامل (5) عندما يؤول $d(\Pi)$ الى 0.

وهكذا نصل الى التعريف التالي:

$$(6) \qquad \int_S f(x)\,dS = \int_G f(x(u)) \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| du.$$

بصفة خاصة، نسمي قياسا من البعد k، او باختصار مساحة السطح S التكامل (6)، حيث $f(x) \equiv 1$، أي الكمية:

$$(7) \qquad |S|_k = \int_S dS = \int_G \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| du.$$

ج. يجب اثبات ان التعريف الوارد اعلاه سليم، اي لا يتعلق باختيار الوسيطات التي تعين السطح S. نفرض انه يوجد الى جانب التمثيل $x = \varphi(u),\ u \in G$ ، تمثيل ثان $x = \psi(v)$ لنفس السطح S ، حيث يتجول الوسيط v في ساحة $V \subset R_k$ والوسيطان u, v مرتبطان بالعلاقاتين المتعاكستين:

$$(8) \qquad u = u(v), \qquad v = v(u)$$

مع العلم ان التابعين $u(v)$ و $v(u)$ قابلان للإشتقاق. نقول عن مثل هذين التمثيلين $x = \varphi(u)$ و $x = \psi(v)$ إنهما **متكافئان**.

لدينا حسب التعريف:

$$\int_S f(x)\,dS = \int_V f(\psi(v)) \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| \left| \frac{\partial(u_1, \ldots, u_k)}{\partial(v_1, \ldots, v_k)} \right| dv.$$

لكن يتبين من 33.1 ـ ب ان:

$$\left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| \left| \frac{\partial(u_1, \ldots, u_k)}{\partial(v_1, \ldots, v_k)} \right| =$$

$$= \sqrt{\sum_{(i)} \det{}^2 \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)} \det{}^2 \frac{\partial(u_1, \ldots, u_k)}{\partial(v_1, \ldots, v_k)}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{(i)} \det{}^2 \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})}{\partial(v_1, \ldots, v_k)}} = \left| \left[\frac{\partial \psi(v)}{\partial v_1}, \ \ldots, \ \frac{\partial \psi(v)}{\partial v_k} \right] \right|.$$

ينتج من ذلك ان:

$$\int_G f(\varphi(u)) \left| \left[\frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u_k} \right] \right| du =$$

$$= \int_V f(\psi(v)) \left| \left[\frac{\partial \psi(v)}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \psi(v)}{\partial v_k} \right] \right| dv,$$

وهو ما يثبت ثبوت قيمة التكامل في الطرف الايسر بالنسبة للتمثيلين المتكافئين للسطح S.

26. 3 . حالات خاصة.

أ. ليكن $k=1$ ؛ يتعلق الامر بمنحنٍ $L=\{x = x(t)(R_1 \to R_n), a \leqslant t \leqslant b\}$ في الفضاء R_n ذي البعد n. تملك المصفوفة $x'(t)$ عموداً واحداً هو $\{x'_1(t), \ldots, x'_n(t)\}$ ثم إن:

$$|[x'(t)]| = |x'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x'_i(t)]^2}.$$

يأخذ الدستوران 16. 3 (6) و(7) على التوالي الشكلين:

$$\int_L f(x)\, dL = \int_a^b f(x(t)) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x'_i(t)]^2}\, dt, \tag{1}$$

$$|L| = \int_L dL = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x'_i(t)]^2}\, dt. \tag{2}$$

نلاحظ اننا متعودون على هذين الدستورين الخاص أولهما بتكامل تابع $f(x)$ على طول منحنى L وثانيهما بطول المنحنى L، وذلك منذ ي19. 9 (g=s) و ي36. 9.

ب. إذا كان $k=2$ فالامر يتعلق بسطح ثنائي البعد:

$$S = \{x = \varphi(u, v)\ (R_2 \to R_n),\ (u, v) \in G \subset R_2\}.$$

مع العلم ان للمصفوفة $x'(u, v)$ عمودين هما:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u} \right\} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial v}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial v} \right\}. \tag{3}$$

إن الكمية $\left| \left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right] \right|$ هي الجذر التربيعي لمجموعة مربع الاصغريات من الرتبة 2 للمصفوفة $\frac{n(n+1)}{2}$. ثم إن العبارة

$\left\|\left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right\|$ التي تمثل مساحة متوازى الاضلاع المنشأ على الاشعة

(3)، يمكن كتابتها لعى نحو آخر: إذا كانت ω هي الزاوية التي يشكلها الشعاعان $\frac{\partial x}{\partial v}$ و $\frac{\partial x}{\partial u}$ فإن لدينا:

$$\left|\left[\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right]\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|\sin\omega = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|\sqrt{1-\cos^2\omega} =$$

$$= \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2\left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{EG-F^2},$$

حيث

$$E = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v},$$

$$G = \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2.$$

وهكذا فإن التكامل 16.3 (6) يكتب، من اجل $k=2$، كما يلي:

$$\int_S f(x)\,dS = \int_G f(x(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv, \tag{4}$$

ومساحة السطح S (16.3 (7)) هي:

$$|S| = \int_S dS = \int_G \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv. \tag{5}$$

ﺟ. إذا كان $k=n-1$ فإن الامر يتعلق بسطح ذي بعد $n-1$

$$S = \{x = \varphi(u_1, \ldots, u_{n-1})\,(R_{n-1}\to R_n),\ (u_1, \ldots, u_{n-1}) \in G \subset R_{n-1}\}.$$

إن المصفوفة $\varphi'(u)$ تملك $n-1$ عمواد و n سطراً:

$$\varphi'(u) \simeq \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_n(u)}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n(u)}{\partial u_{n-1}} \end{matrix}\right\|.$$

يسمى الشعاع:

$$N = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ \frac{\partial \varphi_1 (u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n (u)}{\partial u_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_1 (u)}{\partial u_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n (u)}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right]$$

الجداء الشعاعي للأشعة $\frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}$,... ,$\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}$. من الواضح ان هذا الشعاع عمودي على كل شعاع $\frac{\partial \varphi (u)}{\partial u_i}$ (أي عمودي في R_n على السطح S)، وطوله هو بالضبط الكمية:

$$\left| \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right] \right|.$$

وهكذا فإن تكامل التابع $f(x)$ على السطح يحسب في هذه الحالة بالدستور:

$$\int_S f(x)\, dS = \int_G f(\varphi(u)) \left| \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right] \right| du = \int_G f(\varphi(u)) \, |N| \, du. \quad (6)$$

نستنتج مساحة السطح S، كالمعتاد، بوضع f=1:

$$|S| = \int_S dS = \int_G |N| \, du = \int_G \left| \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} \right] \right| du. \quad (7)$$

د . نشير الى حالة معروفة جيدا حيث يكون السطح S معطى بمعادلة ذات الشكل:

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in Q \subset R_{n-1}$$

او، وهو الامر نفسه، بجملة ذات الشكل:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1, \\ x_2 &= x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= x_{n-1}, \\ x_n &= \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

لدينا عندئذ:

$$N=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} & e_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix} = (-1)^n\left(e_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\dots+e_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}-e_n\right),$$

ومنه يأتي:

$$|N|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right)^2+1}.$$

نحصل، من اجل التكامل 16.3 (6) للتابع $f(x)$ على السطح S، على العبارة:

$$\int_S f(x)\,dS=\int_Q f(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))\times \tag{8}$$
$$\times\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right)^2+1}\,dx_1\dots dx_{n-1}.$$

ر. ليكن اخيرا $k=n$، بحيث يلعب دور السطح S ساحة في الفضاء ذي البعد n. إن للمصفوفة $\varphi'(u)$ n سطرا و عمودا؛ ثم إن حجم متوازي الاضلاع المنشأ على الاشعة $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\dots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_n}$ يساوى القيمة المطلقة، لمعين هذه الاشعة. يتحول الدستوران 16.3(6)، (7):

$$\int_S f(x)\,dS=\int_G f(x(u))\left|\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}\right|du,$$

$$|S|=\int_S dS=\int_G\left|\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(u_1,\dots,u_n)}\right|du$$

الى الدساتير المعروفة الخاصة بتغيير المتغيرات في التكامل المضاعف n مرة 85.3(1).

36.3 . امثلة.

أ. نبحث في R_3 عن مساحة جزء سطح الكرة ذات نصف القطر R، المعين بالاحداثيتين الكرويتين φ و θ المحصورتين كما يلي $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$ و $\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ (راجع الرسم 6.3 ـ 2).

لــديـنــا ضـمــن الاحـــداثيـــات الكـــرويـــة $x = R\sin\theta\cos\varphi$، $y = R\sin\theta\sin\varphi$، $z = R\cos\theta$ (راجع 95.3 ـ ج) ما يلي:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & 0 \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \end{matrix} \right\|,$$

بحيث أن

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = R^2\sin^2\theta,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\theta} = 0,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2 = R^2.$$

ينتج من ذلك ان:

$$|S| = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\theta = R^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= R^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\cos\theta_1 - \cos\theta_2).$$

بصفة خاصة، نصحل باعتبـار سطـح الكـرة بـاكملـة: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$، $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$، على:

$$|S| = R^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi R^2.$$

ب . نحسب الآن سطح الطارة المحصل عليها بالدوران حول محور العناصر للدائرة ذات نصف القطر a التي تقع في بداية الدوران في المستوى x, z حيث يكون مركزها في النقطة $x = b\ (b > a),\ y = 0,\ z = 0$.

نحصل مباشرة عن تمثيل وسيطي للطارة (انظر الرسم 6.3 ـ 3):

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z = a\sin\psi;$$

حيث تتغير الزاويتان φ و ψ من 0 الى 2π. بما ان:

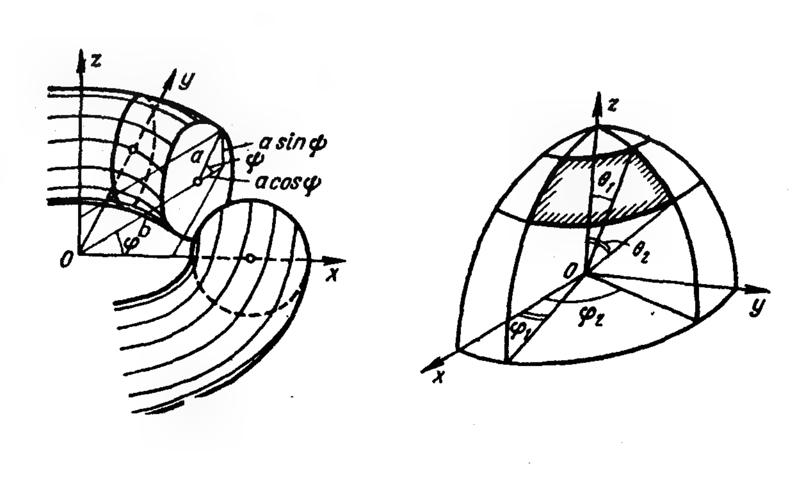
$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{matrix} \right\|,$$

فإننا نجد:

$$E = (b + a\cos\psi)^2, \quad F = 0, \quad G = a^2.$$

اخيرا يأتي:

$$|S| = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\psi = a \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (b + a\cos\psi)\, d\varphi\, d\psi = 4\pi^2 ab.$$



الرسم 3.6 ـ 3

الرسم 3.6 ـ 2

ج. **مساحات السطوح المتحاكية.** نقول عن سطحين بعداهما k : S_1 و S_2 معرفين على التوالي بتطبيقين قابلين للإشتقاق:

$$x = \varphi(u),$$
$$x = b\varphi(u)$$

حيث يتجول المتغير u ، كالمعتاد، في ساحة $(x \in R_n,\ b > 0)$، جوردانية $G \subset R_k$، إنهما **سطحان متحاكيان ونسبة التحاكي هي b**.
لنبحث عن العلاقة التي تربط مساحتيْ هذين السطحين. يسمح الدستور 16.3 (7) بكتابة عبارتيْ هاتين المساحتين:

$$(1) \qquad |S_1| = \int_G \left| \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_n} \right] \right| du,$$

$$(2) \qquad |S_2| = \int_G \left| \left[b \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \ldots, b \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \right] \right| du.$$

بوضع المعامل b في شكل عامل مشتركه في كل عمود من الاعمدة البالغ عددها k للاصغريات الواردة تحت رمز المكاملة في (2)، نرى بأن:

$$|S_2| = b^k |S_1|.$$

وهكذا يتبين ان نسبة مساحتيْ سطحين (بعداهما k) متحاكيين تساوى نسبة تحاكيهما مرفوعة قوة k.

3 .46 . مساحة سطح بوصفها نهاية مساحات متعددات وجوه مُحاطة بهذا السطح.

أ . كنا عرّفنا، في اوانه، طول منحنى كنهاية اطوال مضلعية محاطة بالمنحنى المعتبر. ويتبين الآن انه بالامكان تعريف مساحة سطح بطريقة مماثلة أي كنهاية مساحات سطوح متعددات وجوه محاطة بالسطح المعتبر عندما تقسّم تلك الوجوه بشكل لا متناهي. الّا انه تجدر الملاحظة بأن هناك متتاليات سطوح متعددات وجوه محاطة بالسطح المعتبر ولا تليق للحصول على مساحة هذا السطح بواسطة الانتقال الى النهاية عندما تقسم الوجوه بشكل لا متناهي (راجع التمرين 5). سنقوم بابراز بعض الأنماط من متتاليات سطوح متعددات وجوه محاطة بسطح معطى، بحيث تكون نهاية هذه المتتاليات هي مساحة السطح المعطى.

ليكن $S = \{x = \varphi(u),\ u \in U \subset R_k\}$ سطحا بعده k في الفضاء ذي البعد n. نفرض أن التطبيق $\varphi(u)$ يملك في الساحة المغلقه U مشتقا $\varphi'(u)$ مستمرا وغير منحل بحيث يكون مجموع مربعات كل الاصغريات ذات الرتبة k للمصفوفة $\varphi'(u)$ اكبر من عدد موجب c^2 او تساويه. يمكن التعبير على هذا الافتراض الاخير كما يلي: إذا كانت $g_1, \ldots, g_k$ هي اشعة الاساس في الفضاء R_k فإن المتراجحة التالية تتحقق في كل

الساحة U :

$$\left|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right]\right| \geqslant c;$$

أو، ايضا: من اجل كل $\delta > 0$ لدينا:

$$|[\varphi'(u)\,\delta g_1, \ldots, \varphi'(u)\,\delta g_k]| \geqslant c\delta^k. \quad (1)$$

ب. ليكن $Q = \{\alpha_1 \leqslant u_1 \leqslant \beta_1, \ldots, \alpha_k \leqslant u_k \leqslant \beta_k\}$

مكعبا بعده k محتويا في الساحة U و$\beta_1 - \alpha_1 = . = \beta_k - \alpha_k = h.$ يمكن تقسيم المكعب الى $k!$ بسيطا ابعادها k ولها نفس المساحة (65.3 ـ أ) وهذا حسب القاعدة التالية. لتكن $g_1, \ldots, g_k$ اضلاع المكعب Q النافذة من رأس ثابت P، مثلا من الرأس $u_1 = \alpha_1, \ldots, u_k = \alpha_k$ لتكن $i_1, \ldots, i_k$ تبديلا كيفيا للأعداد $1, \ldots, k.$ نعتبر الاشعة:

$$\lambda_1 g_{i_1} + \lambda_2 (g_{i_1} + g_{i_2}) + \ldots + \lambda_k (g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}),$$

حيث $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0,\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \leqslant 1.$

انها تملأ بسيطا $Q_{i_1 \ldots i_k}$ رؤوسه عند النقاط P، $P + g_{i_1}$، $P + g_{i_1} + g_{i_2}, \ldots, P + g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}$ ثم إن حجم هذا البسيط يساوي، حسب 65.3 ـ أ:

$$\frac{1}{k!}|[g_{i_1}, g_{i_1} + g_{i_2}, \ldots, g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}]| =$$

$$= \frac{1}{k!}|[g_{i_1}, \ldots, g_{i_k}]| = \frac{1}{k!}|[g_1, \ldots, g_k]| = \frac{h^k}{k!},$$

بحيث ان كل البسيطات $Q_{i_1 \ldots i_k}$ لها نفس المساحة. لتثبت ان كل نقطة من المكعب Q تنتمي الى واحد على الاقل من هذه البسيطات من اجل نقطة معطاة $x \in Q$ نعين الدليلات $i_1, \ldots, i_k$ بحيث تكون الاعداد c_i، في التمثيل:

$$x - P = c_1 g_{i_1} + \ldots + c_k g_{i_k},\ c_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} c_i \leqslant 1, \quad (2)$$

متناقصة: $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_k$. نؤكد عندئذ على ان النقطة x−P تنتمي الى البسيط $Q_{i_1 \ldots i_k}$، اي ان لدينا التمثيل:

$$x - P = \lambda_1 g_{i_1} + \lambda_2 (g_{i_1} + g_{i_2}) + \ldots + \lambda_k (g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}), \quad (3)$$

حيث $\lambda_i \geqslant 0 \ (i = 1, \ldots, k), \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \leqslant 1.$ بالفعل يمكننا وضع (3) على الشكل:

$$x - P = (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) g_{i_1} + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_k) g_{i_2} + \ldots + \lambda_k e_{i_k};$$

عند مقارنة ذلك بِـ(2) نرى اننا نستطيع وضع:

$$c_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k, \ c_2 = \lambda_2 + \ldots + \lambda_k, \ \ldots, \ c_k = \lambda_k.$$

نستنتج من ذلك:

$$\lambda_1 = c_1 - c_2 \geqslant 0, \ \lambda_2 = c_2 - c_3 \geqslant 0, \ \ldots, \ \lambda_k = c_k \geqslant 0$$

حيث

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = c_1 \leqslant 1,$$

بحيث ان x−P ينتمي بالفعل الى $Q_{i_1 \ldots i_k}$. بصفة خاصة، نرى ان البسيطات $Q_{i_1 \ldots i_k}$ ليست لها مثنى مثنى اية نقطة داخلية مشتركة، لان مجموع احجامها يساوي h^k اي يساوي حجم كل المعب Q.

ج. نعتبر الآن البسيط $Q_{i_1 \ldots i_k}$. إن صور رؤوسه P، $P, P + g_{i_1}$، $P + g_{i_1} + \ldots + g_{i_k}$.، بواسطة التطبيق $\varphi(u)$ تمثل $k+1$ نقطة على السطح S نرمز لها بِـ $\varphi(P), \varphi(P_{i_1}), \ldots, \varphi(P_{i_1 \ldots i_k})$ على التوالي. تعين ال k+1 نقطة، بدورها، بسيطا$\varphi(Q_{i_1 \ldots i_k})$ في الفضاء R_n محاطا بالسطح S بمعنى ان كل رؤوسه تنتمي الى السطح. يمكننا إذن ان نحيط السطح S بِـ $k!$ بسيطا $\varphi(Q_{i_1 \ldots i_k})$. إذا اعتبرنا الآن تجزئة Π للفضاء R_k الى مكعبات $Q^{(j)}$ اضلاعها h وعزلنا منها المكعبات المحتواه باكملها في الساحة U، ثم قسمنا كلاً من هذه المكعبات الاخيرة الى $k!$ بسيطا $Q^{(j)}_{i_1 \ldots i_k}$ من نفس المساحة وانشأنا البسيطات الموافقة لها $\varphi(Q^{(j)}_{i_1 \ldots i_k})$، فإن هذا الانشاء، المأخوذ باكمله، يعطي سطحا متعدد الوجوده Π_h تنتمي كل رؤوسه الى السطح S أي سطح محاط بِـS.

د. نحسب مساحة السطح المتعدد الوجوه Π_h. إن حجم البسيط $\varphi(Q^{(j)}_{i_1 \ldots i_k})$ de sommets $\varphi(P), \varphi(P_{i_1}), \ldots, \varphi(P_{i_1 \ldots i_k})$

هو:

$$(4)\quad \frac{1}{k!}\,|\,[\varphi(P+g_{i_1})-\varphi(P),\quad \varphi(P+g_{i_1}+g_{i_2})-\varphi(P),\ \ldots$$
$$\ldots,\varphi(P+g_{i_1}+\ldots+g_{i_k})-\varphi(P)]\,|.$$

من اجل $\delta > 0$ معطى، نبحث عن $\varepsilon > 0$ بحيث نكون المتراجحة:

$$|\,\varphi'(u')-\varphi'(u'')\,|\leqslant \varepsilon$$

محققة بمجرد تحقق: $|\,u'-u''\,|\leqslant \delta.$. إذا كانت اقطار المكعبات $Q^{(j)}$ لا تتجاوز δ فإن نظرية المتوسط 24.1 (6) تعطى:

$$\varphi(P_j+g^{(j)}_{i_1})-\varphi(P_j)=\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_1}+\varepsilon^{(j)}_1\delta,$$
$$\varphi(P_j+g^{(j)}_{i_1}+g^{(j)}_{i_2})-\varphi(P_j)=\varphi'(P_j)\,(g^{(j)}_{i_1}+g^{(j)}_{i_2})+\varepsilon^{(j)}_2\delta,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(P_j+g^{(j)}_{i_1}+\ldots+g^{(j)}_{i_k})-\varphi(P_j)=$$
$$=\varphi'(P_j)\,(g^{(j)}_{i_1}+\ldots+g^{(j)}_{i_k})+\varepsilon^{(j)}_k\delta,$$

حيث $|\,\varepsilon^{(j)}_i\,|\leqslant\varepsilon,\ i=1,\ldots,k.$. بنقل هذه العبارات في (4) وتطبيق 55.3 ر، س نحصل على:

$$|\,\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})\,|^2=\frac{1}{(k!)^2}\,|\,[\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_1}+\varepsilon^{(j)}_1\delta,\ \ldots$$
$$\ldots,\varphi'(P_j)\,(g^{(j)}_{i_1}+\ldots+g^{(j)}_{i_k})+\varepsilon^{(j)}_k\delta]\,|^2=$$
$$=\frac{1}{(k!)^2}\,|\,[\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_1}+\varepsilon^{(j)}_1\delta,\ \ldots,\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_k}+\varepsilon^{(j)}_k\delta]\,|^2=$$
$$=\frac{1}{(k!)^2}\,|\,[\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_1},\ \ldots,\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_k}]\,|^2+$$
$$+\frac{C_n}{(k!)^2}\,\varepsilon\delta\,(M+\varepsilon\delta)^{2k-1}\theta,\qquad |\,\theta\,|\leqslant 1,$$

حيث

$$M=\sup_{i,\,j}|\,\varphi'(P_j)\,g^{(j)}_{i_1}\,|\leqslant D\delta,\qquad D=\sup\|\,\varphi'(u)\,\|.$$

يمكن كتابة العبارة $C_n\varepsilon\delta\,(M+\varepsilon\delta)^{2k-1}\theta$ كما يلي:

$$C_n\varepsilon\delta^{2k}\,(D+\varepsilon)^{2k-1}\theta=C'_n\varepsilon\delta^{2k}\theta_1,\qquad |\,\theta_1\,|\leqslant|\,\theta\,|\leqslant 1.$$

عند القيام بتبديل للأشعة في الحد الاول من الطرف الثاني لعبارة $|Q(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|^2$ نحصل على:

$$|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|^2=\frac{1}{(k!)^2}\|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]\|^2\times$$
$$\times\left(1+\frac{C'_n\varepsilon\delta^{2k}\theta_1}{\|\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k\|^2}\right),$$

وهذا يستلزم نظراً للكوْن المؤثر $\mathfrak{h}_j(n)$ في (1) غير منحل:

$$|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|^2=\frac{1}{(k!)^2}\|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots$$
$$\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]\|^2\left(1+\frac{C'_n\varepsilon\theta_1}{c^2}\right),$$

اي ان:

$$|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|=\frac{1}{k!}\|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]\|\sqrt{1+\frac{C''_n\varepsilon\theta_1}{c^2}}.$$

بمراعاة المتراجحات: $\|[\varphi(P_j)g^{(j)}_1,\ldots$ و $\sqrt{1+\mu}\leqslant 1+\frac{\mu}{2}$

$$\ldots,\varphi(P_j)g^{(j)}_k]\|\leqslant D^k\delta^k=D^k|Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k}|k!,$$

نجد أن:

$$|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|=\frac{1}{k!}|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]|+$$
$$+\frac{1}{2c^2}C''_n\varepsilon\theta_1D^kk!|Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k}|. \quad (5)$$

نجمع هذه العلاقات على كافة البسيطات $Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k}$ (من اجل j مثبت) نحصل على:

$$\sum_{(i)}|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|=|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]|+C'''_n\varepsilon\theta_2|Q^{(j)}|. \quad (6)$$

ثم نجمع على الاعداد j فتأتي العلاقة:

$$\sum_j\sum_{(i)}|\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|=\sum_j|[\varphi'(P_j)g^{(j)}_1,\ldots,\varphi'(P_j)g^{(j)}_k]|+C'''_n\varepsilon\theta_3|U| \quad (7)$$

إن الحد الاول الوارد على اليمين يساوي المجموع التكاملي الذي يُعطيه تعريف مساحة سطح 16.3 ـ ب (راجع ايضا 33.3 ـ جـ). عندما يؤول ε الى 0، نلاحظ ان هذا المجموع يؤول الى مساحة السطح؛ يؤول الحد الثاني بطبيعة الحال الى 0. وهكذا فإن نهاية مساحات السطوح المتعددة الوجوه التي انشأناها تساوى مساحة السطح الذي انطلقنا منه. وهو ما ذهبنا اليه.

ر. نفرض ان لدينا تابعا $f(x)$ على السطح S وعلى جوار له، مستمرا بتقطع ومحدودا (بالقيمة المطلقة) بعدد M. لو ضربنا قبل جمع العلاقات (6) العلاقة ذات الرتبة j في العدد $f(P^{(j)})$, لوجدنا مكان (7) العلاقة:

$$\sum_j f(P^{(j)}) \sum_{(i)} |\psi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})| = \sum_j f(P^{(j)}) |[\psi(P_j) g_1^{(j)}, \ldots$$

$$\ldots, \psi'(P_j) g_k^{(j)}]| + C_n \tilde{\varepsilon} \Theta_3 M|U|$$

حيث $|\theta_s| \leqslant 1$. إن نهاية الحد الاول من الطرف الايمن، عندما يؤول الى 0، هو تكامل السطح:

نلاحظ ان الحد الاول يختلف عن تكامل التابع $f(x)$ على السطح المتعدد الوجوه Π_h بكمية لامتناهية الصغر لأن لدينا من اجل تابع مستمر بانتظام $f(x)$، العلاقة:

$$\left|\int_{\Pi_h} f(x)\,dS - \sum_j f(P^{(j)}) \sum_{(i)} |\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|\right| =$$

$$= \left|\sum_{(i),\,j} \int_{\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})} f(x)\,dS - \sum_{(i),\,j} f(P^{(j)}) |\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})|\right| =$$

$$= \left|\sum_{(i),\,j} \sum_{\varphi(Q^{(j)}_{i_1\ldots i_k})} [f(x) - f(P^{(j)})]\,dS\right| < \varepsilon$$

وذلك عندما يكون h صغيرا بكفاية؛ باعتبار تابع مستمر بتقطع يمكننا الاستدلال بنفس الطريقة السابقة على كل قطعة استمرار منتظم للتابع $f(x)$، ثم جمع النتائج.

وهكذا يتبين ان التكامل على السطح S لكل تابع $f(x)$ مستمر بتقطع يمكن الحصول عليه كنهاية لتكاملات نفس التابع على بعض السطوح المتعددة الوجوه المتقاربة نحو السطح S.

56. 3 . الطبقة المولدة عن سطح ذي بعد k.

أ . ليكن S سطحا ثنائي البعد قابلا للإشتقاق في R_3. نرسم الناظم (العمود) (62. 1 ـ ب) عند كل نقطة من S ونرسم ايضا على كل من

هذه الناظمات قطعة مستقيمة طولها s ونرسم ايضا على كل من هذه الناظمات قطعة مستقيمة طولها h من جهتيْ السطح S. يسمى الجسم الثلاثي البعد $V_h(S)$ المحصل عليه بهذه الطريقة طبقة سمكها h مولدة عن السطح S.

ليكن L منحنيا قابلا للإشتقاق في R_3. نرسم عند كل نقطة المستوى الناظمي ونعتبر في هذا المستوى الدائرة المتمركزة عند النقطة وذات نصف القطر h. يسمى الجسم الثلاثي البعد $V_h(L)$ المحصل عليه بهذه الطريقة الطبقة ذات السمك 2h المولدة عن المنحنى L.

ب. تُعمم هذه التعاريف الاولية الى الحالة التي يكون فيها السطح من بعد k في الفضاء R_n، وهذا بالطريقة التالية.

ليكن S سطحا بعده k في R_n،

$$S = \{x \in R_n, x = \varphi(u), u \in U \subset R_n\},$$

او، بالتفصيل:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(u_1, \ldots, u_k). \end{cases} \qquad (1)$$

نفرض ان التابع $x = \varphi(u)$، أو (وهو الامر نفسه) التوابع $\varphi_1(u_1, \ldots, u_k), \ldots, \varphi_n(u_1, \ldots, u_k)$ تملك مشتقات مستمرة من الرتبة الاولى والثانية في الساحة U.

يوجد عند كل نقطة x من السطح S مستويا ماسا Π بعده k ومستويا نظيمياً (او ناظميا) بعده (n−k) [المتمم العمودي لِـΠ]. نعتبر في المستوى الناظمي الكرة ذات نصف القطر h المتمركزة عند النقطة x. إن اتحاد كل هذه الكرات تمثل مجموعة $V_h(S)$ بعدها n، نسميها طبقة بعدها n وسمكها 2h مولدة عن السطح S.

ج. تقبل الطبقة ذات البعد n المولدة عن السطح S، في بعض الحالات، تمثيلا وسيطيا «قانونياً» وهو التمثيل:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n) \equiv f_1(u, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n) \equiv f_n(u, v), \end{cases}$$

حيث تمثل التوابع $f_1, \ldots, f_n$ مشتقات اولى مستمرة في الساحة $U \times Q_h \subseteq R_n$. يمثل $U \subset R_k$ الساحة الابتدائية ذات البعد (n–k) وذات نصف القطر h المتمركزة في النقطة v=0، $u = (u_1, \ldots, u_k)$.

من جهة اخرى يجب على جملة التوابع (2) أن تحقق الشروط التالية:

1) من اجل v=0، ينبغي على التوابع $f_1(u, 0), \ldots, f_n(u, 0)$ ان تكون مطابقة على التوالي للتوابع $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ التي تعطي التمثيل الوسيطي للسطح S؛

2) من اجل $u \in U$ مثبت، تعطي التوابع (2) تمثيلا ايزومتريا للكرة ذات البعد (n–k) المتمركزة في النقطة $x = \varphi(u) \in S$.

إذا كان التطبيق (2) معطى، فمن السهل حساب القيمة المطلقة للمعين $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)}$ عند نقاط السطح S، أي من اجل القيم: $v_{k+1} = \ldots$. نعلم (65.3) ان تلك القيمة تساوي حجم صورة الخلية $= v_n = 0$، $a_1 \leqslant u_1 \leqslant a_1 + \delta, \ldots, a_k \leqslant u_k \leqslant a_k + \delta, 0 \leqslant v_{k+1}$ $\leqslant \delta, \ldots, 0 \leqslant v_n \leqslant \delta$، بواسطة التطبيق $x = f'(u, v)$ بعد قسمته على حجم هذه الخلية المساوي لـ δ^n. يحول لتطبيق $f'(u, v)$، من اجل $(u, v) = (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$ الخلية

$$(a_1 \leqslant u_1 \leqslant a_1 + \delta, \ldots, a_k \leqslant u_k \leqslant a_k + \delta) \subset U$$

لى متوازي الاضلاع في المستوى الماس للسطح S، المعرف باطوال ضلاعه: $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\delta, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}\delta$، كما يحوّل الخلية $(0 \leqslant v_{k+1} \leqslant \delta, \ldots, 0 \leqslant v_n \leqslant \delta) \subset V_h$ (التي حجمها δ^{n-k}) الى خلية في المستوى الناظمي لها نفس الحجم δ^{n-k} .

فيما يخص نسبة الاحجام، لدينا:

$$\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,v_n)}\right| = \frac{\left\|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\delta,\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\delta\right]\right\|\delta^{n-k}}{\delta^n} = \left\|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right]\right\|.$$

ينتج من ذلك بصفة خاصة، ان التطبيق (2)، بمجرد وجوده، تقابلي (ويقبل الاشتقاق وكذا تطبيقه العكسي) في جوار لكل نقطة عادية من السطح S، اي كل نقطة يكون فيها: $\left\|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1},\ldots,\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right]\right\| \neq 0.$ لدينا إذن، عند نقاط السطح S:

$$\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,v_n)}\right| du_1\ldots du_k = \left|\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_k)}{\partial(u_1,\ldots,u_k)}\right| du_1\ldots du_k,$$

اي ان جـــداء المعين اليعقـــوبي $\left|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,v_n)}\right|$ في $du_1\ldots du_k$ يساوي مساحة عنصر السطح S.

د. إذا كـــانـــت القيمـــة $v=(v_{k+1},\ldots,v_n)\neq 0$ مثبتـــة و$u=(u_1,\ldots,u_k)$ تتجول في المجموعة U فإن التوابع (2) تصف سطحا S_v بعده k من الطبيعي القول عنه إنه « مواز » لـS. بما ان صورتي الخلية $U \in (a_1 \leqslant u_1 \leqslant a_1+\delta,\ldots,a_k \leqslant u_k \leqslant a_k+\delta)$ والخلية $V \ni (b_{k+1} \leqslant v_{k+1} \leqslant b_{k+1}+\delta,\ b_n \leqslant v_n \leqslant b_n+\delta)$ بواسطة التطبيق f لا تنتميان، عموما، الى المستويين المتعامدين (ذي البعد k والبعد (n–k))، فإن الجداء $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,v_n)} du_1\ldots du_k$ ليس عنصرا من السطح S_v. لكن، إذا كان التطبيق $x=\varphi(u)$ في (1) يجعل صورتين الخليتين المشار اليهما اعلاه منتميان الى المستويين المتعامدين من اجل $v\neq 0$، فإن التعليل السابق يبقى قـائما وتمثـل العبـارة $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(u_1,\ldots,v_n)} du_1\ldots du_k$ مساحة عنصر من السطح S_v.

ر. إن مكاملة تابع $F(x)$ على طبقة $W_h(S)$ يتم، عموما، وفق القاعدة 85.3 ـ أ:

$$\int_{W_h(S)} F(x)\,dx = \int_{U\times Q_h} F(f(u, v)) \left| \frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (u_1, \ldots, v_n)} \right| du_1 \ldots dv_n. \quad (3)$$

لنجر المكاملة بالنسبة للمتغيرات u ، من اجل v مثبتة؛ نحصل عندئذ على التابع :

$$\Phi(v) = \int_U F(f(u, v)) \left| \frac{\partial (f_1, \ldots, f_n)}{\partial (u_1, \ldots, v_n)} \right| du_1 \ldots du_k. \quad (4)$$

إذا احتفظ التطبيق f بتعامد السطوح S_v على الكرات الموافقة لِـ u = ثابتا فإن التكامل (4) يمتد الى السطح S_v كما رأينا ذلك اعلاه. لدينا فيما يخص التكامل (3) :

$$\int_{W_h(S)} F(x)\,dx = \int_{Q_h} \Phi(v)\,dv, \quad (5)$$

الذي يمكن معالجته كما يلي: نبحث عن تكامل التابع $F(x)$ على السطح S_v ، ثم نكامل النتيجة على الكرة Q_h. في الحالة العامة التي يكون فيها السطح S_v. غير متعامد على الكرات u = ثابتا فإن العلاقة (5) تبقى، بطبيعة الحال، قائمة لكننا لا نستطيع الآن القول بأن الكمية $\Phi(v)$ هي تكامل التابع $F(x)$ على السطح S_v . يمكننا فقط ان نؤكد، حسب النظرية 53.3 ـ أ حول استمرار تكامل بالنسبة للوسيط، بأن التابع $\Phi(v)$ في (5) مستمر، إذن فهو على وجه الخصوص يؤول الى الكمية $\Phi(0)$ عندما يؤول v الى 0 ، علما ان هذه الكمية الاخيرة هي تكامل التابع $F(x)$ على السطح S.

س. يحدث أن يكون، في بعض الحالات، وجود تمثيل قانوني (2) للطبقة $W_h(S)$ بديهيا. لتكن مثلا S الكرة ذات البعد (n-1) نصف قطرها r في R_n ومركزها في النقطة 0 ، أو جزءا من هذه الكرة مساحته موجبة. عندئذ تكون الطبقة ذات البعد n $W_h(S)$ (حيث $(h < r)$) المولدة عن الكرة هي الساحة المحصل عليها بحذف من الكرة ذات نصف القطر r+h الكرة التي لها نفس المركز ذات نصف القطر r−h. يستنتج أي تمثيل

قانوني (2) من اي تمثيل للكره

$$x_1 = \varphi_1 (u_1, \ldots, u_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi_n (u_1, \ldots, u_{n-1})$$

باضافة الى الطرف الثاني من السطر الثاني الحد $(|v_n| \leqslant h)$. $v_n\varphi_l/r$. تمثل الكرات u = ثابتا قطع مستقيمة اطوالها 2h من انصاف المستقيمات (النصف) قطرية؛ ثم إن السطوح $S_v(-h \leqslant v \leqslant h < r)$ هي اجزاء سطوح كروية، نصف قطرها $r + v$ ، عمودية على انصاف المستقيمات (نصف) القطرية. وبالتالي فإن المساواة (5) تعني في الحالة الراهنة، ان تكامل التابع $F(x)$ في الطبقة $W_h(S)$ يمكن الحصول عليها بمكاملة التابع $F(x)$ على الجزء اللائق من سطح الكرة S_v ، ثم بالمكاملة بالنسبة لِـ v من r−h الى r+h.

ص. لنثبت هنا شرطا كافيا يضمن الوجود المحلي لتمثيل قانوني (2) من اجل سطح كيفي بعده k:

نظرية. إذا كان بالإمكان، من اجل سطح بعده k $S \subset R_n$، الاشارة فيما يتعلق بمستو ناظمي (أو نظيمي) $\gamma(x)$ ، لأساس متعامد ومتجانس مؤلف من الاشعة $g_{k+1}(x), \ldots, g_n(x)$ التي تقبل مشتقات مستمرة بالنسبة لِـ x فإن كل نقطة $x_0 \in S$ تقبل جوارا تكون فيه الطبقة $W_h(S)$ قابلة لتمثيل قانوني.

البرهان. ليكن $e_1, \ldots, e_n$ الاساس الابتدائي المتعامد والمتجانس للفضاء R_n و:

$$x_1 = \varphi_1 (u_1, \ldots, u_k), \ldots, x_n = \varphi_n (u_1, \ldots, u_k)$$

تمثيلا وسيطيا، بالنسبة لهذا الاساس، لسطح S بجوار نقطة x_0. نعتبر جملة التوابع:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_1 = \varphi_1 (u_1, \ldots, u_k) + v_{k+1} (g_{k+1}, e_1) + \ldots + v_n (g_n, e_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_n = \varphi_n (u_1, \ldots, u_k) + v_{k+1} (g_{k+1}, e_n) + \ldots + v_n (g_n, e_n). \end{array}\right. \quad (6)$$

من البديهي أن لـديـنـا، مـن اجـل $v_{k+1} = \ldots = v_n=0$، نقطـة x للسطح S. بتثبيت $u_1, \ldots, u_k$ نجمع الشعاع الذاهب الى النقطة x على السطح S مع الشعاع $\rho = v_{k+1}g_{k+1} + \ldots + v_n g_n$ الواقع في المستوى الناظمي $\gamma(x)$ ؛ عندما تتجول الوسيطات $v_{k+1}, \ldots, v_n$ في كرة نصف قطرها r في R_{n-k}، فإن الشعاع $x + \rho$ يتجول في كرة ايزومترية نصف قطرها r ومركزها x في المستوى $\gamma(x)$. يتبين من ج ان معين المصفوفة $\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)}$ غير منعدم عند النقاط العادية للسطح S، بحيث ان التطبيق (6) تقابلي في جوارٍ لكل نقطة. من مثل هذه النقاط، وهو المطلوب تبيانه.

ب. لنبرهن انه بالامكان، في جوار لأية نقطة عادية x من السطح S، اختيار اساس من النوع المطلوب، في النظرية ص، في المستوى الناظمي $\gamma(x)$.

نظرية. من اجل كل نقطة عادية $x_0 = \varphi(u_0)$ في السطح S، يوجد جوار $U_0 \subset R_k$ يمكن أن نعرف فيه التوابـع الشعـاعيـة المتعـامـدة والمتجـانسـة $g_j(\varphi(u)), j = k+1, \ldots, n$ التي لها مشتقات مستمرة وتأخذ قيمها في المستوى الناظمي $\gamma(x)$.

البرهان. نختار اساس متعامدا ومتجانسا كيفيا $g_{k+1}(x_0), \ldots, g_n(x_0)$ في المستوى $\gamma(x_0)$. ثم من اجل كل نقطة اخرى $x \in S$، نبحث في المستوى $\gamma(x)$ عن الاشعة $q_{k+1}(x), \ldots, q_n(x)$ التي تتطابق مساقطها في المستوى $\gamma(x_0)$ مع الاشعة $g_{k+1}(x_0), \ldots, g_n(x_0)$ على التوالي. من المعروف ان مثل هذه الاشعة موجودة ومعرفة بطريقة وحيدة في جوار لنقطة x_0. تعطي لنا خاصية التعامد والتجانس للأشعة $q_{k+1}(x), \ldots, q_n(x)$ الاشعة المطلوبة $g_{k+1}(x), \ldots, g_n(x)$.

حتى نعين الشعاع $q_{k+j}(x)$ علينا ان نكتب جملة المعادلات:

$$(7) \quad \begin{cases} (q_{k+j}(x), \psi_i(x)) = 0, \quad \psi_i(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial u_i}, \quad i = 1, \ldots, k; \\ (q_{k+1}(x) - g_{k+j}(x_0), \; g_r(x_0)) = 0 \\ \qquad (r = k+1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, n-k). \end{cases}$$

ليكن $u \in U \subset R_k, \; y^j \in R_n,$ معلومين، نعتبر التطبيق من الثنائية (u, y^j) في R_n الذي تعرفه الدساتير :

$$(8) \quad \begin{cases} \xi_1 = (y^j, \; \psi_1(\varphi(u))), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_k = (y^j, \; \psi_k(\varphi(u))), \\ \xi_{k+1} = (y^j - g_{k+j}(x_0), \; g_{k+1}(x_0)), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_n = (y^j - g_{k+j}(x_0), \; g_n(x_0)). \end{cases}$$

إن هذا التطبيق خطي بالنسبة لِـ y ، ثم إن مشتقه بالنسبة لـ y معين بمصفوفة احداثيات الاشعة $\psi_1(\varphi(u_0)), \ldots$ ، $\psi_k(\varphi(u)), \; g_{k+1}(x_0), \ldots,$. $g_n(x_0)$. نلاحظ ان هذه المصفوفة غير منحلة من اجل $u = u_0$ على الاقل؛ أما القيمة $u = u_0$ فهي توافق نقطة عادية من السطح، حيث ان الاشعة $\psi_1(\varphi(u))$ ، ... ، $\psi_k(\varphi(u_0))$ مستقلة خطيا، وتشكل الاشعة $g_{k+1}(x_0)$ ، ... ، $g_n(x_0)$ اساسا متعامدا ومتجانسا في المستوى الناظمي $\gamma(x_0)$ ، وبالتالي :

$$|[\psi_1(\varphi(u_0)), \ldots, \psi_k(\varphi(u_0)), \; g_{k+1}(x_0), \ldots, g_n(x_0)]| =$$
$$= |[\psi_1(\varphi(u_0)), \ldots, \psi_k(\varphi(u_0))]| \neq 0$$

من جهة اخرى فإن الاطراف الاولى في الجملة (8) تنعدم من اجل $u = u_0$ و $y^j = g_{k+j}(x_0)$. بتطبيق النظرية 35.1 حول التابع الضمني، يتبين انه يوجد في جوار للنقطة u_0 تابع شعاعي وحيد هو $y^j(u)$ يعدم بشكل تطابقي الاطراف الاولى في الجملة (8)، ويساوي $g_{k+j}(x_0)$ من

اجل $u = u_0$. نحصل بوضع $q_{k+j}(u) = y^j(u)$ على حل الجملة (7)، وهو المطلوب.

إن التوابع $q_{k+j}(u)$ مستمرة وقابلة للإشتقاق بالنسبة لِـ u وذلك بسبب قابلية اشتقاق التوابع $\psi_i(\varphi(u))$ (نفرض ان السطح S يقبل الاشتاق مرتين) وبفضل نظرية التابع الضمني.

يُعطى تعامد وتجانس الجملة $q_{k+j}(u)$ التوابع $g_{k+j}(u)$ المستمرة والقابلة للإشتقاق لأن معاملات التعامد والتجانس يعبّر عنها خطيا بواسطة نسب الجداءات السلمية للأشعة $q_{k+j}(u)$ على المعينات ذات الشكل:

$$|[q_k(u)]|^2, \quad |[q_{k+1}(u), q_{k+2}(u)]|^2, \ldots, |[q_{k+1}(u), \ldots, q_n(u)]|^2$$

(راجع ل.7. 15)؛ إن هذه المعينات مستمرة بالنسبة لِـu وتساوي 1 من اجل $u = u_0$، وبالتالي فهي غير منعدمة في جوار للنقطة u_0 . انتهى برهان النظرية.

66. 3 . مساحة سطح بوصفه نهاية المساحة المتوسطة للطبقة ذات البعد n، التي تولدها.

أ. ليكن S سطحا ثنائي البعد في R_3 و $W_h(S)$ الطبقة ذات السمك 2h المولدة عنها (56. 3 ـ أ). يُسمى حجم الطبقة بعد قسمته على 2h المساحة المتوسطة للطبقة، هناك تخمين جد طبيعي يتحقق بالفعل، على الأقل، في الحالة التي يكون فيها $S \subset R_3$ مستويا وهو يتمثل في كوْن **المساحة المتوسطة للطبقة تؤول الى مساحة السطح S عندما يؤول h الى 0.**

بطريقة مماثلة، إذا اعتبرنا منحنيا L قابلا للإشتقاق في R_3 و الطبقة $W_h(L)$ ذات السمك 2h المولدة عنها (56. 3 ـ أ). يسمى حجم الطبقة بعد قسمته على πh^2 الطول المتوسط للمنحنى؛ يمكننا القول أيضا كما هو الحال في الحالة التي يكون فيها $L \subset R_3$ مستقيما، أن **الطول المتوسط للطبقة يؤول الى طول المنحنى L عندما يؤول h الى 0.**

ب. إن التخمنيين السابقين صحيحان، وسوف نصيغ نظرية عامة تتعلق بسطح بعده k في R_n.

ليكن $S \subset R_n$ مسطحا بعده k و $W_h(S)$ الطبقة ذات السمك 2h المولدة عنه. يمسى حجم الطبقة بعده قسمته على حجم الكرة ذاتها البعد (n−k) ونصف القطر l المساحة المتوسطة للطبقة (من اجل 1<k، اما واذا كان k=1 فيسمى الطول المتوسط للطبقة).

نظرية. إذا قبلت الطبقة ذات البعد n: $W_h(S)$ وذات السمك $h \leqslant h_0$ المولدة عن السطح S تمثيلا قانونيا 56.3 (2) فإن المساحة المتوسطة للطبقة تؤول، لما h←0، الى مساحة السطح S.

البرهان. إن حجم الطبقة $W_h(S)$ معطى بالتكامل 56.3 (3) $(F(x) \equiv 1)$:

$$|W_h(S)| = \int\limits_{U \times V_h} \left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right| du_1 \ldots dv_n.$$

لنجر المكاملة بالنسبة للمتغيرات u، من أجل v مثبتة؛ نحصل بذلك على التابع:

$$\Phi(v_{k+1}, \ldots, v_n) = \int\limits_U \left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right| du_1 \ldots du_k.$$

إن التابع $\Phi(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ مستمر بالنسبة لمتغيراته. إذا كاملنا Φ على الكرة V_h، ثم قسمنا النتيجة على حجم الكرة فإننا نحصل على المساحة المتوسطة للطبقة S_h، المساوية إذن للقيمة المتوسطة للتابع $\Phi(v_{k+1}, \ldots, v_n)$ في الكرة V_h. تؤول هذه القيمة المتوسطة، لما h←0، الى قيمة التابع $\Phi = (v_{k+1}, \ldots, v_n)$ عند النقطة $v_{k+1} = \ldots = v_n = 0$. وهكذا فإن المساحة المتوسطة للطبقة تؤول الى:

$$\Phi(0, \ldots, 0) = \int\limits_U \left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right|_{v=0} du_1 \ldots du_k.$$

بإستخدام قيمة المعين اليعقوبي $\left| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right|$ على السطح S المحصل عليه اعلاه (56.3 ـ ج) نرى أن:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|W_h(S)|}{|Q_h|}=\int_U \left|\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}\right]\right| du,$$

وهي قيمة تمثل مساحة السطح S.

ج. مثال. نبحث عن مساحة سطح الكرة ذات البعد (n−1) $S = S_{n-1}(r)$ وذات نصف القطر s في R_n. كما سبق ان رأينا في 56.3 ـ س فإن الطبقة $W_h(S)$ ذات البعد n المولدة عن سطح هذه الكرة هي الساحة المحصل عليها تحذف من الكرة Q_{r+h} ذات نصف القطر r+h. إن الحجم $|Q_r|$ لكرة ذات نصف القطر r في الفضاء ذي البعد n يساوي، حسب 65.3 ـ ب:

$$|Q_r|=\frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

بتطبيق النظرية ب نرى ان مساحة سطح الكرة ذات البعد (n−1) ونصف القطر r في الفضاء R_n تساوي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{|W_h(S)|}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{|Q_{r+h}|-|Q_{r-h}|}{2h}=\frac{d|Q_r|}{dr}=\frac{n\pi^{n/2}r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

د. نستخلص عند دمج نتائج ب و56.3 ـ ط: إذا كان السطح $S=\{x=\varphi(u),\ u\in U\subset R_k\}$ معطى بتابع يقبل الاشتقاق مرتين $(R_k\to R_n)$ $\varphi(u)$، وكانت x_0 نقطة عادية من هذا السطح فإنه يوجد جوار G للنقطة x_0 يمكن ان ننشيء فيه طبقة بعدها $W_h(S)$ سمكها 2l مولدة عن السطح S، يمكن حساب مساحة جزء السطح الواقع في الجوار G على شكل نهاية المساحة المتوسطة للطبقة عندما يؤول h الى 0.

هناك سؤال يطرح نفسه: هل توجد نظرية مماثلة بمفهوم غير محلي، أي من السطح S بأكمله؟ يرتبط هذا السؤال باعتبارات طوبولوجية، مثلا بعدم وجود نقاط تقاطع ذاتي للطبقة $W_h(S)$، والاجابة عليه معقدة بشكل لا يسمح لنا بمعالجة هذه القضية في درسنا هذا.

§ 3 .7 . التكاملات الموسعة

3 .17 . تعاريف أساسية. كنا وضعنا تعريف تكامل تابع محدود على ساحة محدودة (مجموعة جوردانية) في الفضاء R_n. نعمم هنا هذا التعريف الى الحالات التالية:

أ) تابع محدود محليا في ساحة مغلقة وغير محدودة (تكامل من النمط الاول)،

ب) تابع غير محدود في ساحة مغلقة ومحدودة (تكامل من النمط الثاني)،

ﺟ) تابع غير محدود في ساحة مغلقة غير محدودة (تكامل من النمط الثالث). نسمي هنا ساحة **مغلقة** مجموعة مغلقة تمثل ملاصق مجموعة مفتوحة.

أ . نفرض أن هناك ساحة مغلقة غير محدودة $G \subset R_n$ نعرّف عليها تابعا مقبولا $f(x)$، أي محدودا ومستمرا بتقطع على كل مجموعة محدودة، نريد ان نعطي معنى للتكامل الموسع من النمط الاول:

$$If = \int_G f(x)\, dx. \qquad (1)$$

نختار بشكل كيفي متتالية ساحات مغلقة ومحدودة $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_m \subset \ldots \subset G$ تحقق الشروط الموالي: من اجل كل كرة $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$، يوجد عدد m بحيث تحوي الساحة G_m (وبالتالي كل ساحة موالية لِـ G_m) المجموعة $V_\rho \cap G$. نقول عن مثل هذه المتتالية من الساحات انها **متتالية معمقة.** إن التكاملات

$$I_m f = \int_{G_m} f(x)\, dx$$

موجودة. إذا آلت المتتالية $I_m f$، عندما $m \to \infty$، الى نهاية (منتهية) لا تتعلق باختيار المتتالية المعمقة G_m، نقول ان التكامل (1) **موجود** (أو **متقارب**) ونضع تعريفاً:

$$If \equiv \int_G f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\, dx. \qquad (3)$$

إذا كانت التكاملات $I_m f$ لا تقبل نهاية $m \to \infty$، نقول عن التكامل (1) متباعد.

ب. نفرض ان لدينا في ساحة مغلقة ومحدودة $G \subset R_m$ تابعا مقبولا f(x)؛ يعني ذلك، مرة أخرى، انه توجد مجموعة قابلة للإهمال $Z \subset G$ بحيث يكون التابع f(x) خارج كل جوار (32.3 ـ ب) لها محدودا ومستمرا بتقطع. نريد تعريف التكامل الموسع من النمط الثاني:

$$If = \int_G f(x)\, dx. \tag{4}$$

نختار بشكل كيفي متتالية مجموعات جوردانية $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G$ بحيث تكون كل مجموعة متممة $G - G_m$ محتوية Z تماما في داخلها، وهي نفسها محتواة في ε_m ـ جوار للمجموعة Z، وهذا مع $\varepsilon_m \to 0$ لما $m \to \infty$. نقول عن مثل هذه المتتالية $G_1 \subset G_2 \subset \cdots$ إنها معمقة. إذا كانت التكاملات

$$I_m f = \int_{G_m} f(x)\, dx \tag{5}$$

تؤول، لما $m \to \infty$، الى نهاية لا تتعلق باختيار المتتالية G_m، نقول ان التكامل (4) موجود أو متقارب (نقول انه متباعد إذا كان الامر عكس ذلك) ونضع تعريفاً:

$$If \equiv \int_G f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\, dx. \tag{6}$$

ج. نفرض ان لدينا، في ساحة مغلقة وغير محدودة $G \subset R_n$، تابعا $f(x)$ قد يكون غير محدود. على وجه التحديد، نفرض ان كل كرة $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$ تحوي مجموعة قابلة للإهمال Z_ρ بحيث يكون التابع f(x) محدودا ومستمرا بتقطع على الفرق بين $V_\rho \cap G$ وكل جوار لـ Z_ρ. نقول عن مثل هذه التوابع إنها مقبولة. يصاغ تعريف «التكامل الموسع من النمط الثالث»

$$If = \int_G f(x)\, dx \tag{7}$$

كما يلي. نسمي كل متتالية مجموعات $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ جوردانية محدودة متتالية معمقة إذا استطعنا، من اجل كل كرة $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$ ومن اجل كل$0 < \varepsilon$، ايجاد عدد m بحيث تحوي الساحة G_m (وبالتالي كل ساحة موالية لِـG_m) المجموعة $V_\rho \cap G$ باستثناء الـ ε - جوار للمجموعة Z_ρ ، وبحيث إذا كانت هذه الساحة G_m من اجل عدد $\rho_1 > \rho$ محتواة في الكرة V_{ρ_1} فهي لا تحوي الـ ε - جوار للمجموعة Z_{ρ_1}. عندئذ تكون التكاملات:

$$I_m f = \int_{G_m} f(x)\, dx \tag{8}$$

معرفة، إذا آلت هذه التكاملات، لما $m \to \infty$ ، نحو نهاية If لا تتعلق باختيار المتتالية المعمقة G_m، نقول ان التكامل (7) موجود أو متقارب (نقول إنه متباعد إذا كان الأمر عكس ذلك)، ونضع تعريفا:

$$If \equiv \int_G f(x)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{G_m} f(x)\, dx. \tag{9}$$

د . يتمتع انشاء المتتاليات المعمقة في الحالات الثلاث أ، ب، ج بخاصية مشتركة: إذا كانت $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ et $G'_1 \subset G'_2 \subset \ldots$ متتاليتين معمقتين (باعتبار تكامل موسع من نفس النمط) فإن كل ساحة G_m من المتتالية الاولى محتواة في ساحة $G'_{m'}$ من المتتالية الثانية، والعكس بالعكس. وبالتالي، إذا كانت لدينا متتاليتان معمقتان بانه يمكن دائما انشاء المتتالية المعمقة «المزدوجة»:

$$G_{i_1} \subset G'_{i'_1} \subset G_{i_2} \subset G'_{i'_2} \subset \ldots \tag{10}$$

ينتج من ذلك ان وجود نهاية للتكاملات من النمط (2) وفق كل متتالية معمقة يستلزم لوحده تطابق كل هذه النهايات: يجب ان تكون النهاية وفق المتتالية المزدوجة (10) مطابقة للنهاية وفق النهاية. $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ ومنه يأتي تساوي هذه النهايات ومطابقة أيضاً للنهاية وفق المتتالية $G'_1 \subset G'_2 \subset \ldots$.

ر. نرى إذن، في جميع الحالات، ان تعريف التكامل الموسع If لتابع مقبول f(x) يرد الى تعريف نهاية متتالية تكاملات غير موسعة للتابع $f(x)$

وفق متتالية معمقة كيفية. يأتي من ذلك، بصفة خاصة، ان التكامل الموسع كما هو الامر فيما يخص التكامل غير الموسع، يتمتع بخاصية الخطية: إذا كان تكاملاً تابعين $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متقاربين فإن تكامل كل عبارة خطية من الشكل $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)$ (حيث c_1 و c_2 عددان) متقارب أيضا، ولدينا:

$$I(c_1f_1+c_2f_2)=c_1If_1+c_2If_2.$$

27.3 . التكاملات الموسعة لتوابع غير سالبة والتقارب المطلق.

أ. إذا اضفنا الى الافتراضات 17.3 الشرط الناص على أن التابع $f(x)$ غير سالب: $0\leqslant f(x)$، تصبح كل تعاريف التكاملات الموسعة 173، أ ـ ج اكثر بساطة. يكفي اعتبار التكاملات غير الموسعة من النمط (2) من اجل متتالية معمقة واحدة G_m والتعرّف عما إذا كانت متتالية هذه التكاملات محدودة. بفضل العلاقة المشار اليها في 17.3 ـ د والتي تربط المتتاليات المعمقة المختلفة، يتبين ان التكاملات (2) محدودة على كل متتالية معمقة أخرى عندما تكون هذه التكاملات محدودة على متتالية G_m والتابع $f(x)$ غير سالب. لكن عندما تكون متتالية التكاملات I_mf محدودة و $I_1f\leqslant I_2f<\ldots$ فإن نهاية الاعداد I_mf وفق كل متتالية معمقة موجودة، ومنه يأتي، حسب 17.3 ـ د، وجود التكامل الموسع الموافق لها.

ب. نفرض أن $0<f(x)<g(x)$ وان التابعين $f(x)$ و $g(x)$ مقبولان (17.3 ـ ج). إذا كان التكامل على الساحة G لـ$g(x)$ موجودا فإن الامر كذلك فيما يخص $f(x)$ ولدينا $If\leqslant Ig$. بالفعل، فإن تكاملات $g(x)$ على متتالية معمقة من الساحات تؤول الى نهاية، وعلية فهذه التكاملات محدودة من الأعلى بالعدد Ig، وبالتالي فإن تكاملات $f(x)$ على نفس المتتالية المعمقة محدودة من الأعلى بالعدد Ig، ينتج من ذلك عند مراعاة أ، ان التكامل If موجود ولدينا العلاقة: $If\leqslant Ig$.

إذن، نحصل على النتيجة: إذا كان لدينا $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ وكان التابعان $f(x)$ و $g(x)$ مقبولين وتكامل $f(x)$ على الساحة G متباعداً فإن التكامل على نفس الساحة للتابع $g(x)$ متباعد أيضا.

تمثل النتيجتان السابقتان **مقياس المقارنة** للتكاملات الموسعة.

ج. إذا كان $f(x)$ تابعا مقبولا وغير سالب وكان التكامل $If = I_Gf$ على ساحة G متقارباً، فإن التكامل I_Qf على كل ساحة $Q \subset G$ متقارب أيضا، ولدينا: $I_Qf \leqslant I_Gf$. بالفعل، لنرمز بـ $\chi_Q(x)$ للتابع المميز للساحة Q. عندئذ نرى ان التابع $\chi_Q(x)f(x)$ مقبول عندما يكون $f(x)$ كذلك، وهو يحقق المتراجحة: $0 \leqslant \chi_Q(x)f(x) \leqslant f(x)$؛ بتطبيق أ نحصل على:

$$I_G\chi_Qf = I_Qf \leqslant I_Gf,$$

وهو المطلوب.

نحصل إذن على النتيجة التالية: إذا كان التكامل على ساحة Q لتابع مقبول $0 \leqslant f(x)$ متباعدا، فإن تكامل $f(x)$ على كل ساحة $Q \subset G$ متباعد أيضا.

د. إذا كان $f(x)$ تابعا مقبولا يحقق $0 \leqslant f(x)$، وكان تكاملاه على مجموعتين جوردانيتين G' و G'' متقاربان، فإن تكامله على المجموعة $G = G' \cup G''$ متقارب أيضا.

عند تعويض G'' بـ $G'' - G' \cap G''$ يمكننا الاكتفاء بالنص على النتيجة السابقة في الحالة التي تكون فيها المجموعتان الجوردانيتان G' و G'' غير متقاطعتين. لتكن G'_m متتالية معمقة من المجموعات الجوردانية للمجموعة G' و G''_m متتالية معمقة من المجموعات الجوردانية للمجموعة G''. عندئذ تشكل المجموعات $G'_m \cup G''_m$، بطبيعة الحال، متتالية معمقة للمجموعة G.

وبالعكس، فإن كل متتالية معمقة G_m للمجموعة G تولد متتاليتين معمقتين حتما للمجموعتين G' و G'' $G'_m = G' \cap G_m$ et $G''_m = G'' \cap G_m$ على التوالي.

لدينا حسب 33.3 ـ ب:

$$\int_{G'_m \cup G''_m} f(x)dx = \int_{G'_m} f(x)\,dx + \int_{G''_m} f(x)\,dx \qquad (1)$$

وبما أن كلا من التكاملين الوردايين في الطرف الثاني يؤول الى نهايته فإن التكامل في الطرف الاول له أيضا نهاية. ينتج استنادا الى 17.3 ـ د، وجود تكامل التابع g)y1 على الساحة $G = G' \cup G''$ بصفة خاصة، إذا كانت الساحتان G' و G'' غير متقاطعتين فإن الانتقال الى النهاية في (1) يعطي:

$$\int_{G' \cup G''} f(x)\,dx = \int_{G'} f(x)\,dx + \int_{G''} f(x)\,dx.$$

من الواضح ان النتيجة المحصل عليها تشمل الحالة التي نعتبر فيها عددا كيفيا (منتهيا) من الساحات الجوردانية $G', G'', \ldots, G^{(k)}$.

د.مبدأ «المحلية». ليكن $0 \leqslant f(x)$ تابعا مقبولا وغير محدود في ساحة مغلقة ومحدودة $G \subset R_n$. إذا استطعنا، من اجل كل نقطة $a \in G$، إيجاد جوار V(a) يكون فيه التابع g)y1 قابلا للمكاملة، (أي ان التكامل الموسع من النمط الثاني للتابع g)y1 على V(a) متقارب) فإن التابع g)y1 يقبل المكاملة على كل الساحة G، وإذا استطعنا، من اجل نقطة $b \in G$ على الاقل ايجاد جوار V (6) يكون فيه التابع f(x) غير قابل للمكاملة، فإن f(x) لا يقبل المكاملة على كل الساحة G.

البرهان. بتثبيت، من اجل كل نقطة $a \in G$، جوار V(a) يكون فيه التابع f(x) قابلا للمكاملة نختار من بين هذه الجوارات تغطية منتهية $V(a_1), \ldots, V(a_k)$ للساحة G. ينتج بفضل د ان التابع المعتبر يقبل المكاملة على الاتحاد G للجوارات الواردة آنفا، وهو المطلوب اثباته.

يتبين من ج انه إذا كان التابع $f(x)$ غير قابل للمكاملة على الجوار $V(b)$ فإنه لا يقبل المكاملة على الساحة G.

س. **التكاملات المتقاربة مطلقا**. ليكن $g(x)$ تابعا مقبولا على ساحة $G \subset R_n$. نفرض وجود تابع مقبول غير سالب $h)y1$ تكامله على G متقارب. عندئذ إذا كان $|f(x)| \leqslant g(x)$ فإن التابعين $f(x)$ و $|f(x)|$ يقبلان أيضا المكاملة على الساحة G، ولدينا:

$$\left|\int_G f(x)\,dx\right| \leqslant \int_G |f(x)|\,dx \leqslant \int_G g(x)\,dx. \qquad (2)$$

لإثبات ذلك نعتبر متتالية معمقة كيفية $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ من المجموعات الجوردانية: لدينا من اجل $m>k$:

$$\left|\int_{G_m} f(x)\,dx - \int_{G_k} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{G_m - G_k} f(x)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{G_m - G_k} \left|f(x)\right| dx \leqslant \int_{G_m - G_k} g(x)\,dx = \int_{G_m} g(x)\,dx - \int_{G_k} g(x)\,dx.$$

إن الطرف الأخير هنا غير سالب ويؤول الى الصفر عندما يؤول k الى ∞ وm الى ∞ وذلك بفضل تقارب تكامل $g(x)$ بتطبيق مقياس كوشي نرى ان تكاملات التابع $f(x)$ على الساحات G_m لها نهاية، يعني ذلك، حسب 17.3 ـ ج، ان تكامل $f(x)$ على G موجود. إن وجود تكامل $|f(x)|$ ينتج من ب. لما ننتقل الى النهاية؛ بجعل m يؤول الى ∞، في المتراجحة:

$$\left|\int_{G_m} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{G_m} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{G_m} g(x)\,dx,$$

نصل الى العلاقة المطلوبة (2).

نقول عن تكامل تابع $f(x)$ يتمتع بكل الشروط الواردة اعلاه أنه **متقارب مطلقا**. الجدير بالملاحظة انه لا يوجد عموما في R_n تكامل متقارب وغير متقارب مطلقا (انظر التمرين 6).

37.3 . أمثلة.

أ. ليكن $0 \leqslant f(r)$ تابعا معطى على نصف المستقيم $0 < a \leqslant r < \infty$ ومستمرا

بتقطع على كل مجال منته $a \leqslant r \leqslant b$. بوضع $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2$ نحصل على تابع مقبول هو $f(r) = f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$ معرف في R_n نعتبر هذا التابع في الساحة $G = \{x \in R_n : |x| \geqslant a, \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$ حيث يمثل Σ مجموعة معطاة مساحتها موجبة على سطح كرة الوحدة في R_n. نناقش تقارب التكامل الموسع من النمط الاول:

$$\int_G f(r)\, dx. \tag{1}$$

نختار كمتتالية معمقة الساحات: $G_m = \{x \in R_n : a \leqslant |x| \leqslant m, \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$

نحسب تكامل التابع ($s1$ g) على الساحة G_m بتطبيق القاعدة 56.3 ـ أ، والتي تنص على أن:

$$\int_{G_m} f(r)\, dx = \int_{r=a}^{m} \left\{ \int_{r\Sigma} f(r)\, d(r\Sigma) \right\} dr,$$

حيث توجد المجموعة $r\Sigma$ على سطح الكرة ذات نصف القطر r. بما ان التابع $f(r)$ ثابت على هذا السطح، فإن التكامل الداخلي يساوي، حسب 36.3 ـ ج:

$$f(r)\, |r\Sigma| = f(r)\, r^{n-1}\, |\Sigma|.$$

لدينا في الاخير:

$$\int_{G_m} f(r)\, dx = |\Sigma| \int_{r=a}^{m} f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

لدراسة تقارب التكامل (1)، علينا أن نجعل m يؤول الى $+\infty$. ترد إذن مسألة تقارب هذا التكامل الى التقارب في R_1 للتكامل الموسع:

$$\int_a^{\infty} f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

فمثلا، يمكننا القول، باستخذام النتيجة ي 11.11 ـ أ، أن التكامل:

$$\int_G \frac{dx}{r^{\alpha}}$$

متقارب من اجل $\alpha > n$ ومتباعد من اجل $\alpha \leqslant n$. نشير الى أن النتيجة لا تتعلق باختيار المجموعة Σ على سطح كرة الوحدة في R_n، التي تعين الساحة G (شريطة ان تكون للمجموعة Σ ساحة موجبة).

يتبين من مقياس المقارنة 27.3 ـ ب ان طبيعة التكامل

$$\int_G \theta(x) \frac{dx}{r^{\alpha}} \qquad (2)$$

(حيث $\theta(x)$ تابع مقبول له نهاية موجبة لما $|x| \to \infty$.)

هي طبيعة التكامل الوارد آنفا. إذا كان التابع $\theta(x)$ محدودا فقط لما $|x| \to \infty$ فإنه لا يمكننا القول بالاستناد الى مقياس المقارنة 27.3 ـ ب أن التكامل (2) متقارب من اجل $\alpha > n$.

ب. ليكن $0 \leqslant f(r)$ تابعا معطى على مجال $0 \leqslant r \leqslant b$، مستمرا بتقطيع على كل مجال $a \leqslant r \leqslant b$ $(0 < a)$، قد يكون غير محدود $r \to 0$. نحصل، عند وضع $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = |x|^2$، على تابع مقبـول $f(r) = f\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$

معـرف من اجل $0 < |x| \leqslant b$ (حيث R_n). نعتبر هذا التابع في الساحة $G = \{x \in R_n, 0 < |x| \leqslant b, \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$ حيث Σ مجموعة (قياسها موجب) على سطح كرة الوحدة في R_n، نناقش الآن تقارب التكامل الموسع من النمط الثاني:

$$\int_G f(r)\, dx. \qquad (3)$$

نختار كمتتالية معمقة الساحات:

$$G_m = \left\{x \in R_n : \frac{1}{m} \leqslant |x| \leqslant b,\ \frac{x}{|x|} \in \Sigma\right\}.$$

لدينا باتباع طريقة مماثلة للتي سلكناها في أ:

$$\int_{G_m} f(r)\, dx = |\Sigma| \int_{r=1/m}^{b} f(r)\, r^{n-1}\, dr$$

وهكذا فإن مسألة تقارب التكامل (3) يرد الى التقارب في R_1 للتكامل الموسع من النمط الثاني:

$$\int_0^b f(r)\, r^{n-1}\, dr.$$

فمثلاً، نرى باستخدام النتائج ي 22.11 ـ أ أن التكامل $\int_G \frac{dx}{r^{\alpha}}$

متقارل من أجل $\alpha < n$ ومتباعد من أجل $\alpha \geqslant n$.

يتبين من مقياس المقارنة 27.3 ـ ب أن طبيعة التكامل:

$$\int_G \theta(x) \frac{dx}{r^\alpha} \qquad (4)$$

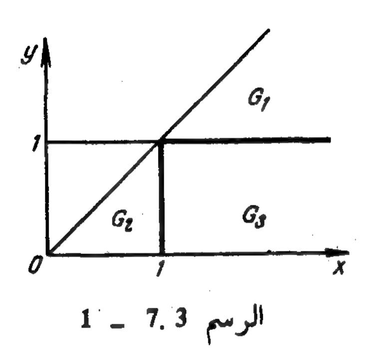
(حيث $\theta(x)$ تابع مقبول له نهاية موجبة لما $x \to 0$.) هي طبيعة التكامل الوارد آنفا. إذا كان التابع $\theta(x)$ محدودا فقط من اجل $x \to 0$ فان مقياس المقارنة 27.3 ـ ب لا يصلح سوى لإثبات تقارب التكامل (4) من اجل $\alpha < n$.

ج. نحصل كنتيجة من أ وب على ان: التكامل من النمط الثالث للتابع على «زاوية صلبة» $G = \{x \in R_n : \frac{x}{|x|} \in \Sigma\}$ (حيث Σ، كما هو الحال اعلاه، مجموعة قياسها موجب، على سطح كرة الوحدة في R_n) غير موجود مهما كانت قيمة α.

د. يتعلق الامر هنا بمناقشة تقارب التكامل:

$$\iint_{G_i} \frac{x^2 - y^2}{r^4} dx\, dy$$

على كل ساحة G_i (**حيث** $i=1,2,3$) من الساحات البادية في الرسم 7.3 ـ 1.



الرسم 7.3 ـ 1

نعتبر الساحة G_1.

من أجل كل ε موجب و ρ كبير بكفاية، فإن القطاع:

$\{x, y \in R_2 : \varepsilon < y/x < 1 - \varepsilon, x > \rho\}$ محتو في هذه الساحة.

نلاحظ ان التابع المعتبر يساوي على الاقل C/r^2 (حيث $C > 0$) في

القطاع السالف الذكر. وبالتالي، فإن التكامل (5) على هذا القطاع، وبالضرورة على الساحة G_1، متباعد بفضل أ ومقياس المقارنة 27.3 ـ ب.
تحوى الساحة G_2 القطاع:

$\{x, y \in R_2: 0 \leqslant y/x \leqslant 1-\varepsilon, r \leqslant 1\}$: ؛ نلاحظ هنا ايضا ان التابع المعتبر يساوي على الاقل C/r^2، (حيث $C > 0$,) في هذا القطاع، وهكذا يتبين ان التكامل (5) على G_2 متباعد. اما فيما يخص الساحة G_3، فيمكننا ان نختار متتالية معمقة من المستطيلات المتكابرة

$$G_m = \{x, y \in R_2: 1 \leqslant x \leqslant m, 0 \leqslant y \leqslant 1\}.$$

لدينا عندئذ:

$$\iint\limits_{G_m} \frac{x^2-y^2}{r^4}\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{G_m} \frac{x^2}{r^4}\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_{G_m} \frac{x^2}{x^4}\, dx\, dy = $$
$$= \iint\limits_{G_m} \frac{dx\, dy}{x^2} = \int\limits_0^1 \left\{ \int\limits_1^m \frac{dx}{x^2} \right\} dy = 1 - \frac{1}{m}.$$

بما أن الطرف الأخير محدود $m \to \infty$، فإن التكامل (5) على الساحة G_3 متقارب.

ر. نعتبر في ساحة مغلقة ومحدودة $G \subset R_n$ سطحا: $S = \{x = \varphi(u),\ u \in U \subset R_k\}$ معينا بتابع يقبل الاشتقاق مرتين $\varphi(u)$ ولا يقبل شواذ (يعني ذلك أن المصفوفة $\varphi'(u)$ غير منحلة) نرمز بـ $\rho = \rho(x, S)$ للمسافة بين نقطة x والسطح S. السؤال المطروح هو ما هي قيم α التي تجعل التابع $1/\rho^\alpha(x, S)$ يقبل المكاملة على الساحة G.

نطبق مبدأ المحلية 27.3 ـ ر الذي ينص على انه يكفي مناقشة وجود التكامل على الجوارات الصغيرة بشكل كيفي لكل نقطة $x \in G$. تقبل كل نقطة $a \notin S$ جوارا يكون فيه التابع $1/\rho^\alpha(x, S)$ محدودا، وبالتالي قابلا للمكاملة، نعتبر نقطة $a \in S$. يتبين من 56.3 ـ ص وجود طبقة $W_h(S)$ تحوى جوارا $V(a)$، معرفة بالوسيطات

$$(u, v) = (u_1, \ldots, u_k; v_{k+1}, \ldots, v_n), \quad u \in U(a) \subset U,$$
$$v \in Q_h = \{v: |v|^2 = \Sigma v_j^2 \leqslant h^2\},$$

بحيث تعطي التوابع:

$$x_1 = x_1(u, v),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = x_n(u, v)$$

من اجل $v_{k+1} = \ldots = v_n = 0$، تمثيل جزء S(a) من السطح S (في الجوار المذكور للنقطة b)، كما تعطي تلك التوابع، من أجل $u = (u_1, \ldots, u_k)$ مثبتة، تطبيقا ايزومتريا من الكرة $|v| \leqslant h^2$ ذات البعد (n-k) في الكرة ذات نصف النقطر h والمركز a الواقعة في الفضاء الجزئي ذي البعد (n-k) النظيمي على السطح S. يكتب تكامل أي تابع (محدود) f(x) على هذه الطبقة، حسب القاعدة 85.3 كما يلي:

$$\int_{W_h(S)} f(x)\,dx = \int_{U(a)\times Q_h} f(x(u, v)) \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right| du\,dv.$$

هناك تطابق في حالتنا هذه بين الكمية $\rho^2(x, S)$ و $\sum_{k+1}^{n} v_j^2$. نختار كمتتالية معمقة الساحات G_m ذات الشكل:

$$G_m = \left\{ x \in W_h(S) : x = x(u, v),\ u \in U(a),\ \frac{1}{m} \leqslant |v| \leqslant h \right\}.$$

لدينا:

$$\int_{G_m} \frac{dx}{\rho^\alpha(x, S)} = \int_{\frac{1}{m} \leqslant |v| \leqslant h} \frac{1}{\rho^\alpha(x, S)} \left\{ \int_{U(a)} \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right| du \right\} dv = \tag{6}$$

$$= \int_{\frac{1}{m} \leqslant |v| \leqslant h} \frac{\Phi(v)}{|v|^\alpha}\, dv,$$

حيث

$$\Phi(v) = \int_{U(a)} \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, v_n)} \right| du.$$

إن نهاية التابع $\Phi(v)$، لما $|v| = \sqrt{\sum_{k+1}^{n} v_j^2} \to 0$، هي مساحة السطح S(a) (56.3 ـ ر). استنادا الى 37.3 ـ ب فإن التكامل (6) يقبل نهاية، لما $m \to \infty$، إذا وفقط إذا كان $\alpha < n-k$. إذن، يتبين ان التابع $1/\rho^\alpha(x, S)$ يقبل المكاملة على الساحة G إذا كان $\alpha < n-k$ فقط.

74 .3 . التكاملات الموسعة المتعلقة بوسيط

أ . إن نظري التكاملات الموسعة المتعلقة بوسيط، والتي قدمناها في ي 11 ـ

4 من اجل ساحة مكاملة وحيدة البعد تعمم بسهولة الى الحالة التي تكون فيها ساحة المكاملة متعددة الابعاد. لنعتبر تكاملا موسعا من النمط الاول:

$$I(\lambda) = \int_G f(x, \lambda)\, dx \qquad (1)$$

متقاربا من اجل كل قيم الوسيط λ المنتمية لمجموعة Λ. نقول عن التكامل (1) إنه **متقارب بانتظام على** Λ، إذا تمكنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$، من ايجاد $\rho > 0$ بحيث تتحقق العلاقة التالية من اجل كل ساحة $Q \subset G$ لا تحوى أية نقطة من الكرة $V_\rho = \{x \in R_n : |x| \leqslant \rho\}$:

$$\left| \int_Q f(x, \lambda)\, dx \right| < \varepsilon.$$

ب يُعالج التكامل الموسع من النمط الثاني المتعلق بوسيط

$$I(\lambda) = \int_G f(x, \lambda)\, dx \qquad (2)$$

بكيفية مماثلة نفرض ان التابع $f(x, \lambda)$ محدود ومستمر بتقطع في ساحة مغلقة ومحدودة $G \subset R_n$، خارج كل جوار مجموعة قابلة للإهمال مثبتة (لا تتعلق بـ λ) $Z \subset G$. ، وهذا مهما كان $\lambda \in \Lambda$. نقول عن التكامل الموسع (2) إنه متقارب بانتظام على Λ إذا استطعنا، من اجل كل $\varepsilon > 0$ ايجاد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة الموالية مهما كانت المجموعة Q التي تحوي المجموعة Z في داخلها تماما، والمحتواة في الـ δ ـ جوار للمجموعة Z:

$$\left| \int_Q f(x, \lambda)\, dx \right| < \varepsilon.$$

ج. يقدم تعريف التقارب المنتظم من النمط الثالث على Λ بشكل مماثل. لن نتوسع في ذلك لأن تطبيقاته غير واردة في هذا الكتاب.

إن البرهان على النظريات الموالية المتعلقة بالتكاملات من النمط الاول يتم بشكل شبيه تماما بالحالة التي تكون فيها الساحات وحيدة البعد (ي 11 .43 ـ 45).

د. ليكن Λ فضاء متريا و $f(x, \lambda)$ تابعا مستمرا بانتظام على كل الجداء

فإن Λ. على Λ إذا كان التكامل (1) متقاربا بانتظام على $\Lambda \times (G \cap V_\rho)$.
$I(\lambda)$ تابع مستمر لـ λ.

ر. إذا كان Λ فضاء مشحونا و $f(x, \lambda)$ تابعا مستمرا بالنسبة لمجموعة الثنائيات (x, λ) المنتمية لأي جداء $\Lambda \times (G \cap V_\rho)$ وكان التكامل (1) متقاربا بإنتظام على Λ، فإن التكامل الموسع للتابع

$$g(x) = \int_\Lambda f(x, \lambda)\, d\lambda$$

على الساحة G متقارب، ولدينا:

$$\int_\Lambda \left\{ \int_G f(x, \lambda)\, dx \right\} d\lambda = \int_G \left\{ \int_\Lambda f(x, \lambda)\, d\lambda \right\} dx.$$

س. إذا كان Λ فضاء شعاعيا نظيميا قبل التابع $f(x, \lambda)$ مشتقا $\frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}$ مستمرا بالنسبة لـ (x, λ) على كل جداء $\Lambda \times (G \cap V_\rho)$، وكان التكامل:

$$\int_G \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx$$

متقاربا بانتظام على Λ فإن التكامل (1) يصبح موجودا بمجرد وجوده من اجل قيمة $\lambda = \lambda_0 \in \Lambda$، وهو يمثل تابعا قابلا للإشتقاق، ولدينا:

$$\frac{d}{d\lambda} \int_G f(x, \lambda)\, dx = \int_G \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx.$$

للبرهان على هذه القضايا نطبق بدل النظريات ي 48.9 و ي 77.9 المستخدمة النظريات 64.1 و53.3 ـ ج حيث يتعلق الأمر بالإشتقاق في للفضاء نظيمي بدل الاشتقاق في R_1.

ص. كما هو الحال في ي 74.11 ـ أ، فإن أبسط شرط كاف للتقارب المنتظم للتكامل (1) يتمثل في وجود حاد أعلى يقبل المكاملة، أي وجود تابع مقبول $0 \leqslant f(x)$ يحقق الشرطين:

$$F(x) \geqslant |f(x, \lambda)|, \quad \text{quel que soit} \quad \lambda \in \Lambda;$$

$$\int_G F(x)\, dx < \infty.$$

ط. فيما يخص التكاملات من النمط الثاني والثالث يمكن البرهان على نظريات مماثلة للسابقة (جـ - ص) بنفس الطرق.

57.3 . رد تكامل موسع مضاعف الى تكاملات بسيطة

حتى لا نثقل العرض، ندرس هنا الحالة n=2 ، مع العلم ان الحالة العامة تعالج بطريقة مماثلة.

أ. نعتبر في الفضاء R_2، تابعا غير سالب ومستمر بتقطع $f(x, y)$. نفرض أنه يقبل على كل مجال منته $-c \leqslant y \leqslant c$ حادا أعلى قابلا للمكاملة، أي تابعا مستمرا بتقطع $F_c(x) \geqslant 0$ بحيث:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_c(x)\,dx < \infty, \quad f(x, y) \leqslant F_c(x) \tag{1}$$
$$(-\infty < x < \infty, \ -c \leqslant y \leqslant c).$$

نفرض أيضا أن التابع

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \tag{2}$$

(الموجود حسب مقياس المقارنة 27.3 - ب) مستمر بتقطع على كل مجال $-c \leqslant y \leqslant c$.

نظرية. نحتفظ بالشروط الواردة اعلاه. عندئذ فإن وجود تكامل من التكاملين المواليين يستلزم وجود التكامل الآخر، ولدينا المساواة بينهما:

$$I = \iint_{R_2} f(x, y)\,dx\,dy, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy \right\} dy. \tag{3}$$

البرهان. إن وجود حاد أعلى قابل للمكاملة يستلزم التقارب المنتظم على كل مجال $-c \leqslant y \leqslant c$ للتكامل (2) والمساواة:

$$\int_{-c}^{c} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-c}^{c} f(x, y)\,dy \right\} dx =$$
$$= \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \left\{ \int_{-c}^{c} f(x, y)\,dy \right\} dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \int_{-c}^{c} f(x, y)\,dx\,dy. \tag{4}$$

إذا تقارب التكامل I في (3) فإن الطرف الثاني في (4) يبقى محدودا من الأعلى بالعدد I من أجل كل c ؛ يستلزم ذلك وجود التكامل الثاني والمتراجحة $I_1 \leqslant I$. وإذا تقارب التكامل I_1 في (3) فإن الطرف الأول في (4) يبقى محدودا من الاعلى بالعدد I_1 مهما كان c ؛ إذن، مهما كان a و c فإن العدد I_1 يحد من الاعلى التكامل:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} f(x, y)\, dx\, dy,$$

ومنه يأتي وجود التكامل I في (3) والعلاقة $I \leqslant I_1$. وهكذا فإن وجود تكامل من تكاملي (3) يستلزم وجود التكامل الآخر والعلاقتين $I \leqslant I_1$, $I_1 \leqslant I$، إذن $I = I_1$، وهو المطلوب.

ب. ليكن $0 \leqslant g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ و $0 \leqslant h(y)$ $(-\infty < y < \infty)$ تابعين مستمرين بتقطع بحيث يكون التكاملان:

$$\int_{-a}^{a} g(x)\, dx, \qquad \int_{-c}^{c} h(y)\, dy$$

موجبين من أجل قيمتين a وc. نضع $f(x,y)=g(x)h(y)$.

نظرية. نحتفظ بالفروض الواردة أعلاه. إن وجود التكامل:

$$I = \iint_{R_2} f(x, y)\, dx\, dy \tag{5}$$

يكافيء وجود تكاملين:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy \tag{6}$$

وتنتج عن ذلك المساواة:

$$\iint_{R_2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, dy. \tag{7}$$

البرهان. من اجل كل a وc، لدينا:

$$\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{-a}^{a} g(x)\, dx \int_{-c}^{c} h(y)\, dy. \tag{8}$$

إذا وجد التكامل (5) فإن الطرف الأول من (8) محدود من الأعلى بالعدد I وهذا مهما كان a وc. بالإنتقال الى النهاية ($c = c_0$ ، $a \to \infty$) نثبت وجود التكامل الاول في (6)؛ وبالإنتقال الى النهاية

($c \to \infty$) نثبت وجود التكامل الثاني والمتراجحة $I \geqslant I_1 I_2$. إذا وجد التكاملان (6) فإن الطرف الثاني من (8) يكون محدودا بالعدد $I_1 I_2$ ، ومنه ياتي وجود التكامل (5) والمتراجحة $I \leqslant I_1 I_2$. لدينا في كل الحالات المتراجحتان $I_1 I_2 \leqslant I$ و $I \leqslant I_1 I_2$ ، أي المساواة $I = I_1 I_2$ ، وهو المطلوب.

67.3 . تغيير المتغيرات في التكاملات الموسعة. نقتصر هنا أيضا على الحالة التي يكون فيها n=2 وعلى تابع غير سالب ومستمر بتقطع f(x,y).

أ . ليكن:

$$I = \iint_G f(x, y)\, dx\, dy \qquad (1)$$

تكاملا متقاربا. نفرض أن الساحة G (سواء كانت محدودة أو غير محدودة) في المستوى (x,y) صورة بواسطة تطبيق قابل للإشتقاق x=x(u,v) ، $y = y(u, v)$ لساحة Q (محدودة كانت أو غير محدودة) في المستوى (u,v). لنثبت أن التكامل:

$$\iint_G f(x(u, v),\ y(u, v)) \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv \qquad (2)$$

موجود وان قيمته تساوي قيمة التكامل I .

تتحول متتالية معمقة $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$ ، بطبيعة الحال، بواسطة التطبيق $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ الى متتالية معمقة $Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q$ بتطبيق القاعدة 75.3 المتعلقة بتغيير المتغيرات في الساحة G_m ، نجد:

$$\iint_{G_m} f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{Q_m} f(x(u, v),\ y(u, v)) \left| \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \right| du\, dv.$$

نجعل m يؤول الى $+\infty$. يؤول عندئذ الطرف الاول من المساواة الاخيرة بفضل تقارب التكامل (1) الى النهاية 1 ، وبالتالي فإن للطرف الثاني نفس النهاية، ومنه يأتي، طبقا لـ27.3 ـ أ وجود التكامل (2) وتساويه بالتكامل (1).

ب. **مثال**. نرى انطلاقا من التعريف (ي 15.11) للتابع غاما:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx$$

ومن 57.3 ـ ب، أن:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b)=\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx\int_0^\infty e^{-y}y^{b-1}\,dy=\iint_{R_2} e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\,dx\,dy. \quad (3)$$

ننتقل الى الاحداثيات الجديدة

$$x=u(1-v),\quad y=uv. \quad (4)$$

يحول التطبيق (4) الربع الاول من المستوى (x,y) الى نصف الشريط $0\leqslant u<\infty,\ 0\leqslant v\leqslant 1$ من المستوى (u,v) والعكس بالعكس.

لدينا:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{matrix}1-v & v\\ -u & u\end{matrix}\right|=u.$$

ينتج من أ:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b)=\int_{u=0}^\infty\int_{v=0}^1 e^{-u}u^{a+b-2}(1-v)^{a-1}v^{b-1}u\,du\,dv=$$

$$=\int_0^\infty e^{-u}u^{a+b-1}\,du\int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{a-1}\,dv=\Gamma(a+b)\,\mathrm{B}(a,b);$$

نحصل مرة أخرى على العلاقة التي تربط التابعين غاما وبيتا. نلاحظ ان الطريقة المستعملة في ي 35.11 والتي لا تستخدم سوى التوابع لمتغير واحد أكثر تعقيدا من الطريقة الواردة آنفا التي تعتمد على التوابع ذات متغيرين.

77.3 . التكاملات الموسعة ذات شذوذ متغير

أ. سوي تواجهنا كثيرا في المستقبل تكاملات ذات شذوذ متغيّر تكتب على الشكل

$$F(y)=\int_G\frac{f(x,y)\,dx}{|x-y|^\alpha}, \quad (1)$$

حيث تمثل $|x-y|$ المسافة بين النقطة $x\in R_n$ والنقطة $y\in R_n$، وتمثل $G\subset R_n$ ساحة محدودة. نفرض ان التابع f(x,y) محدود ومستمر في ساحة G×H حيث $H\subset R_n$.

إن التكامل (1)، من اجل $y\in G$ و $\alpha>0$، تكامل موسع من النمط

الثاني وهو متقارب (مطلقا) حسب 37.3 ـ ب إذا كان $\alpha<n$.

على الرغم من ان التكامل (1) تكامل موسع يمثل تابعا لوسيط فإن النظرية العامة للتكاملات المتعلقة بوسيط المعروضة في 47.3 لا يمكن تطبيقها هنا لأن الشذوذ في التكامل (1) غير مثبت وهو يتعلق بموقع الوسيط y, z لهذا السبب، نقدم بعض خواص التكامل (1) بطريقة مباشرة دون اللجوء الى النظرية العامة 47.3 .

ب. توطئة. إذا كان $\alpha<n$ فإننا نستطيع، من اجل كل $\varepsilon>0$، ايجاد $\delta_0>0$ بحيث تتحقق العلاقة الموالية مهما كانت الكرة V_δ التي تصف قطرها $\delta\leqslant\delta_0$

$$\left|\int_{V_\delta}\frac{f(x, y)\,dx}{|x-y|^\alpha}\right|<\varepsilon. \qquad (2)$$

البرهان. إن التابع $f(x,y)$ مستمر بالنسبة للمجموعة (x,y) وبالتالي فهو محدود بحيث ان لدينا مثلا $|f(x,y)|\leqslant C$. لما كان تكامل $\frac{1}{|x-y|^\alpha}$ متقارب فانه يمكننا ايجاد، من اجل $\varepsilon>0$، عدد $\tau>0$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية من اجل الكرة $V_\tau(y)$ ذات نصف القطر τ والمركز y:

$$\left|\int_{V_\tau(y)}\frac{f(x, y)}{|x-y|^\alpha}\,dx\right|\leqslant C\int_{V_\tau(y)}\frac{dx}{|x-y|^\alpha}\leqslant\varepsilon,$$

حيث لا يتعلق العدد τ باختيار النقطة y. يبقى ان نعتبر الكرات المتمركزة في النقاط الاخرى. إذا وجدت كرة $V_\rho(y_1)$ داخل الكرة $V_\tau(y)$ فإن المتراجحة (2) قائمة بطبيعة الحال من اجل $V_\delta=V_\rho(y_1)$. ثم إن التابع $\frac{f(x, y)}{|x-y|^\alpha}$ محدود (بالطويلة) خارج الكرة $V_{\tau/3}(y)$ بعدد k. بالتالي فإن تكامله على اية كرة V_ρ مركزها خارج الكرة $V_{2\tau/3}(y)$ ونصف قطرها $\rho<\tau/3$ (إن مثل هذه الكرة غير متقاطعة مع الكرة $V_{\tau/3}(y)$) لا يتجاوز الكمية $K|V_\rho|=K\Omega_n\rho^n$ (يمثل Ω_n حجم الكرة الوحدة في R_n) الاصغر من ε عندما يكون ρ صغيرا بكفاية، مثلا $\rho\leqslant\delta\leqslant\tau/3$. لكن، بما أن كرة نصف قطرها $\rho<\tau/3$ ليست محتواة في $V_\tau(\rho)$ فإن مركزها موجود خارج الكرة

إذن، مهما كانت الكرة $V_\rho(y_1)$ ذات نصف قطرها $\rho < \delta$، فإن المتراجحة (2) محققة، وهو المطلوب. $V_{2\tau/3}(y)$

ج. نثبت هنا نظرية متعلقة بإستمرار التابع $f(y)$ (1).

نظرية. إذا كان $f(x,y)$ مستمرا بالنسبة لمجموعة المتغيرات (x,y) وكان $\alpha<n$ فإن التابع:

$$F(y) = \int_G \frac{f(x, y)}{|x-y|^\alpha} dx$$

مستمر.

البرهان. بتطبيق التوطئة ب نبحث، من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، عن عدد $\delta > 0$ بحيث تتحقق المتراجحة التالية، من اجل كل كرة V_δ نصف قطرها δ:

$$\left| \int_{V_\delta} \frac{f(x, y)}{|x-y|^\alpha} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (3)$$

نرمز بـ $\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{|x-y|^\alpha}$. نثّبت بشكل كيفي نقطة $y_0 \in H$. وليكن. نجد عندئذ:

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_G [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx \right| \leqslant \qquad (4)$$

$$\leqslant \left| \int_{V_\delta(y_0)} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx \right| + \left| \int_{G-V_\delta(y_0)} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{V_\delta(y_0)} |\varphi(x, y)| dx + \int_{V_\delta(y_0)} |\varphi(x, y_0)| dx + \left| \int_{G-V_\delta(y_0)} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx \right|.$$

إن التابع $\varphi(x,y)$ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات (x,y) في الساحة $\{x \in G - V_\delta(y_0),\ y \in V_\delta(y_0)\}$، يتبين من النظرية 53.3 ـ أ أن التكامل الاخير في الطرف الايمن من (4) يمثل تابعا مستمرا لـy بصفة خاصة، من اجل ε معطى، يمكننا ايجاد $\rho < \delta/2$ بحيث:

$$\left| \int_{G-V_\rho(y_0)} [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (5)$$

وذلك بمجرد قيام المتراجحة $|y-y_0|<\rho$.

ينتج من المتراجحات (3) ـ (5) أن:

$$|F(y)-F(y_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

وهذا عندما $|y-y_0|<\rho$.

وهكذا فإن التابع $f(y)$ مستمر عند النقطة y_0. بما ان y_0 نقطة كيفية من الساحة H فإن $f(y)$ مستمر اينما كان، وهو المطلوب.

د . مكاملة تكامل موسع ذي شذوذ متغير بالنسبة لوسيط.

نظرية. إذا كان $\alpha<n$ وكانت النقطة y تتجول في سطح S بعده K ومساحته منتهية ($1\leqslant k<n$)، فإن

$$\int_S\left\{\int_G\frac{f(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}dx\right\}dy=\int_G\left\{\int_S\frac{f(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}dy\right\}dx. \qquad (6)$$

البرهان. نلاحظ، بفضل النظرية ج، ان التكامل الداخلي في الطرف الاول من (6) تابع مستمر لِـy، وهذا يضمن وجود كل تكامل الطرف الاول. ثم إن التكامل الداخلي في الطرف الثاني، بوصفة تابعا لِ x. ليس معرفا سوى في النقاط x التي لا تنتمي للسطح S؛ عندما تقترب النقطة x من السطح S فإن قيمة التكامل الداخلي تتزايد لا نهائيا، عموما، بحيث ان التكامل المكرر في الطرف الثاني يصبح موسعا ومجموعة نقاطه الشاذة مطابقة للسطح S. لهذا السبب فإن وجود التكامل في الطرف الثاني ليس بديهيا مسبقا، وهو يأتي كما هو الحال بالنسبة للعلاقة (6)، من استدلالاتنا.

نرمز كما ورد اعلاه، بِـ $\varphi(x,y)=\frac{f(x,y)}{|x-y|^{\alpha}}$ لإثبات وجود التكامل في الطرف الثاني من (6)، علينا أن نعتبر متتالية تكاملات غير موسعة:

$$I_m=\int_{G-B_m}\left\{\int_S\varphi(x,y)\,dy\right\}dx \quad (m=1,2,\ldots),$$

حيث تتقلص الساحات B_m لتؤول نحو المجموعة S. يمكننا في كل تكامل I_m، حسب النظرية 53.3 ـ ب، تبديل ترتيب المكاملة:

$$I_m=\int_S\left\{\int_{G-B_m}\varphi(x,y)\,dx\right\}dy.$$

نرمز للتكامل الداخلي بِـ $F_m(y)$ لنثبت ان التابع $F_m(y)$ متقارب بانتظام في H ، من اجل $m \to \infty$ ، نحو التابع :

$$F(y) = \int_G \varphi(x, y)\, dx.$$

يمثل الفرق بين $F(y)$ و $F_m(y)$ تكاملا على الساحة B_m :

$$F(y) - F_m(y) = \int_{B_m} \varphi(x, y)\, dx. \tag{7}$$

من أجل $0 < \varepsilon$ معطى، نبحث بتطبيق التوطئة ب عن عدد $0 < \delta$ بحيث نحصل، من اجل كل كرة V_ρ نصف قطرها $\rho \leqslant \delta$ ، على المتراجحة :

$$\int_{V_\rho} |\varphi(x, y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

نفكك التكامل (7) الى مجموع تكاملين: الاول على الجزء B'_m من الساحة B_m المحتواة في الكرة $V_\rho(y)$ والثاني على الجزء B''_m المتبقي.

بمراعاة اختيار δ ، نجد :

$$\int_{B'_m} |\varphi(x, y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

وذلك مهما كانت قيمة m إن التابع $\varphi(x, y)$ محدود من الاعلى في الساحة B''_m (بثابت لا يتعلق بِـ m)؛ بما ان حجم الساحة $B''_m \subset B_m$ يؤول الى 0 لما $m \to \infty$ ، فإنه يوجد عدد N بحيث يكون لدينا من اجل $N<m$:

$$\int_{B''_m} |\varphi(x, y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

وهكذا نجد من اجل كل $N<m$:

$$|F(y) - F_m(y)| \leqslant \int_{B'_m} |\varphi(x, y)|\, dx + \int_{B''_m} |\varphi(x, y)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

بما ان هذه المتراجحة مستقلة عن موقع النقطة $y \in H$ فإننا نرى ان المتتالية $F_m(y)$ متقاربة بانتظام نحو $F(y)$. ينتج من ذلك، حسب 41. 3 ـ س، ان I_m يؤول الى النهاية:

$$\int_S F(y)\, dy = \int_S \left\{ \int_G \varphi(x, y)\, dx \right\} dy.$$

تم البرهان على وجود التكامل الوارد في الطرف الثاني من المساواة (6)

وكذا هذه المساواة نفسها.

ر. يمكن تعويض فرض استمرار التابع $f(x, y)$ بالنسبة للمتغيرين $x \in G$، و$y \in H$ في النظريتين ج و د بشروط اضعف:

1) التابع $f(x, y)$ محدود من اجل $x \in G$ و $y \in H$.

2) مهما كان $\delta > 0$، فالتابع $f(x, y)$ مستمر بالنسبة لمجموعة (x,y) المنتمية للساحة

$$(G \times H) = \{x, y : |x - y| < \delta\}.$$

بالفعل يمكننا ضمن الشرطين السابقين كتابة:

$$\frac{f(x, y)}{|x-y|^{\alpha}} = \frac{f(x, y)\,|x-y|^{\gamma}}{|x-y|^{\alpha+\gamma}}.$$

عندما يكون $\gamma > 0$ صغيرا بكفاية فإن اس المقام لا يتجاوز n؛ إلّا أن البسط مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرين (x,y) اينما كان في $(G\times H)$، وبالتالي تبقى النظريتان ج و د قائمتان.

س. من السهل اثبات قيام النظريتين جـ و د باعتبار الافتراض الوارد في ر، وذلك من اجل توابع $f(x,y)$ ذات قيم في فضاء شعاعي نظيمي. يمكن تطبيقها، مثلا، على جداء تابع عددي $f(x,y)$ في الشعاع الواحدي $e(x,y)$ الذي يأخذ الاتجاه من النقطة x الى النقطة y. إن هذا الجداء تابع شعاعي، وهو غير مستمر عموما من اجل $x \to y$ حتى ولو كان التابع $f(x, y)$ مستمراً.

ص. إشتقاق تكامل موسع ذي شذوذ متغير، بالنسبة لإحداثيات النقطة الوسيطة.

نظرية. إذا كان التابع $f(x, y)$ مستمراً بالنسبة لمجموعة المتغيرين $x \in G$ و $y \in H$ وله مشتق $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j}$ مستمر بالنسبة لمجموعة (x,y) (أو يحقق على الأقل الشروط س) فإن لدينا من اجل $\alpha < n-1$:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\int_G \frac{f(x, y)}{|x-y|^{\alpha}}\,dx = \int_G \frac{\partial}{\partial y_j}\,\frac{f(x, y)}{|x-y|^{\alpha}}\,dx. \qquad (8)$$

البرهان . نعتبر دائما $\varphi(x, y) = \frac{f(x, y)}{|x-y|^{\alpha}}$ نصل بواسطة حساب بسيط الى العلاقة

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} = -\frac{\alpha}{|x-y|^{\alpha+1}} \cdot \frac{y_j - x_j}{|x-y|} = -\frac{\alpha}{|x-y|^{\alpha+1}} \cos \omega_j,$$

حيث يمثل ω_j الزاوية التي يشكلها الشعاع y-x والمحور ذو الرتبة k . ينتج من ذلك أن:

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} = -\frac{\alpha \cos \omega_j}{|x-y|^{\alpha+1}} f(x, y) + \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j},$$

وهذا يؤدي، بمراعاة كون التابعان $f(x,y)$ و $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y_j}$ محدودين، الى التقدير:

$$\left| \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} \right| \leqslant \frac{C_1}{(x-y)^{\alpha+1}},$$

حيث C_1 ثابت. يتبين من هذه المتراجحة ان التكامل بالنسبة للمتغير x للتابع $\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j}$ متقارب مطلقا من اجل $\alpha < n-1$.

للبرهان على هذه القضية، نفرض الآن انه يوجد تابع $\varphi_\delta(x, y)$ محدود ومستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرين (x,y)، وله مشتق $\frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}$ مستمر بالنسبة لمجموعة (x,y)، ويحقق العلاقتين:

$$\left\{ \begin{aligned} & \lim_{\delta \to 0} \int_G \varphi_\delta(x, y)\, dx = \int_G \varphi(x, y)\, dx, \\ & \lim_{\delta \to 0} \int_G \frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}\, dx = \int_G \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j}\, dx \end{aligned} \right. \qquad (9)$$

بانتظام بالنسبة لِـ y،

ليكن:

$$F(y) = \int_G \varphi(x, y)\, dx, \quad F_\delta(y) = \int_G \varphi_\delta(x, y)\, dx,$$

$$\widetilde{F}(y) = \int_G \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j}\, dx.$$

بمراعاة النظرية 53.3 ـ د نجد أن:

$$\frac{\partial F_\delta(y)}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\int_G \varphi_\delta(x, y)\, dx = \int_G \frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}\, dx.$$

تأخذ العلاقتان (9) الشكل:

$$\lim_{\delta\to 0} F_\delta(y) = F(y),$$

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\partial F_\delta(y)}{\partial y_j} = \tilde{F}(y).$$

ينتج من ذلك حسب النظرية الخاصة باشتقاق متتالية توابع (64.1) ان التابع $F(y)$ يقبل الاشتقاث بالنسبة لِـ y_j وأن

$$\tilde{F}(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y_j},$$

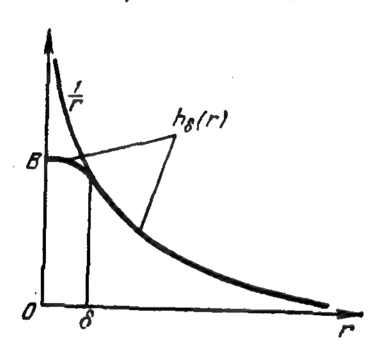
وهو المطلوب.

يبقى إذن انشاء تابع $\varphi_\delta(x, y)$ يتمتع بالخاصيات المذكورة اعلاه. نعتبر التابع:

$$h_\delta(r) = \begin{cases} 1/r & \text{pour} \quad r \geqslant \delta \\ B - r^2 A & \text{pour} \quad 0 \leqslant r \leqslant \delta, \end{cases}$$

حيث نختار A و B بشكل يجعل مرور القيمة r عبر العدد δ لا يمس استمرارية وقابلية اشتقاق التابع $h_\delta(r)$ (الرسم 7.3 ـ 2). من الواضح عندئذ ان المتراجحتين التاليتين قائمتان.

$$\left\{ \begin{aligned} & 0 \leqslant h_\delta(r) \leqslant \frac{1}{r} \quad (0 \leqslant r < \infty), \\ & |h'_\delta(r)| \leqslant \frac{1}{r^2} \quad (0 \leqslant r < \infty). \end{aligned} \right. \tag{10}$$



الرسم 7.3 ـ 2

نضع الآن:

$$\varphi_\delta(x, y) = h_\delta^\alpha(|x-y|) f(x, y).$$

لدينا:

$$\frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j} = h_\delta^\alpha(|x-y|)\frac{\partial f(x, y)}{\partial y_j} + $$
$$+ \alpha h_\delta^{\alpha-1}(|x-y|)\, h'_\delta(|x-y|)\frac{\partial(|x-y|)}{\partial y_j} f(x, y).$$

ينتج من المتراجحتين (10):

$$|\varphi_\delta(x, y)| \leqslant \frac{C_2}{|x-y|^\alpha}, \quad \left|\frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}\right| \leqslant \frac{C_3}{|x-y|^{\alpha+1}},$$

حيث C_2 و C_3 ثابتان. يمكن إذن، من اجل $0 < \varepsilon$ معطى، اختيار δ بحيث تقوم المتراجحة

$$|F(y) - F_\delta(y)| = \left|\int_G [\varphi(x, y) - \varphi_\delta(x, y)]\, dx\right| =$$
$$= \left|\int_{V_\delta(y)} [\varphi(x, y) - \varphi_\delta(x, y)]\, dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{V_\delta(y)} |\varphi(x, y)|\, dx + \int_{V_\delta(y)} |\varphi_\delta(x, y)|\, dx \leqslant C_4 \int_{V_\delta(y)} \frac{dx}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon$$

بشكل مستقل عن موقع النقطة $y \in H$ كما يمكننا الحصول بتصغير $0 < \delta$ إذا دعت الضرورة، على العلاقة:

$$\left|\tilde{F}(y) - \frac{\partial F_\delta(y)}{\partial y_j}\right| = \left|\int_G \left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} - \frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}\right] dx\right| = \left|\int_{V_\rho(y)} \left[\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\partial \varphi_\delta(x, y)}{\partial y_j}\right] dx\right| \leqslant \int_{V_\rho(y)} \left|\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y_j}\right| dx + \int_{V_\rho(y)} \left|\frac{\partial \varphi'_\delta(x, y)}{\partial y_j}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant C_5 \int_{V_\rho(y)} \frac{dx}{|x-y|^{\alpha+1}} < \varepsilon$$

بشكل مستقل عن موقع النقطة $y \in H$. وهكذا فإن العلاقات (9) قد اثبتت وكذا النظرية.

التمارين

1 . المطلوب رد العبارة التالية الى تكامل وحيد البعد:

$$I = \int_{x_n=0}^{x} \cdots \int_{x_2=0}^{x_3} \int_{x_1=0}^{x_2} x_1 \ldots x_n f(x_1)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

2 . احسب التكامل:

$$I=\int_{R_n}\cdots\int e^{-A(x,\,x)}\,dx,$$

حيث A)y,y1 شكل تربيعي معرف موجب.

3 . عبّر على التكامل

$$I=\int_{R_n}\cdots\int f(r)\,dx \quad \left(r=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

بواسطة تكامل وحيد البعد.

4 . المطلوب ردّ تكامل السطح الموالي الى تكامل وحيد البعد

$$I=\int_{S_{n-1}(1)} f[(a,\ x)]\,dS,$$

حيث $S_{n-1}(1)$ سطح كرة نصف قطرها 1 في R_n .

5 .(مثال شفارتز Sdixbsu1) ندخل على اسطوانة دائرية قائمة C (ذات الارتفاع 1 ونصف قطر القاعدة 1) الاحداثيات الاسطوانية الطبيعية $z:\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant 1.$ و φ. نـــرسم على مقـــاطعهـــا z=2kh (k=0,1,2,...) النقـــاط $\varphi=0,\ 2\alpha,\ 4\alpha,\ \ldots,$ وعلى المقـــاطـــع $z=(2k+1)\,h,\ \ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ النقاط $\varphi=\alpha,\ 3\alpha,\ 5\alpha,\ \ldots$ (h و α معطيان). تعين نقطتان متجاورتان من مقطع nl ÷ 1 مع نقطة المقطع z=(m+1)h الواقعة بينهما مثلثا محاطا بالاسطوانة C . أثبت ان متعدد الوجوه المشكل من كل المثلثات من هذا النمطِ يقترب بشكل لا نهائي، عندما يؤول h و α الى الصفر، من سطح الاسطوانة، لكن مساحة متعدد الوجوه يمكن ان تكون له اية نهاية اكبر من $|C|$ أو تساويه.

6 . نفرض أن تكامل تابع f(x) (مستمر بتقطع ومحدود محليا) على ساحة غير محدودة $G\subset R_n$ متقارب. اثبت ان هذا التكامل متقارب مطلقا. كيف التوفيق بين هذه النتيجة مع وجود تكاملات نصف متقاربة على $[0,\ \infty)$ ؟

7 . نعتبر الشحنة التالية على مجال [a,b]: نختار بمثابة خلايا كل المجالات

(المعتادة) الممكنة وكذا تقاطعاتها مع المجموعة P المؤلفة من النقاط الناطقة أو مع المجموعة Q المؤلفة من النقاط الصماء في المجال [a,b]، نختار كقياس مجال أو قياس تقاطعه مع Q طوال المجال نفسه، اما قياس تقاطع مجال مع P فنعتبره مساويا للصفر. تأكد من كل خاصيات الشحنة وشر الى خلاياها غير الجوردانية.

8 . أثبت ان مركز ثقل مخروط دائري قائم (في R_3) (مهما كانت زاويته الرأسية) يقع على محور هذا المخروط وان المسافة التي تفصله على القاعدة تساوي ثلث الارتفاع عندما تؤول الزاوية الراسية للمخروط الى الصفر فإن المخروط يصبح في النهاية قطعة مستقيمة. لكن مركز ثقل قطعة مستقيمة يقع في منتصف هذه القطعة. كيف تفسر ذلك

9 . نرمز بـ $S_r(k, n, \varepsilon)$ لجزء سطح الكرة $S_r(n) = \{x \in R_n : |x| = r\}$ المعين بالمتراجحات:

$$|(b_1, x)| \leqslant \varepsilon, \ldots, |(b_k, x)| \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

حيث $b_1, \ldots, b_k$ أشعة متعامدة ومتجانسة. أثبت ان

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|S_r(k, n, \varepsilon)|}{|S_r(n)|} = 1.$$

10 . نرمز بـ $V_r(k, n, \varepsilon, \rho)$ لجزء الكرة $V_r(n) = \{x \in R_n : |x| \leqslant r\}$ المعين بالمتراجحات:

$$|(b_1, x)| \leqslant \varepsilon, \ldots, |(b_k, x)| \leqslant \varepsilon, \quad \rho \leqslant |x| \leqslant r$$

حيث $b_1, \ldots, b_k$ أشعة متعامدة ومتجانسة. أثبت أن

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|V_r(k, n, \varepsilon, \rho)|}{|V_r(n)|} = 1.$$

11 . إن الاحداثيات الكروية $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ في الفضاء R_n معينة بالدساتير:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \cos \varphi_1, \\
x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\
x_3 &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\
x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

أثبت أن

$$\det \frac{\partial (x_1, \ldots, x_n)}{\partial (r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \ldots \sin \varphi_{n-1}.$$

12 . أثبت في الفضاء الهيلبرتي المؤلف من التوابع $f(x)$ المستمرة على مجال $a \leqslant x \leqslant b$ ، أن مربع حجم متوازي الوجود المنشأ على الاشعة $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ يساوي :

$$\frac{1}{n!} \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \ldots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \ldots & f_2(x_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \ldots & f_n(x_n) \end{vmatrix} dx_1 \ldots dx_n.$$

13 . تسمى العبارة:

$$\int_{R_n} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(x_1\sigma_1 + \ldots + x_n\sigma_n)} dx_1 \ldots dx_n = \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

تحويل فوري من الرتبة n للتابع $f(x)$. أثبت ان تحويل فوري لتابع متناظر كروي هو أيضا تابع متناظر وكروي.

14 . ضع ، باعتبار n=3 ، تحويل فوريي لتابع متناظر كروي f(x) على شكل تكامل وحيد البعد.

15 . أثبت ، من اجل n=3 ، ان تحويل فوريي $\varphi(\sigma)$ لتابع متناظر وكروي وقابل للمكاملة مطلقا f(x) تابع قابل للاشتقاق.

16 . أثبت ان تحويل فوريي للتابع :

$$e^{-\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k}$$

حيث ان الشكل $\sum_{j,k=1}^{n}$ معرف موجب ، يساوي $\pi^{n/2} e^{D(\sigma)/(4D)} / \sqrt{D}$ ، علما أن:

$$D = \det \| a_{jk} \|, \quad D(\sigma) = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_1 & \ldots & \sigma_n \\ \sigma_1 & a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

نبذة تاريخية

ظهر التكامل المزدوج (أي المضاعف مرتين) على ساحة مستوية محدودة لأول مرة عند أولر (1770)، قدم هذا الأخير قاعدة حساب التكامل المذكور برده إلى تكامل مكرر. كان أولر، ثم لاغرانج قد اعتبرا أيضا التكاملات الثلاثية (المضاعفة ثلاث مرات). اقترح كلاهما بعض القواعد الخاصة بتغيير المتغيرات، إلا ان هذه القواعد كانت غير كاملة رغم ظاهرها، وقد قدّمت الطريقة السليمة أول مرة من طرف استروغرادسكي Ostrogradski (1836) بخصوص التكاملات المزدوجة والثلاثية، ثم قام جاكوبي (1841) بنفس العمل من اجل التكاملات المضاعفة تضاعفا كيفيا، وفي هذا الاطار ادخل جاكوبي المعينات التابعية التي أطلق عليها سيلفستر Sylvester اسم يعقوبيات (نسبة الى جاكوبي).

عرض جوردان في مؤلفه «دروس في التحليل» (1882 ـ 1887) نظرية عامة لقياس الاحجام (في الفضاء ذي البعد n).

على الرغم من اننا على علم بكيفية حساب مساحة سطح بواسطة التكاملات المزدوجة منذ القرن 18 (أولر 1770)، فإن التعريف السليم لمفهوم المساحة ظل مدة طويلة مفقودا، كان الاعتقاد السائد انه يمكن تعريف المساحة كنهاية مساحات متعددات وجود محاطة بالسطح المعتبر، أخيرا جاء هـ.شفارتز (1870) بمثاله المدهش فجعل المختصين يفكرون في ضرورة ايجاد تعريف متين لمفهوم المساحة. قدّم هذا التعريف (بواسطة التغطية «القرميدية» و «الطبقة المولدة عن سطح») جوردان في مؤلفه السابق الذكر.

اقترح ستيلجاس Stieltjes سنة 1894 مفهوما جديدا للتكامل يختلف عن المفهوم القديم لتكامل ريمان بكون مجالين متساويين على المستقيم (العددي) يملكان قياسين مختلفين وكذلك فإنه من الممكن ان تحمل نقاطا

منعزلة قياسا موجبا، مع العلم ان تكامل ستيلجاس، مثل تكامل ريمان، يستنتج من مجاميع تكاملية بواسطة الانتقال الى النهاية. وقد اعتبر هذا التعريف بعد ذلك العديد من المؤلفين. لكن ظهور تكامل لوبيغ (1902) الذي عممه رادون Radon من المستقيم الى الفضاء المتعدد البعد سنة 1913، كان قد وجه نظر الرياضيين نحو مسائل مرتبطة بقياس جمعي عدودياً، وظل تكامل ريمان - ستيلجاس الذي لا يتطلب سوى الجمعية المنتهية للقياس (ويتطلب في الحالة التي يأخذ فيها القياس قيما مختلفة الاشارة، الشرط الاضافي الناص على أم القياس ذو تغير محدود) مهملا.

رغم ذلك فقد احتفظ تكامل ريمان - ستيلجاس بقيمته في مسائل متعلقة بالتوابع المستمرة، وهكذا حصل ف. ريس Riesz سنة 1909 على العبارة العامة لتابعية خطية في فضاء التوابع المستمرة على مجال مغلق ومحدود، وقام رادون بنفس المهمة فيما يخص التوابع المستمرة على متراص بعده n (1913)، في شكل تكامل على قياس جمعي فقط.

نجد في كثير من الاحيان التوابع الجمعية للساحات في الميدان الفيزيائي. وقد ذهب بعض العلماء الى القول بأن هذه التوابع تتمتع دون غيرها بمعنى حقيقي، وان التوابع لنقطة مفهوم نظري لا يتماشى مع الواقع (راجع مثلا مقال ف. ا. سميرنوف، س. ل. سوبولاف، نيكولاي مكسيموفيتش، غيونتار في كتاب ن.م. غيونتار: نظرية الكمون وتطبيقاتها، غ.أ.ت.ت.ل، 1953، (بالروسية).

وهكذا فإن درجة الحرارة وكثافة الكتلة مفهومان مجرد أن يقابلهما على التوالي المفهومان الحقيقيان كمية من الحرارة والكتلة في حجم يحوي نقطة معينة.

درست في الفترة 1938 ـ 1943 القياسات الجمعية (من وجهة نظر اكثر عمومية) من طرف أ.أ. ماركوف Markov و أ.د. الكسندروف Alexandrov. نشير الى ان انشاءنا للتكامل مستوحى أيضا من افكار انشاء

تكامل ريمان - ستيلجاس راجع فيما يخص الصلة بين القياسات الجمعية والقياسات الجمعية عدوديا على متراص بعده n ج.ا. تشيلوف و ب.ل. غوريفيتش: التكامل والقياس والاشتقاق، ط.2، «ناوكا»، 1967، الفصل الثاني، (بالروسية).

إن الطريقة الاستدلالية المتبعة هنا لا تصلح في فضاء بعده غير منته، وهذا أمر غير مفاجىء: فإن كرة ذات بعد غير منته تحوى عددا منته من كرات (أصغر حجما) متساوية هندسيا وغير متقاطعة مثنى مثنى، وبالتالي إذا أردنا ان تكون الكرات المتساوية هندسيا من نفس الحجم فإننا نتعرض الى بعض التعقيدات. من جهة أخرى فإن الحجم يساوي تكامل التابع المساوي لِـ1 في الساحة المعتبرة وعليه تصبح المشاكل المتعلقة بالاحجام مشاكل في نظرية المكاملة. نشير الى ان هناك نظرية مكاملة في الفضاءات ذات الابعاد غير المنتهية لكنها تختلف اختلافا كبيرا عن النظرية المعتادة، الامر الذي يجعل تقديم كلا النظريتين في نفس العرض غير معقول (راجع ج.أ. شيلوف وفان ديك تين: التكامل والقياس والاشتقاق في الفضاءات الخطية، «ناوكا» 1967 (بالروسية)، وكذا المراجع الواردة في هذا الكتاب).

الفصل 4
المكاملة والاشتقاق

إن العمليات التفاضلية والتكاملية على التوابع المتعددة المتغيرات تربط بينها علاقات تعمم دستور نيوتن - ليبنيتز القائمة من اجل التوابع لمتغير واحد. كنا رأينا في الفصل السابق علاقة من هذا النوع وذلك عند تعريف كثافة تابع جمعي لساحة وانشاء هذا التابع حسب كثافته. هناك علاقات اخرى تلعب فيها حافة الساحة المعتبرة (الحافة هي طرفا المجال في حالة التوابع ذات متغير واحد) دورا رئيسياً. فيما يخص التوابع المتعددة المتغيرات فإن هذه العلاقات يعبّر عنها بدساتير اوستروغرادسكي وغرين وستوكس. كانت هذه العلاقات تكتب في البداية في شكل عددي أو « سلمي ». ثم تكوّن، بتأثير مسائل الفيزياء الرياضية، التحليل المسمى بالشعاعي المتميز بعملياته التفاضلية الخاصة (التدرج، التفرق، الدوار). اصبح من الواضح ان مسائل التحليل الشعاعي ما هي سوى المسائل المتعلقة بطبيعة العلاقات بين الاشتقاق والمكاملة (في الفضاء). إلاّ أن لغة التحليل الشعاعي ظهرت اكثر سلاسة وتعبيرا من اللغة القديمة « السلمية » للرياضيين، ذلك ما احدث اعادة انشاء « شعاعي » لكل هذا الفرع من الحساب التفاضلي والتكاملي اما فيما يخص التحليل الشعاعي فهو يستمد « كساءه » من الفيزياء، وتبين ان تناسق عملياته التفاضلية من الرتبة الاولى تناسق طبيعي وتام الى حد ما. نشير الى أن التحليل الشعاعي القديم، يطبق، فيما يخص الجزء الرئيسي (الدوار) منه، في الفضاء الثلاثي البعد (أو الثنائي البعد). كان ذلك كافيا لتطبيقاته الاولى في مجال الفيزياء الرياضية. لكن تطبيقاته المواليه تطلبت تعميما الى الفضاءات المتعددة الابعاد، خاصة وان النظرية الرياضية نفسها تبحث هي الاخرى على نصوص عامة قائمة من اجل اي بعد. اتضح انه من الممكن تعميم التحليل الشعاعي الى حالة الابعاد العالية؛ سنرى كيف يتم ذلك ضمن الفصل 7.

§ 1.4 دستور اوستروغرادسكي

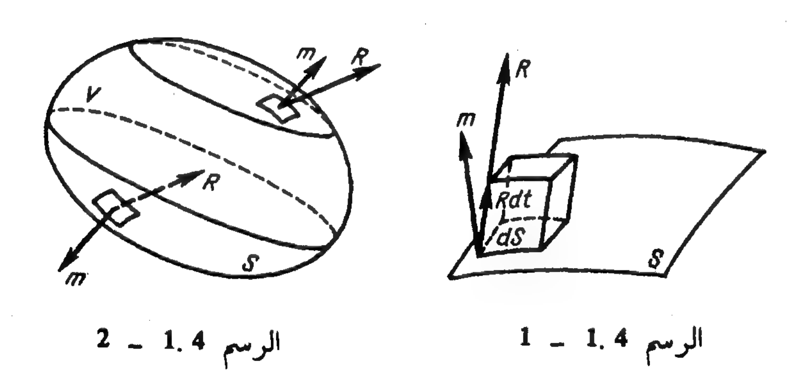
11.4 . تدفق حقل شعاعي وتفسيره الهيدروميكانيكي. ليكن $R = R(x)$ حقلا شعاعيا مستمرا معطى في ساحة G من الفضاء R_3 ؛ يعني ذلك انه يقابل كل نقطة $x \in G$ شعاعا $R(x)$ يتعلق باستمرار بالنقطة x . (ظهر مفهوم الحقل الشعاعي في الفيزياء وهو يطابق المفهوم الرياضي للتابع الشعاعي.) نعتبر في الساحة G سطحا S مرنا بتقطع، شعاعه الواحدي الناظمي m(x) يتغير باستمرار على الجزء المرن من السطح S. تسمى العبارة:

$$W(R(x), S) = \iint_S (m(x), R(x))\, dS \qquad (1)$$

تدفق الحقل R(x) عبر السطح S.

إن لهذه الكمية تفسيرا ميكانيكيا بسيطا. نفرض ان الساحة G مليئة « بوسط مستمر » (أي « سائل ») متحرك وان الشعاع R(x) يمثل سرعة السائل في النقطة x ؛ لنقيم كمية السائل العابرة للسطح S خلال الزمن dt .

ليكن ds عنصر السطح S؛ يمكن القول ، لدى اهمال تغيّر الشعاع $R(x)$ على العنصر dS ، ان السائل العابر لـ ds خلال الفترة dt يملأ الاسطوانة ذات القاعدة ds والمولدة R(x)dt (الرسم 1.4 ـ 1). نلاحظ ان حجم الاسطوانة يساوي:



الرسم 1.4 ـ 1

الرسم 1.4 ـ 2

عند جمع الكميات المحصل عليها على كل العناصر dS ؛ نرى ان كمية السائل العابرة للسطح S خلال الفترة dt هي:

$$dt \iint_S (m, R)\, dS = dt \cdot W(R, S).$$

في الاخير يمكن تفسير التدفق W(R,S) على انه السرعه (الحجمية) لحركة السائل عبر السطح S، او على انه كمية السائل العابر للسطح خلال وحدة زمن، وهذا لأن هذه السرعة لا تتعلق بالزمن.

زيادة على ذلك، بما أن $(m(x), R(x)) > 0$ عندما تكون الزاوية المشكلة بـ $m(x)$ و $R(x)$ حادة و $(m(x), R(x)) < 0$ إن كانت هذه الزاوية منفرجة، فإن التكامل (1) لا يمثل الكمية المطلقة للسائل العابر للسطح S في وحدة زمنية بل يمثل المجموع الجبري لكمية السائل الذي يجري في اتجاه الناظم (بالاشارة +) وكمية السائل الذي يجري في الاتجاه المعاكس (بالاشارة −).

نعتبر الحالة التي يكون فيها السطح S مسافة ساحة $V \subset G$ والشعاع الناظم $m(x)$ موجها نحو خارج V (الرسم 1.4 ـ 2). نسمي مثل هذه السطوح التي تقسم الفضاء الى مجموعتين داخلية (هي الساحة V) وخارجية سطوحا مغلقة (راجع المحيط المغلق)، وهو الامر الذي ينبغي الّا يخلط بالمعنى المتري للفظ «مغلق» (اي الحاوي لنقاط تراكمه). نرمز لتكامل تابع $F(x)$ على سطح مغلق S في R_3 بما يلي:

$$\oiint_S f(x)\, dS.$$

في حالة سطح مغلق، فإن حركة سائل في اتجاه الناظم تعني بان السائل، في المكان المعتبر، يخرج من الساحة V وان الحركة في الاتجاه المعاكس تعني بأن السائل يدخل في V. يمثل التكامل (1) إذن فرق كمية السائل الخارجة من الساحة خلال وحدة زمنية وكمية السائل التي دخلث V خلال نفس الفترة. إذا كان التكامل (1) منعدما فإن هاتين الكميتين متساويتان، والّا فإنهما مختلفتان. بصفة خاصة، إذا كان التكامل (1)

موجبا فإن كمية السائل الخارجة من الساحة تتجاوز الكمية الداخلة فيها. يعني ذلك ان الساحة V تحوي **مصادر** (للسائل) أي اماكن ينشأ فيها هذا السائل بشكل من الاشكال (مثلا فإن الماء ينشأ من ذوبان الثلج). في هذه الحالة، يمكن تفسير القيمة العددية للتكامل (1) على انه **المعدل**(*) **الكلي** للمصادر في الساحة V. إن كان التكامل (1) سالبا فإن كمية السائل الداخلة في V تتجاوز الكمية الخارجة من V؛ يعني ذلك وجود **آبار** في الساحة V، اي اماكن يزول فيها السائل (بالتبخر مثلا). يمكننا بطبيعة الحال استخدام لفظ مصدر بدل آبار شريطة قبول الكميات السالبة من السائل. لهذا السبب، نستطيع تفسير التكامل (1) على انه **المعدل الكلي للمصادر الواقعة في الساحة** V كما تُفسّر نسبة هذا التكامل على الحجم V بأنه **المعدل المتوسط** للمصادر في V. نثّبت في الساحة G نقطة y ونعتبر متتالية $V_1, \ldots, V_k, \ldots$ من الساحات المحدودة على التوالي بالسطوح $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ المتقلصة نحو النقطة y. يمثل العدد $W(R, V_k)/|V_k|$، كما سبق وان قلنا، المعدل المتوسط للمصادر في الساحة V_k. نفرض أن هذا المعدل المتوسط يؤول، من اجل $k \to \infty$، نحو نهاية $\rho = \rho(y)$ لا تتعلق باختيار الساحات V_k (شريطة ان تتقلص نحو النقطة y). من الطبيعي ان نسمي العدد $\rho(y)$ **معدل** (أو **كثافة**) **مصدر الحقل** R(x) **عند النقطة** y. تسمى هذه النهاية ايضا **تفرق الحقل** R(x) **عند النقطة** z. وهكذا لدينا تعريفاً:

$$\operatorname{div} R(y) = \lim_{V_k \to y} \frac{1}{|V_k|} \iint_{S_k} (m, R)\, dS \qquad (2)$$

وهذا مع افتراض ان النهاية موجودة.

عندما يكون التفرق، أي معدل مصدر الحقل R(x) عند كل نقطة معطى، يمكننا استنتاج، بالمكاملة، المعدل الكلي لمصادر هذا الحقل في كل الساحة V. نرمز لهذا المعدل الكلي بـ$E(R(x), V)$. لدينا إذن،

(*) يقال ايضا المدد او الدفق (المترجم)

تعريفاً :

$$E(R(x), V) = \iiint_V \operatorname{div} R(x)\, dx.$$

لما كان هذا السياق مستقرا (أي R(x) لا يتغير مع الزمن) فإن كل السائل المنشأ يعبر حتماً الحافة، ومنه تأتي المساواة:

$$\iiint_V \operatorname{div} R(x)\, dv = \oiint_S (m, R)\, dS \qquad (3)$$

التي لها تفسير فيزيائي واضح.

21.4 . ننتقل الآن الى الدراسة النظرية

أ . يمكن تعميم تعريف تدفق الحقل الشعاعي المعطى في 11.4 ، وذلك تغييرات كبيرة، ليشمل حالة الفضاء R_n . ليكن $R(x)=R$ حقلا شعاعيا مستمرا بتقطع في ساحة $G \subset R_n$. مهما كان السطح $S \subset G$ ذو البعد $(n-1)$ المرن بتقطع المزود بالشعاع الواحدي المستمر للناظم $m(x)$(*)، يمكننا تعريف تدفق الحقل R عبر السطح S بالدستور:

$$W(R, S) = \int_S (m(x), R(x))\, dS.$$

نشير، كما هو الحال في R_3 ، الى اننا نقول عن سطح $S \subset R_n$ إنه مغلق إذا قسّم الفضاء R_n الى مجموعتين داخلية وخارجية. نرمز لتكامل على سطح مغلق بـ $\oint$ ، على الرغم من انه ينبغي حسب الرمز $\oiint$ المستخدم في R_3 استخدام الرمز $\underbrace{\oint \cdots \oint}_{n-1}$ في R_n .

إن تدفق الحقل R عبر سطح مغلق قاسم لساحة V يمثل، حيث وجهنا الناظم نحو الخارج، تابعا للساحة V:

$$W(R, S) \equiv W_V(R) = \oint_S (m, R)\, dS. \qquad (1)$$

ب. نهتم الآن بكوْن التابع $W_V(R)$ تابعا جمعيا بقوة للساحة V. نذكّر اننا نقول عن تابع $\Phi(V)$ للساحة V إنه جمعي بقوة (14.3 ـ أ) إذا تحققت لدينا المساواة التالية من اجل كل ساحتين V_1 و V_2 بدون

(*) إن وجود شعاع واحد مستمر للناظم على سطح مرن S ليس مضمونا، عموما، حتى في R_3 (التمرين 15). نلاحظ ان وجود مثل هذا الشعاع شرط اضافي على S (« توجيه S »)؛ انظر التفاصيل في القسم الثالث، الفصل 8.

نقاط داخلية مشتركة (وقد يكون لهما جزء مشترك على الحافة) اتحادهما هو V :

$$\Phi(V) = \Phi(V_1) + \Phi(V_2). \tag{2}$$

إن الجمعية القوية للتدفق (1) تستند على كوْن الشعاع الناظمي m يجب ان يكون موجها نحو الجزء الخارجي من الفضاء؛ وبالتالي فإن الكميتين (m,R)، من اجل كل نقطة على الجزء المشترك من حافتي V_1 و V_2 (إن كان هذا الجزء موجودا) لهما اشارتان مختلفتان، اما الجزءان الموافقان لهاتين الكميتين من التكاملين $W_{V_1}(R)$ و $W_{V_2}(R)$ فيختصران؛ تمثل النتيجة إذن تكاملا على كل حافة الساحة V.

نشير الى ان الاستدلال السابق لا يقوم الّا من اجل الساحات التي لها شكل بسيط بما فيه الكفاية. إذا كانت الساحتان V_1 و V_2 معقدتين بقدر ما، فإن البرهان على المساواة (2) يصبح معقداً. لذا سوف لن نعالج هنا سوى بعض الساحات الخاصة تكون فيها خاصية جمعية التابع (1) بديهية. بعبارة اخرى، نعتبر بلاطة مثبتة $X \subset R_n$ وساحة مثبتة $V \subset X$ تمثل جسم (مجموعة) جورداني حافته S مرنة بتقطع والجماعة $\mathfrak{A}(V)$ المؤلفة من كل المجموعات الجوردانية U التي تمثل كل منها تقاطع بلاطة جزئية من البلاطة X مع V. تمثل الجماعة $\mathfrak{A}(X)$ ، بطبيعة الحال، نصف حلقة (21.3)، كما تمثل المجموعات U خلاياها؛ إذا اخترنا كقياس خلية U حجمها $|U|$ ، فإننا نحصل على نصف حلقة مزودة بقياس، بحيث تصبح V فضاء مشحونا. بل فضاء مشحونا نظيمياً (15.3 ـ ب). إن كل خلية U وكذا V نفسها، لها حافة $S(U)$ مرنة بتقطع. من جهة اخرى فإن التابع:

$$W_U(R) = \oint_{S(U)} (m(x),\ R(x))\, dS$$

كما رأينا آنفا، جمعي بقوة على الخلايا $U \in \mathfrak{A}(V)$ ، وعليه يمكننا تطبيق النتائج 14.3 ـ 44.3 . بصفة خاصة، وطبقاً للتعريف 24.3 ـ ب، فإن

كثافة التابع $W_U(R)$ في نقطة $y \in V$ هي النهاية التالية (إن كانت موجودة)

$$\lim_{U \to y} \frac{1}{|U|} \oint_{S(U)} (m, R)\, dS.$$

نرمز في الحالة الراهنة لهذه النهاية بـ$\operatorname{div} R(y)$. نفرض ان $\operatorname{div} R(y)$ موجود عند كل نقطة $y \in V$ ويمثل تابعا مستمرا لـV. عندئذ تتحقق المساواة 3 .44(1):

$$\oint_{S(U)} (m, R)\, dS \equiv W_U(R) = \oint_U \operatorname{div} R(y)\, dy,$$

وهكذا يتبين أن المساواة 4 .11(3) قد تم اثباتها ضمن الشروط الموضوعة اعلاه على التدفق $W_U(R)$. نشير الى اننا اثبتناها من اجل الفضاء ذي البعد n

4 .31. تعتمد النتيجة 4 .21 على الفرض القائل ان تفرق الحقل $R(x)$ اي الكمية

$$\lim_{U \to y} \frac{1}{|U|} \oint_{S(U)} (m, R)\, dS \tag{1}$$

موجودة وتمثل تابعا مستمرا للنقطة. ما هي الحقول الشعاعية التي يمكن ان نضمن لها وجود النهاية (1)؟ سنجيب عن هذا السؤال في المستقبل (4 .51)؛ سنرى أن الحقول الشعاعية التي لها مركبات ذات مشتقات مستمرة تملك بالضرورة تفرقا مستمراً. يتطلب هذا البرهان استخدام دستور من اهم الدساتير التي تربط تكاملي الحجم والسطح، وهو دستور اوستروغرادسكي.

إن الدستور المعروف لنيوتن ـ ليبنيتز (انظر ي 9. 23):

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

يربط مشتق وتكامل تابع لمتغير واحد. يُمثل دستور اوستروغرادسكي تعميا من أهم التعميات للدستور السابق في الفضاءات المتعددة المتغيرات.

نختار في الفضاء (ذي البعد n) الاقليدي R_n اساسا متعامدا

ومتجانسا وكيفيا $e_1, \ldots, e_n$، عندئذ يكتب الجداء السلمي لشعاعين $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ على النحو:

$$(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

نعتبر في R_n ساحة G محدودة بسطح مرن بتقطع S. يمكن إذن تمثيل السطح S كإتحاد عدد منته من اجزائه S_p $(p = 1, \ldots, q)$ حيث لا تملك هذه الاجزاء نقاطا داخلية مشتركة (بالنسبة لـS)؛ مهما كانت النقطة الداخلية $x \in S_p$، يوجد جواد V (في R_n) يُمثل فيه السطح S_p بالمعادلات الوسيطية ذات الشكل:

$$x_i = \varphi_i(u_1, \ldots, u_{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

حيث تقبل التوابع $\varphi_i(u), u = (u_1, \ldots, u_{n-1})$ مشتقات أولى مستمرة، نلاحظ ان مرتبة المصفوفة اليعقوبية $\left\| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_{n-1})} \right\|$ تساوي n−1. ثم إن الشعاع.

$$N = \begin{Vmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n(u)}{\partial u_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial\varphi_n(u)}{\partial u_{n-1}} \end{Vmatrix},$$

نظيمي، كما رأينا في 26.3 ـ ج، على السطح S في كل نقطة $u \in S$ باستثناء نقاط الوصل (حيث يكون فيها هذا الشعاع غير معرف بشكل وحيد، وعليه لن نعتبره في هذه النقاط). نلاحظ ان هذا الشعاع N غير منعدم في اية نقطة كانت، وذلك بفضل الفرض حول مرتبة المصفوفة اليعقوبية. نحصل عند توحيد N على الشعاع:

$$m(u) = N/|N| \qquad (2)$$

الذي يمكن ان يكون له اتجاهان. نختار منهما الاتجاه الخارجي بالنسبة للساحة G. إن الشعاع $m(u)$ معين بشكل وحيد؛ نسميه شعاعا واحديا نظيميا على السطح S عند النقطة u. نرمز بـ ω_i للزاوية المشكلة من الشعاع m ومحور العناصر x_i؛ عندئذ:

$$m = e_1 \cos \omega_1 + \ldots + e_n \cos \omega_n. \tag{3}$$

ليكن $P(x) = P(x_1, .., x_n)$ تابعا في الساحة G مستمرا وله مشتق مستمر $\frac{\partial P}{\partial x_k}$. يتحقق عند ذلك الدستور (الذي سوف نستنتجه في 41. 4):

$$\int_G \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} dx = \oint_S \cos \omega_k \cdot P(x)\, dS. \tag{4}$$

إن التابع $\cos \omega_k$ معرف على كل السطح S باستثناء نقاط وصل السطوح S_j ، وهو مستمر على كل جزء S_j ، وبالتالي، مستمر بتقطع على S ، وبذلك نضمن وجود تكامل السطح الوارد في الطرف الثاني.

عند تعويض P(x) بـ $P_k(x)$ في (4) وجمع الدساتير الناتجه عن ذلـك، وفـق الدليـل k المتغير مـن 1 الى n نصـل الى دستـور اوستروغرادسكي:

$$\int_G \left(\frac{\partial P_1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n(x)}{\partial x_n} \right) dx = \tag{5}$$

$$= \oint_S (\cos \omega_1 P_1(x) + \ldots + \cos \omega_n P_n(x))\, dS.$$

إذا كان n=1 فإن الساحة G تصبح مجالا وحافتها S مؤلفة من نقطتين ويستبدل تكامل السطح في الطرف الثاني من (4) بفرق قيمتي التابع P(x) عند هاتين النقطتين، وهكذا نجد دستور نيوتن - ليبنيتز من جديد. اما في الحالة العامة فيرد دستور اوستروغرادسكي تكامل حجم من شكل خاص الى تكامل على السطح الذي يمثل حافة الحجم المعتبر.

لنر ما يحتويه هذا الدستور إن كل تابع $P_k(x)$ في تكامل السطح الوارد في الطرف الثاني مضروب في المركبة التابعه له للشعاع الناظمي m ؛ ثم إن كل تابع $P_k(x)$ في تكامل الحجم الوارد في الطرف الاول مشتق بالنسبة للإحداثية الموافقة له. يمكن القول ان الانتقال من الطرف الثاني للمساواة

(5) الى طرفها الاول ينحصر في تعويض الرموز $\frac{\partial}{\partial x_k}$ بالرموز وتكامل السطح بتكامل الحجم.

إذا كان $P_k(x) = x_k$ فإن الدستور (5) يؤدي الى نتيجة هامة:

$$\int_G n\,dx = n|G| = \oint_S \sum_{k=1}^{n} \cos\omega_k \cdot x_k\,dS. \tag{6}$$

وهكذا يتم التعبير على حجم الساحة G بتكامل السطح الذي يمثل حافة تلك الساحة.

هناك نتيجة مفيدة اخرى تأتي من الدستور (4)، نحصل عليها بضرب طرفيها في شعاع الاساس e_k ، ثم نجمع (على k) تلك العلاقات، بما أن:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} e_k = \operatorname{grad} P(x), \quad \sum_{k=1}^{n} \cos\omega_k \cdot e_k = m = m(x),$$

فإننا نحصل على:

$$\int_G \operatorname{grad} P(x)\,dx = \oint_S m(x)\,P(x)\,dS, \tag{7}$$

وهي علاقة تمثل واحد من الرموز الشعاعية لدستور اوستروغرادسكي.

إذا وضعنا في هذه العلاقة $P(x) \equiv 1$ نصل الى العلاقة:

$$\oint_S m(x)\,dS = 0;$$

اي ان : القيمة الوسطى للشعاع الواحدي للناظم على السطح (المرن بتقطع) الذي يمثل حافة الساحة V قيمة منعدمة.

4. 1. 4 . نتناول الآن استنتاج الدستور 31.4(4) الذي يأتي منه الدستور 31.4(5). نرمز بِـQ لمسقط الساحة G على مستوى الاحداثيات x_{n-1} ، $x_1, \dots,$.

أ. نفرض مؤقتا، كما جاء في 25.3 ـ ج، ان الساحة G تحقق الشرط التالي:

(*) نفرض ان كل مستقيم عمودي اما ان يكون بدون نقاط مشتركة مع G واما ان يخرق G وفق قطعة مستقيمة (قد تنحل في نقطة).

تعين المتراجحات التالية المجال المذكور آنفا:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

حيث φ و ψ تابعان مستمران. ندخل الرمز $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

نطلق مصطلح الجزء الاعلى للسطح S على جزئه S_s المعين بالمعادلة $x_n = \psi(x')$ ومصطلح الجزء الادنى لِـS على جزئه S_1 المعين بالمعادلة $x_n = \varphi(x')$ لدينا عند نقاط الجزء الاعلى S_s المعرف فيها الشعاع m المتراجحة $(m, e_n) \leqslant 0$ ؛ ولدينا المتراجحة $(m, e_n) \geqslant 0$ على الجزء الادنى S_1 . وهكذا ينتج من 26.3 ـ د:

$$(m, e_n) = \left(\frac{N}{|N|}, e_n\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + 1}} & (x \in S_s), \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + 1}} & (x \in S_1). \end{cases}$$

عند تطبيق قاعدة تحويل تكامل مضاعف الى تكامل مكرر (25.3 ـ ج) عدة مرات وتعريف تكامل سطح فإننا نحصل على:

$$\int_G \frac{\partial P(x)}{\partial x_n} dx = \int_Q \left[\int_{x_n=\varphi(x')}^{\psi(x')} \frac{\partial P(x', x_n)}{\partial x_n} dx_n\right] dx' =$$

$$= \int_Q P(x', \psi(x'))\, dx' - \int_Q P(x', \varphi(x'))\, dx' =$$

$$= \int_Q P(x', \psi(x'))\,(m, e_n) \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + 1}\, dx' +$$

$$+ \int_Q P(x', \varphi(x'))\,(m, e_n) \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right)^2 + 1}\, dx' =$$

$$= \int_{S_s} P(x)\,(m, e_n)\, dS_s + \int_{S_1} P(x)\,(m, e_n)\, dS_1 = \oint_S P(x) \cos\omega_n\, dS.$$

وهكذا اثبتنا الدستور 31.4 باعتبار الافتراض (*).

ب. كما ورد في 25.3 ـ د، فإننا نستطيع اعتبار حالة اعم. لنفرض ان

الساحة G اتحاد ساحات $G_1, \ldots, G_k$ بدون نقاط داخلية مشتركة تحقق كل منها الشرط (*)؛ نكتب الدستور (4) من اجل كل ساحة من هذه الساحات ونجمع النتائج؛ يعطي مجموع تكاملات الحجم على الساحات G_k تكامل الحجم على الساحة G، كما يمثل مجموع تكاملات السطح على الحافات S_j للساحات G_j تكامل السطح على الحافة S للساحة G، ذلك لأن الحدود الموافقة للتكاملات على اجزاء حافات G_j الواقعة داخل G تختصر، وهو ما رأيناه اعلاه.

كنا قلنا بأن اثبات الدستور 31.4(4) يثبت دستور اوستروغرادسكي 31.4(5) في حالته العامة.

51.4 . لنثبت الآن بأن تفرق حقل $R(x) = \{P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ يكون موجودا ومستمرا بمجرد قبول المركبات $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ للحقل $R(x)$ لمشتقات مستمرة. لهذا الغرض نكتب من اجل الساحة G دستور اوستروغرادسكي 31.4(5):

$$\oint_S (m, R)\, dS \equiv \oint_S (\cos\omega_1 P_1 + \ldots + \cos\omega_n P_n)\, dS =$$

$$= \int_G \left(\frac{\partial P_1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n(x)}{\partial x_n}\right) dx. \qquad (1)$$

إن كثافة (24.3 ـ ج) التابع الجمعي للساحة G الوارد في الطرف الثاني هي التابع الوارد تحت رمز المكاملة:

$$\lim_{U \to y} \frac{1}{|U|} \int_G \left(\frac{\partial P_1(x)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n(x)}{\partial x_n}\right) dx = \frac{\partial P_1(y)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n(y)}{\partial x_n}.$$

وبالتالي فإن تدفق الحقل R الوارد في الطرف الاول من (1) لها نفس الكثافة، إذن:

$$\lim_{U \to y} \frac{1}{|U|} \oint_{S(U)} (m, R)\, dS \equiv \operatorname{div} R(y) = \frac{\partial P_1(y)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P_n(y)}{\partial x_n}, \qquad (2)$$

وهو ما يثبت قضيتنا. وهكذا نحصل على شكل صريح لتفرق للحقل R.

4 .61. الحالة $n=2$؛ دستور غرين (Green). في حالة n=2 فإن الساحة G شكل مستو محدود بمحيط L مرن بتقطع. إذا وضعنا

$$R = R(x, y) = e_1 M(x, y) + e_2 N(x, y)$$

حيث $M(x, y)$ و $N(x, y)$ تابعان مشتقاتهما الاولى مستمرة، فإن دستور اوستروغرادسكي يكتب على الشكل:

$$(1) \qquad \iint_G \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_L (m, \hat{R})\, dL,$$

حيث m هو الشعاع الواحدي الناظمي على المحيط L الموجه نحو خارج الساحة G (الرسم 4 ـ 1.4). من الملاحظ الآن ان التكامل المنحنى في الطرف الثاني ليس متعلقا باتجاه التجول على المحيط L، لأننا لم نثبّت بعد التوابع الوسيطية للمحيط. نختار كوسيط طول القوس s المحسوب وفق الاتجاه الموجب للمحيط (أي في الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة)؛ عندئذ يكون الشعاع القطبي r للمنحنى L، وكذا الامر فيما يخص الشعاعين R و m، تابعا لِـ s وتصبح لدينا العلاقة:

$$\int_L (m, R)\, dL = \oint_L (m(s), R(s))\, ds.$$

نؤكد بعد ذلك ان

$$\oint_L (m, R)\, ds = \oint_L M\, dy - N\, dx.$$

بالفعل فإن مركبتي الشعاع الواحدي $\tau = \frac{dr}{ds}$ الماس للمحيط L هما

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\widehat{\tau, e_1}), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\widehat{\tau, e_2})$$

بحيث ان $dy = ds \cos(\widehat{\tau, e_2})$، $dx = ds \cos(\widehat{\tau, e_1})$، إذن:

$$\oint_L M\, dy - N\, dx = \oint_L [M \cos(\widehat{\tau, e_2}) - N \cos(\widehat{\tau, e_1})]\, ds =$$

$$= \oint_{\gamma} [M \cos(\widehat{m, e_1}) + N \cos(\widehat{m, e_2})]\, ds = \oint_{L} (m, R)\, ds.$$

يأخذ دستور اوسترورغرادسكي على الشكل:

$$\iint_{G} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{L} M\, dy - N\, dx, \qquad (2)$$

يسمى هذا الدستور عند كتابته على هذا الشكل **دستور غرين.**

من اجل $M \equiv x,\ N \equiv y$ فإن الطرف الاول يمثل ضعف مساحة الساحة G . وهكذا لدينا:

$$|G| = \frac{1}{2} \oint_{L} x\, dy - y\, dx.$$

كنا رأينا هذا الدستور في ي 49.9 بطريقة اخرى.

عند تعويض M بـ N و N بـ M في (2) نجد:

$$\iint_{G} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{L} M\, dx + N\, dy. \qquad (3)$$

إذا أخترنا، كالسابق، الوسيط على المنحنى L طول القوس s ، نجد:

$$\oint_{L} M\, dx + N\, dy = \oint_{L} \left(M \frac{dx}{ds} + N \frac{dy}{ds}\right) ds = \oint_{L} (\tau, R)\, ds$$

حيث يرمز τ دائما الى الشعاع الواحدي الماس للمحيط L .

نصل إذن الى صياغة اخرى لدستور اوستروغرادسكي من اجل n=2 :

$$\iint_{G} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{L} (\tau, R)\, ds, \qquad (4)$$

حيث R=(M,N) تابع شعاعي مركباتاه هما $M(x, y),\ N(x, y)$ لهما مشتقات مستمرة في الساحة G.

71. 4 . التوابع ذات القيم الشعاعية. إن مركبات الحقل $R = \{P_1, \ldots, P_n\}$ ليست بالضرورة توابع عددية: تبق كل نتائج 11. 4 ـ 61. 4 قائمة من اجل التوابع $P_j(x)$ عندما تأخذ قيمها، مثلا، في فضاء باناخي B . بالطبيعة الحال، يجب دائما اشتراط على التوابع $P_j(x)$ ان تكون مستمرة بالنسبة لِـ x_j . بصفة خاصة يقوم دستور اوستروغرادسكي 31. 4 (5) على الشكل:

$$\int_{G} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_k}{\partial x_k} dx = \oint_{S} \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k \cdot P_k(x)\, dS \quad (\in B). \qquad (1)$$

تبقى القاعدة المشار اليها في 31.4 دائما قائمة: عند الانتقال من الطرف الثاني الى الطرف الاول تستبدل المركبات $\cos\omega_j$ للشعاع m برموز الاشتقاق بالنسبة للإحداثيات الموافقة لها ويستبدل تكامل السطح بتكامل الحجم.

اخيرا، من اجل n=2 و$R = \{M, N\}$ تبقى صيغتا دستور اوستروغرادسكي 61.4 (1) و61.4 (4) قائمتان:

$$\iint_G \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_L (m, R)\, dL, \tag{2}$$

$$\iint_G \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_L (\tau, R)\, dL. \tag{3}$$

81.4 . إن بعض النتائج الهامة المترتبة عن 71.4 تتحقق في الحالة التي تكون فيها التوابع $P_j(x)$ ذات قيم في فضاء بعده منته. نعتبر الجداء الشعاعي في R_3 لشعاعين $q = (q_1, q_2, q_3)$ و$R = (Q_1, Q_2, Q_3)$:

$$(1) \quad [q, R] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} = q_1 \begin{vmatrix} e_3 & e_2 \\ Q_3 & Q_2 \end{vmatrix} + q_2 \begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ Q_1 & Q_3 \end{vmatrix} + q_3 \begin{vmatrix} e_2 & e_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{vmatrix}.$$

نضع

$$P_1 = \begin{vmatrix} e_3 & e_2 \\ Q_3 & Q_2 \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ Q_1 & Q_3 \end{vmatrix}, \quad P_3 = \begin{vmatrix} e_2 & e_1 \\ Q_2 & Q_1 \end{vmatrix}.$$

عندئذ يؤدي الدستور 71.4 (1) الى النتيجة:

$$\oiint_S [m, R]\, dS = \oiint_S \sum_{k=1}^{3} \cos\alpha_k \cdot P_k(x)\, dS \equiv \oiint_S \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q_3(x) \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iiint_G \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ Q_1(x) & Q_2(x) & Q_3(x) \end{vmatrix} dx \equiv \iiint_G \left[\left(\frac{\partial Q_3}{\partial x_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial x_3}\right) e_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial x_1}\right) e_2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial x_2}\right) e_3\right] dx.$$

تسمى العبارة $\oiint_S [m, R]\, dS$ **دوران الحقل الشعاعي $R(x)$ على الحافة**

S للساحة G. سنوضح في 42.4 المعنى الهندسي والميكانيكي لهذا المفهوم.

§ 2.4. دوار الحقل الشعاعي

12.4. التدرج والكمون.

أ. ليكن $L = \{x \in R_n : x = x(t), a \leqslant t \leqslant b\}$ منحنيا مرنا بتقطع، معطى في ساحة $G \subset R_m$، بدون نقاط شاذة (أي أن $x'(t)$ غير منعدم على L). يمكننا عندئذ توسيط المنحنى L بوسيط طبيعي وهو طول القوس s؛ ويكون الشعاع $\tau = x'(s)$ الشعاع الواحدي الماس للمنحنى L. نعتبر الى جانب ذلك حقلا شعاعيا مستمرا $R = \{P_1(x), \ldots, P_n(x)\}$ معطى في الساحة G. يسمى العدد

$$\int_L (\tau(s), R(s))\, ds = \int_L P_1\, dx_1 + \ldots + P_n\, dx_n \tag{1}$$

تكامل الحقل R على المنحنى L.

إذا فسرنا الحقل R على انه حقل قوة (الجاذبية، مثلا) تفسر العبارة (1) على انها تمثل عمل القوة R على السبيل L. نلاحظ انه من المهم في بعض المسائل الميكانيكية الآ يتعلق هذا العمل بالسبيل L وان يتعلق فقط بنقطتي الوصول والانطلاق. لكن هذه الحالة ليست معتادة وعليه نسأل السؤال التالي، وهو رياضيا محضا: ما هي الشروط التي ينبغي فرضها على الحقل R (اي على التوابع $P_1, \ldots, P_n$) كي يكون تكامل الحقل R على اي سبيل $L \subset G$ متعلقا فقط بطرفي L ولا يتعلق بالمنحنى L نفسه؟

نفرض ان الحقل R حقل تدرج تابع سلمي $\varphi(x)$، أي ان:

$$P_1(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}, \ \ldots, \quad P_n(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n}. \tag{2}$$

عندئذ يكون تكامل الحقل R على اي سبيل L معينا فقط بنقطة الانطلاق A ونقطة الوصول B للسبيل L، وذلك لأن:

$$(3)\quad \int_A^B (\tau, R)\,ds = \int_A^B P_1\,dx_1 + \ldots + P_n\,dx_n = \int_A^B \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n = \int_A^B d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A).$$

إذا تحققت العلاقات (2) فإننا نقول عن الحقل R إنه كموني ويسمى التابع $\varphi(x)$ كمون الحقل R. تقرأ المساواة (3) بلغة الميكانيكا كما يلي: إن عمل حقل قوة كموني $R = \{P_1, \ldots, P_n\}$ على سبيل L يصل نقطتين A و B يساوي فرق قيمتي الكمون عند النقطتين A و B.

ج . إن القضية العكسية صحيحة ايضا:

نظرية. إذا كان تكامل حقل R على كل سبيل L في الساحة G لا يتعلق سوى بطرفي L، فإن R حقل كموني.

برهان. نثبت في الساحة G نقطة A ونضع من اجل كل نقطة اخرى $B = B(x_1, \ldots, x_n)$:

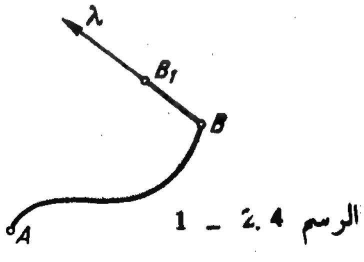
$$(4)\quad \varphi(B) \equiv \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_A^B (\tau, R)\,ds$$

حيث تتم المكاملة على اي سبيل يصل النقطة A بـB في الساحة G؛ بما ان تكامل الحقل لا يتعلق فرضا بالسبيل فإن التابع $\varphi(B)$ معرف بشكل وحيد. لنبين أن

$$\text{grad}\,\varphi(B) = R(B).$$

لبلوغ ذلك نكتب مشتق التابع φ وفق اتجاه كيفي λ معين بشعاع واحدي e. نختار نقطة B_1 على نصف المستقيم البارز من النقطة B في الاتجاه λ (الرسم 2.4 ـ 1) ونشكّل النسبة:

$$\frac{\varphi(B_1) - \varphi(B)}{|B_1 - B|}.$$



الرسم 2.4 ـ 1

يمكن القول أن الكمية $\varphi(B_1)$ هي تكامل الحقل R على السبيل BB_1 ، حيث BB_1 قطعة مستقيم. عندئذ يمثل:

$$\frac{\varphi(B_1)-\varphi(B)}{|B_1-B|}=\frac{1}{|B_1-B|}\int_B^{B_1}(\tau, R)\,ds$$

القيمة الوسطى للتابع $(\tau, R)=(e, R)$ على القطعة BB_1 . إذا اقتربت B_1 من B فإن هذه القيمة الوسطى تؤول الى النهاية $(e, R(B))$. وبالتالي فإن مشتق التابع φ وفق الاتجاه λ عند النقطة B موجود، ولدينا:

$$\frac{\partial\varphi(B)}{\partial\lambda}=(e, R(B)).$$

بصفة خاصة:

$$\frac{\partial\varphi(B)}{\partial x_1}=P_1(B), \ \ldots, \quad \frac{\partial\varphi(B)}{\partial x_n}=P_n(B).$$

وهذا يعني بأن الشعاع R(B) مطابق لتدرج التابع φ (4) عند النقطة B . انتهى البرهان.

نشير ايضا الى انه لا يمكن ان يكون لحقل شعاعي معطى R سوى تابع كموني واحد φ ، بتقدير ثابت. بالفعل، إذا كان ψ تابعا كمونيا ثانيا للحقل R فإن لدينا حسب الدستور (3):

$$\psi(B)-\psi(A)=\int_A^B(\tau, R)\,ds=\varphi(B),$$

ومنه يأتي:

$$\psi(B)=\varphi(B)+\psi(A)=\varphi(B)+\text{const},$$

حيث C ثابت، وهو المطلوب.

د. يقتصر السؤال الوارد في أ على ما يلي: ما هي الشروط التي ينبغي فرضها على التوابع $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ كي يوجد تابع $\varphi(x)$ بحيث

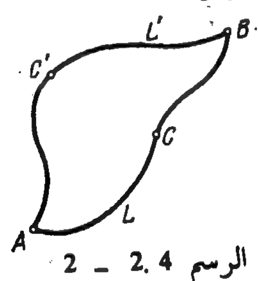
$$P_1(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}, \ \ldots, \quad P_n(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} \text{ ؟} \tag{5}$$

إننا على علم بالجواب على الاقل من أجل ساحات صغيرة بكفاية او مترابطة ببساطة في الفضاء R_n (16.2 ـ ب): لكي يوجد تابع $\varphi(x)$ يحقق

الشروط (5) يلزم ويكفي ان تتحقق المتطابقات التالية:

$$\frac{\partial P_i(x)}{\partial x_j}=\frac{\partial P_j(x)}{\partial x_i}\quad (i,\ j=1,\ \ldots,\ n). \qquad (6)$$

نلاحظ ان هذا الشرط يصبح غير كاف إذا كانت الساحات غير مترابطة ببساطة (انظر التمرين 6).



الرسم 4 .2 ـ 2

22.4 . جولان حقل شعاعي. ليكن L=ACB و L′=AC′B منحنيين (مرنين بتقطع) ينطلقان، في ساحة $G\subset R_n$، من نقطة معطاة A ويصلان الى نقطة معطاة B (الرسم 4 .2 ـ 2). عندما نسير على المنحنى L من A نحو B ثم نعود الى النقطة A على المنحنى L′ فإننا نرسم محيطا مغلقا Γ= ACBC′A. لدينا في هذه الحالة، من اجل حقل شعاعي مستمر R مختار بشكل كيفي:

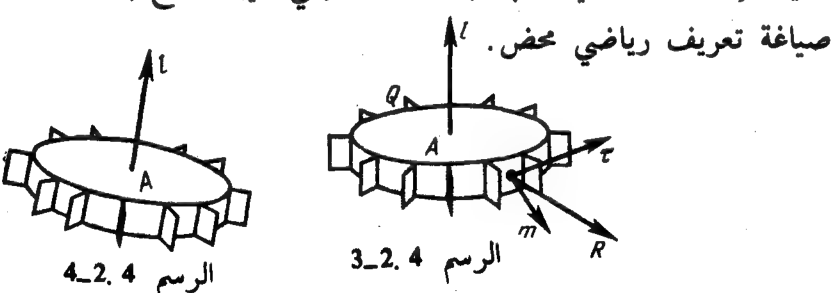
$$\int_L (\tau,\ R)\,ds-\int_{L'}(\tau,\ R)\,ds=\int_{ACB}(\tau,\ R)\,ds+\int_{BC'A}(\tau,\ R)\,ds=\oint_{\Gamma}(\tau,\ R)\,ds. \qquad (1)$$

يسمى تكامل حقل R على طول محيط مغلق L **جولان الحقل** R على هذا المحيط.

تبيّن المساواة (1) أن المسائل المتعلقة باستقلال تكامل حقل سبيل مكاملة تكافيء الشروط التي تضمن انعدام جولان حقل على كل محيط مغلق. إذن فإن الجواب على السؤال الاخير هو الجواب على السؤال الذي سبقه: يكون جولان حقل R على كل محيط مغلق في ساحة G منعدما إذا وفقط إذا كان الحقل R كمونيا في الساحة G. ينحصر الجواب، في الساحات الصغيرة بكفاية او المترابطة ببساطة، إذن في تحقق العلاقات 12.4 (6).

4 .32 . مسألة ميكانيكية اخرى. ليكن $R(x)$ حقلا شعاعيا معطى في ساحة G من الفضاء R_3 . نفسره هنا ايضا، كما جاء في 4 .11 ، كحقل سرعة سائل متحركة. نسوق فيما يلي تجربة مثالية في الميكانيكا. نُقيم في الساحة G عجلة صغيرة اسطوانية Q مزودة بعدد كبير من الألسنة، يمكنها الدوران بحرية حول محور مثبت بشكل كيفي؛ نعيّن الاتجاه الموجب للمحور بشعاع واحدي l (الرسم 4 .2 ـ 3). بالتأثير على الألسنة تقوم جزيآت السائل بإدارة العجلة Q بسرعة زاوية $\omega(Q,l,A)$ تتعلق (في نقطة معينة A من الساحة G) بالشعاع l. لنتفق على قاعدة تعيين الاشارات (بافتراض ان جملة الاحداثيات تقع على اليمين): السرعة الزاوية للعجلة موجبة إذا دارت في الاتجاه المعاكس لإتجاه حركة عقارب الساعة وذلك عند النظر من خلال موصل الشعاع l (الذي يقع منطلقه في المركز A للعجلة Q) وتكون سالبة في الحالة المعاكسة. بجعل اتجاه الشعاع l يتغير بكل الاشكال الممكنة (مع الاحتفاظ بموقع منطلقه A) نحصل على قيم مختلفة، طويلة واشارة، للسرعة الزاوية؛ تأخذ السرعة الزاوية قيمتها الاعظمية ω_0 من اجل موقع l_0 للشعاع l. **دوار الحقل R** عند النقطة A هو تعريفاً الشعاع $2\omega_0 l_0$.

إن تعريف دوار حقل شعاعي معطى بهذا الشكل الميكانيكي لا يمكن اعتباره سليما من وجهة النظر الرياضية. (فهو يعتمد على بعض الافتراضات المتعلقة بتجاذب جزيآت السائل مع الالسنة، وهو لا يدلنا عن شيء عندما تكون السرعة الزاوية الاعظمية موافقة لموقعين مختلفين لمحور العجلة Q؛ اخيرا فإن الدور الذي تلعبه أبعاد العجلة بقي غير واضح.) نحاول الآن صياغة تعريف رياضي محض.



الرسم 4 .2ـ4 الرسم 4 .2ـ3

إن التأثير الدوراني لجزيآت السائل على لسان من السنة العجلة Q تعينه مركبة الشعاع R على طول خط تأثير اللسان المعتبر، اي الكمية $(\tau(M), R(M))$ ، حيث يمثل $\tau(M)$ الشعاع الواحدي الماس لدائرة دوران اللسان الموجب (الرسم 2.4 ـ 4). إن ما يدير العجلة هو التأثير الكلي لكافة الجزيآت على الالسنة، ومن ثم فإن افضل افتراض طبيعي يقتصر على القول بأن السرعة الخطية v لكل نقطة على دائرة العجلة تساوي المتوسط الحسابي لكل الكميات (τ, R) ، اي التكامل على السطح الجانبي Σ للعجلة Q:

$$v=\frac{1}{2\pi rh}\iint_{\Sigma}(\tau, R)\,dS,$$

حيث يمثل r نصف قطر الدائرة ويمثل h سمك العجلة Q.

للحصول على قيمة السرعة الزاوية، يجب تقسيم السرعة الخطية على نصف قطر الدائرة؛ بما ان الحجم |Q| للعجلة Q يساوي $\pi r^2 h$ فإن لدينا العبارة التالية بخصوص السرعة الزاوية المطلوبة:

$$\omega(Q, l)=\frac{1}{2|Q|}\iint_{\Sigma}(\tau, R)\,dS.$$

إذا اردنا ان يكون لدينا مميز للدوران المتعلق ليس بدائرة العجلة بل بالنقطة A نفسها، يجب ان نجعل في العبارة المحصل عليها نصف قطر العجلة وسمكها يؤولان الى الصفر، ثم ايجاد نهاية الكمية $\omega(Q, l)$.

ليكن m(M) الشعاع الواحدي الناظمي عند النقطة M على الدائرة. بما ان الاشعة m, τ, l موجهة وكذا الامر فيما يخص اشعة الاساس e_1، e_2, e_3 (نذكر ان جملة الاحداثيات تقع على اليمين!) فإن $\tau=[l, m]$ ؛ ثم نجد بفضل الخاصية الدورية للجداء المختلط: $(\tau, R)=([l, m], R)=(l, [m, R])$ ، ومنه يأتي:

$$\omega(Q, l)=\frac{1}{2|Q|}\iint_{\Sigma}(l, [m, R])\,dS=\frac{1}{2}\left(l, \frac{1}{|Q|}\iint_{\Sigma}[m, R]\,dS\right).$$

نلاحظ ان الشعاعين m و l محمولان على نفس المستقيم في قاعدة الاسطوانة Q، أي ان $(l, [m, R])=0$ ؛ وبالتالي فإن عبارة

الطرف الثاني لا تتغير عند تعويض التكامل على السطح الجانبي للاسطوانة بالتكامل على سطحها الكلي S :

$$\omega(Q, l) = \frac{1}{2}\left(l, \frac{1}{|Q|}\iint_S [m, R]\, dS\right).$$

4 .42 . آن الاوان للجوء الى لغة رياضية متينة.

أ . ليكن $R = \{P_1(x), P_2(x), P_3(x)\}$ حقلا شعاعيا مستمرا معطى في ساحة $G \subset R_3$. نعتبر ساحة $Q \subset G$ محدودة بسطح مرن بتقطع S ناظمة الخارجي m . تعودنا على العبارة

$$\iint_S [m, R]\, dS \qquad (1)$$

منذ 4 .81؛ نذكّر انها تسمى دوران الحقل R على الحافة S للساحة Q . إن الدوران تابع جمعي بقوة للساحة G وذلك لنفس الاسباب الواردة في 4 .21 ـ بخصوص التدفق.

ب . نسمي الدوران المتوسط للحقل R في الساحة Q نسبة دوران الحقل R (على السطح المغلق S) على الحجم $|Q|$ للساحة Q (التي حافتها S). نفرض أن الساحة Q تتقلص نحو نقطة $y \in G$. إذا كان الدوران المتوسط للحقل R في الساحة Q قابلا لنهاية لا تتعلق بشكل الساحة Q المتقلصة نحو نقطة y، فإن هذه النهاية تسمى دوار الحقل R عند النقطة y ونرمز لها بـ Rot R(y).

وهكذا

$$\operatorname{rot} R(y) = \lim_{Q \to y} \frac{1}{|Q|} \iint_S [m, R]\, dS.$$

نرى إذن ان Rot R(y) يمثل كثافة التابع الجمعي بقوة (1) وهو دوران الحقل R على حافة الساحة Q. نلاحظ، خلافا للتدفق والتفرق، ان الدوران والدوار ليسا تابعين سلميين، بل شعاعيين (لساحة ولنقطة على التوالي).

ج. باستبدال الجداء السلمي (τ, R) في الاستدلال 4 .21 بالجداء الشعاعي $[\tau, R]$ وبمراعاة 4 .81 نجد انه: إذا كان Rot R(y)

موجودا ويمثل تابعا مستمرا للنقطة $y \in G$.فإن لدينا:

$$\iiint_Q \operatorname{rot} R(y)\, dy = \oiint_S [m, R]\, dS,$$

وذلك مهما كانت الساحة $Q \subset G$ ذات الحافة S المرنة بتقطع.

د . عند تطبيق نظرية اوستروغرادسكي، يمكننا البرهان على وجود واستمرار الدوار بافتراض ان المركبات P_1, P_2, P_3 للحقل R تقبل مشتقات مستمرة. بالفعل فإن لدينا، باعتبار هذا الفرض، استنادا الى الدستور 81. 4 (2):

$$\oiint_S [m, R]\, dS = \oiint_S \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\omega_1 & \cos\omega_2 & \cos\omega_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iiint_Q \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} dx\, dy\, dz,$$

إذن:

$$\operatorname{rot} R(y) = \lim_{Q \to y} \frac{1}{|Q|} \oiint_S [m, R]\, dS = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1(y) & P_2(y) & P_3(y) \end{vmatrix} =$$

$$= e_1 \left(\frac{\partial P_3(y)}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2(y)}{\partial x_3} \right) + e_2 \left(\frac{\partial P_1(y)}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3(y)}{\partial x_1} \right) +$$

$$+ e_3 \left(\frac{\partial P_2(y)}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1(y)}{\partial x_2} \right).$$

52. 4 .نعود ثانية الى التجربة المثالية المبينة في 32. 4 . إذا كان Rot R(A) موجودا فإن لدينا فيما يتعلق بالسرعة الزاوية للعجلة Q ذات المحور l، العبارة التالية التي تمثل نهاية:

$$\omega(Q, l) = \frac{1}{2} (l, \operatorname{rot} R(A)).$$

لتكن θ زاوية الشعاعين l و $R(A)$. عندئذ يتبين من تعريف الجداء السلمي:

$$\omega(Q, l) = \frac{1}{2} |\operatorname{rot} R(A)| \cos\theta,$$

ومنه تاتي النتائج التالية:

أ. تأخذ الكمية $\omega(Q, l)$ عند نقطة A قيمتها الاعظمية $\frac{1}{2}|\operatorname{rot} R(A)|$ عندما يكون الشعاع l موجها وفق الشعاع $\operatorname{rot} R(A)$ (تكون السرعة الزاوية للعجلة Q في هذا الموقع اعظمية، وهذا ما يتفق مع التعريف الاول «الميكانيك» للدوار بوصفه شعاعا موجها في اتجاه محور الدوران بسرعة زاوية اعظمية، طوله ضعف السرعة الزاوية الاعظمية).

ب. عندما يكون l عموديا على الشعاع Rot R(A) فإن القيمة $\omega(Q, l)$ منعدمة (العجلة لا تدور من اجل تلك الاتجاهات للمحور).

ج. تأخذ الكمية $\omega(Q, l)$ فيما يخص الاتجاهات الاخرى للمحور قيمها بين $|\operatorname{rot} R(A)| \frac{1}{2}-$ و $|\operatorname{rot} R(A)| \frac{1}{2}$.

4 .62. دستور ستوكس (Stokes). كما سبق ان رأينا في 4 .42 فإن دوار حقل شعاعي R مركباته P_1, P_2, P_3 قابلة للاشتقاق يكتب بدلالة الاحداثيات على الشكل:

$$(1)\quad \operatorname{rot} R = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} = e_1\left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right) + $$

$$+ e_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1}\right) + e_3\left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right).$$

إذا كان دوار الحقل R في ساحة تعريفه G، منعدما فإن لدينا في هذه الساحة:

$$(2)\qquad \frac{\partial P_2}{\partial x_3} = \frac{\partial P_3}{\partial x_2},\quad \frac{\partial P_3}{\partial x_1} = \frac{\partial P_1}{\partial x_3},\quad \frac{\partial P_2}{\partial x_1} = \frac{\partial P_1}{\partial x_2}.$$

إذا كانت الساحة G بسيطة بكفاية، مترابطة ببساطة مثلا، فإن جولان الحقل R كما رأينا في 4 .22 هو:

$$\oint_L (\tau, R)\, ds$$

منعدم على كل محيط L. وبالعكس إذا كان دوران الحقل R على كل

محيط مغلق في الساحة G منعدما فإن العلاقات (2) محققة بفضل 22.4 ، وبالتالي نجد ان دوران الحقل R منعدم.

إذا كان $\operatorname{rot} R \neq 0$ فإن جولان الحقل R ، عموما، غير منعدم عموما. بما ان المقدارين يميزان خاصيات دوار حقل R ، فمن الطبيعي ان نتوقع صلة بينهما تكتب بشكل أو بآخر. يَصف هذه الصلة دستور ستوكس.

كنا بينا الدستور الموالي في 42.4 ـ د من اجل حقل شعاعي $R = \{P_1, P_2, P_3\}$ دواره مستمر في حقل Q محدود بسطح مرن بتقطع S :

$$\iiint_Q \operatorname{rot} R\, dQ = \oiint_S [m, R]\, dS, \tag{3}$$

حيث n شعاع واحدي للناظم الخارجي.

نختار كساحة Q الاسطوانة القائمة ذات الارتفاع H (الرسم 2.4 ـ 5) تمثل قاعدتها ساحة U تقع في مستو β محدودة بمحيط L. نرمز بـ l للشعاع الواحدي الناظمي على المستوى α وبـ τ للشعاع الواحدي العمودي على l والماس للسطح الجانبي للإسطوانة Q المتجه في الاتجاه الموجب (بالنسبة لـ L) ليكن S السطح الكلي و Σ السطح الجانبي للإسطوانة Q.
لدينا :

$$\left(l, \oiint_S [m, R]\, dS\right) = \oiint_S (l, [m, R])\, dS = \tag{4}$$

$$= \iint_\Sigma (l, [m, R])\, dS = \iint_\Sigma ([l, m]_z R)\, dS = \iint_\Sigma (\tau_z R)\, dS,$$

لأن الشعاعين l و m محمولان على نفس المستقيم على قاعدتي الاسطوانة Q. نرمز بـ U_h لمقطع الاسطوانة Q. بالمستوى الموازي قاعدتـي Q والمار على بعد مسافة h من القاعدة السفلى، وبـ L_h لمحيط المقطع U_h عندئذ يكون لدينا من اجل كل تابعين f(x) و g(x) :

$$\iiint_Q F(x)\,dx = \int_0^H \left\{ \iint_{U_h} F(x)\,dS \right\} dh,$$

$$\iint_\Sigma g(x)\,dS = \int_0^H \left\{ \oint_{L_h} g(x)\,ds \right\} dh;$$

وبصفة خاصة:

$$\iiint_Q (l,\ \mathrm{rot}\, R)\,dx = \int_0^H \left\{ \iint_{U_h} (l,\ \mathrm{rot}\, R)\,dS \right\} dh,$$

$$\iint_\Sigma (\tau,\ R)\,dS = \int_0^H \left\{ \oint_{L_h} (\tau,\ R)\,dS \right\} dh.$$

نقسم هاتين العلاقتين على H ثم ننتقل الى النهاية بجعل H يؤول الى 0.
نذكّر أن نظرية المتوسط تعطى من اجل كل تابع مستمر $\Phi(h)$:

$$\lim_{H\to 0} \frac{1}{H} \int_0^H \Phi(h)\,dh = \Phi(0),$$

وبالتالي:

$$\iint_U (l,\ \mathrm{rot}\, R)\,dS = \oint_L (\tau,\ R)\,ds, \qquad (5)$$

وهذا بمراعاة كون العلاقة (4) والمساواة (3) مضروبة سلميا في l.

تسمى العلاقة المحصل عليها دستور ستوكس من اجل ساحة مستوية U. إنها تربط دوار الحقل R وجولان هذا الحقل على المحيط L الذي يحد الساحة U. إذا كان الحقل R قابلا للاشتقاق يمكن استنتاج الدستور (5) بشكل اكثر بساطة. نختار الاحداثيات بحيث يكون المحيط L واقعا في المستوى (x,y). عندئذ:

$$l = (0,\ 0,\ 1), \quad (l,\ \mathrm{rot}\, R) = \frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y},$$

وبذلك يكتب الدستور (5) على الشكل:

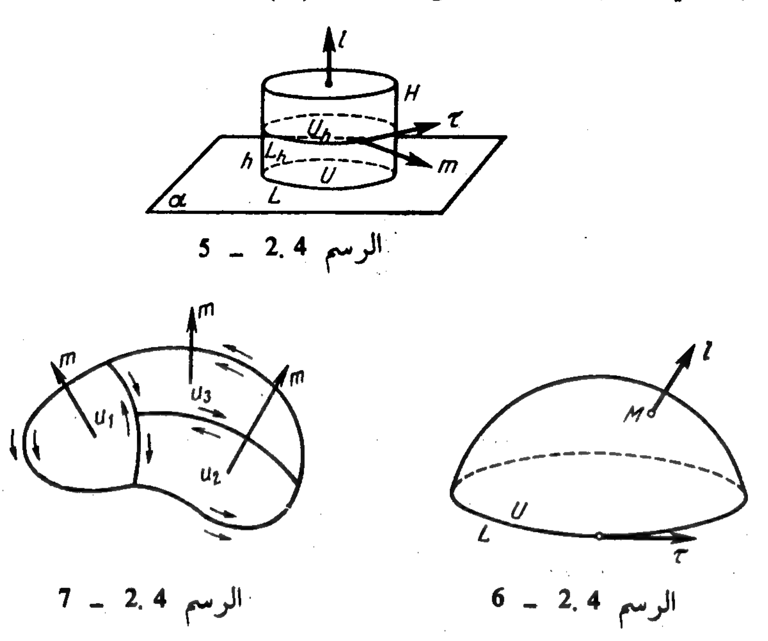
$$\iint_U \left(\frac{\partial P_2}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_L (\tau,\ R)\,ds,$$

أي انه مطابق للدستور المعروف 61.4 (4).

يمكن كتابة دستور ستوكس في شكل أعم قائم ليس من اجل جزء من المستوى بل من اجل سطح قابل للتوجيه (أي له شعاع ناظمي واحدي مستمر) U محدود بمحيط L (مرن بتقطع) (الرسم 2.4 ـ 6):

$$\iint_U (l, \operatorname{rot} R)\, dS = \oint_L (\tau, R)\, ds. \qquad (6)$$

يرمز هنا$l=l(M)$ الى الشعاع الواحدي العمودي على السطح U عند النقطةM ؛ إنه ليس ثابتا هذه المرة بل يتغير مع النقطة M. يمثل الشعاع τ دائما الشعاع الواحدي الماس للمحيط L والموجه اتجاها موجبا (بالنسبة لـL). إذا كان الشعاع موجها في الاتجاه المعاكس فإن الطرف الثاني من (6) تتغير اشارته ولا تتحقق المساواة (6).



الرسم 2.4 ـ 5

الرسم 2.4 ـ 7

الرسم 2.4 ـ 6

عندما يكون السطح U منحنيا قليلا فإن قاعدة تلاؤم اتجاه الناظم واتجاه رسم المحيط المحدود بالسطح ليست سليمة ويجب استبدالها بالقاعدة السليمة التالية: يمكن دائما تقسيم سطح قابل للتوجيه U الى قطع صغيرة

بكفاية $U_1, \ldots, U_p$ محدودة بالمحيطات المغلقة $L_1, \ldots, L_p$ على التوالي نربط بين اتجاهات رسمها كما يلي: يُعيَّن اتجاه رسم كل قطعة من المحيط L_i مطابقة لقطعة من L بنفس الشعاع الماس، اما اتجاه الرسم لكل قطعة مشتركة بين محيطين L_i و L_j فيتمثل في اتجاهين متعاكسين (الرسم 2.4 ـ 7)، حينئذ يكون الشعاع الناظمي m موجها على السطح U_i بشكل يجعل اتجاه رسم المحيط L_i ، عند النظر من خلال موصل هذا الشعاع، هو الاتجاه المعاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة. يُبرهن على قيام مثل هذا التوجيه من اجل السطوح القابلة للتوجيه في الطوبولوجيا؛ سوف لن نتعرض في درسنا هذا سوى لسطوح اولية يكون فيها قيام التوجيه المشار اليه بديهيا.

نستطيع القيام بالبرهان على الدستور (6) كما يلي. إن صحة الدستور من اجل الساحات المستوية تؤدي الى صحتها من اجل كل سطح قابل للتوجيه متعدد الوجوه (مؤلف من عدد منته من الاجزاء المستوية، المثلثات مثلا) ثم عندما يكون لدينا سطح منحن (مستواه الماس مستمر أو مستمر بتقطع)، نمثله كنهاية سطوح متعدده الوجوه محاطة U_n مؤلفة من مثلثات (46.3 ـ د). بكتابة الدستور (6) من اجل كل ساحة U_n والانتقال بعد ذلك الى النهاية بجعل n يؤول الى ∞ ، نصل الى الدستور (6) في الحالة العامة (46.3 ـ د).

إذا قسمنا المساواة (5) على مساحة الساحة U ومررنا الى النهاية بتقليص المحيط L في المستوى α نحو نقطة A، نجد:

$$(l, \operatorname{rot} R(A)) = \lim_{U \to A} \frac{1}{|U|} \oint_L (\tau, R)\, ds. \qquad (7)$$

إنه دستور هام آخر يعبّر عن مسقط دوار حقل R على منحنى (اتجاه) يعطي L بدلالة جولان الحقل R.

§ 3.4 . المؤثر الهاميلتوني.

13.4 . يوحي تعريف تفرق حقل شعاعي $R(x)$ (51.4):

$$\operatorname{div} R(y)=\lim_{V\to y}\frac{1}{|V|}\oint_S (m,\ R)\,dS \quad (\in R_1)$$

وتعريف دوار حقل شعاعي $R(x)$ (32.4):

$$\operatorname{rot} R(y)=\lim_{V\to y}\frac{1}{|V|}\oint_S [m,\ R]\,dS \quad (\in R_3)$$

بفكرة وجود تعريف عام يضم التعريفين السابقين كحالة خاصة منه. إن مثل هذا التعريف العام موجود وله الشكل التالي.

ليكن $T(x)$ حقلا مؤثريا معطي في ساحة G من الفضاء $X = R_n$، بعبارة أدق هب ان $T(x)$ تابع قيمته من أجل كل $x \in G$ تمثل مؤثرا خطيا من الفضاء X في فضاء باناخي مثبت Y من اللائق، مؤقتا ان نضع رمز المتغير الشعاعي المستقل على يسار رمز المؤثر، وهكذا، من اجل كل $q \in X$، فإن التابع $qT(x)$. الآخذ قيمة في Y معــــرف من اجل كل $x \in G$ نفرض بعد ذلك ان التابع $T(x)$ مستمر (بالنسبة للنظيم المؤثري) في الساحة G، يكون حينئذ التابع $qT(x)$ هو الآخر مستمرا في G من اجل كل $q \in X$، بل انه مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات $q \in X$ و $x \in G$. نعتبر في الساحة G سطحا مغلقا ومرنا بتقطع Γ يحد ساحة جزئية V حجمها $|V|$، نرمز بِـ $m(\xi)$ للشعاع الواحدي للناظم الخارجي عند النقطة $\xi \in \Gamma$ وبِـ $d\Gamma(\xi)$ لعنصر السطح

تسمى الكمية

$$W_\Gamma(T)=\oint_\Gamma m(\xi)\,T(\xi)\,d\Gamma(\xi) \quad (\in Y)$$

تدفق الحقل المؤثري $T(x)$ عبر السطح Γ. كما جاء اعلاه فإن تدفق الحقل $T(x)$ عبر السطح Γ تابع جمعي (بقوة) يأخذ قيمه في Y، للساحةV.

تسمى كثافة تدفق الحقل $T(x)$ عند نقطة $A \subset G$:

$$\nabla T(A) = \lim_{V \to A} \frac{1}{|V|} \oint_{\Gamma} m(\xi) T(\xi) d\Gamma(\xi) \quad (\in Y), \tag{2}$$

عند وجودها، **هاميلتوني الحقل $T(x)$ عند النقطة A**. يسمه المؤثر ∇ (نابلا(*)) الذي ينقل من الحقل $T(x)$ الى كثافة تدفقه المؤثر **الهاميلتوني**. يتم المرور الى النهاية في الطرف الثاني من (2)، بشكل طبيعي، على مسافة الفضاء Y. إذا كان $\nabla T(A)$ موجودا اينما كان في الساحة G ويمثل تابعا مستمراً (بتقطع) من النقطة A (يأخذ قيمه في Y) فإننا نلاحظ، كما ورد في 21.4، ان تابعا لساحة $W_\Gamma(T)$ يمكن استرجاعه انطلاقا من كثافته $\nabla T(x)$ بواسطة الدستور:

$$W_\Gamma(T) \equiv \oint_{\Gamma} m(\xi) T(\xi) d\Gamma(\xi) = \int_V \nabla T(x) dv(x). \tag{3}$$

نثبت الآن انه إذا كان الحقل المؤثري $T(x)$ ليس مستمرا فحسب في الساحة G بل له أيضا في G مشتق مستمر، فإن الكمية $\nabla T(A)$ موجودة عند كل نقطة $A \in G$، وسنجد لها شكلا صريحا. ليكن $e_1, \ldots, e_n$ أساسا متعامدا ومتجانسا للفضاء X و $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ الزوايا التي يُشكلها الشعاع $m(\xi)$ مع اشعة الاساس على التوالي. لدينا:

$$m(\xi) = \cos\alpha_1 \cdot e_1 + \ldots + \cos\alpha_n \cdot e_n,$$

إذن

$$m(\xi) T(\xi) = \cos\alpha_1 \cdot e_1 T(\xi) + \ldots + \cos\alpha_n \cdot e_n T(\xi).$$

يتبين من دستور اوسترغرادسكي 71.4(1) ان:

$$\oint_{\Gamma} m(\xi) T(\xi) d\Gamma(\xi) \equiv \oint_{\Gamma} \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k \cdot e_k T(\xi) d\Gamma(\xi) =$$

$$= \int_V \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} (e_k T(x)) dv.$$

ينتج من ذلك وجود النهاية (2) والدستور:

$$(4)\ \nabla T(A)\equiv\lim_{V\to A}\frac{1}{|V|}\int_V\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(e_kT(x))\,dv=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(e_kT(x))\Big|_{x=A}.$$

وهكذا نستنتج العبارة $\nabla T(A)$ بالتعويض الشكلي في عبارة qT(x) احداثيات الشعاع q برموز الاشتقاق بالنسبة للمتغيرات الموافقة لها.

طبقا لرمز الشعاع q: $q=\sum e_kq_k$ يمكننا ان نرمز للمؤثر ∇ بـ $\nabla=\sum e_k\frac{\partial}{\partial x_k}$، وهو الرمز الذي ادخله هاميلتون (Hamilton).

كان بالامكان اعتبار الدستور (6) كتعريف للمؤثر الهاميلتوني. لكن ينبغي علينا عندئذ البرهان على أن العبارة الواردة فيه لا تتعلق باختيار الاساس المتعامد والمتجانس $e_1,\ldots,e_n$. إن تعريفنا المباشر (2) ليس مرتبطا باساس.

23. 4 . أمثلة.

أ . ليكن P(x) حقلا شعاعيا في ساحة $G\subset X=R_n, T(x): X\to R_1$ المؤثر الذي يعمل حسب الدستور qT(x)=(q,P(x)). بوضع $P(x)=\{P_1(x),\ldots,P_n(x)\}$ نجد من اجل الكمية $(\nabla, P(x))\equiv\nabla T(x)$:

$$(\nabla, P(x))=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(e_k, P)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_k}{\partial x_k}=\operatorname{div}P;$$

وهكذا فإن عملية التفرق «div» حالة خاصة من العملية ∇ .

ب . ليكن P(x) حقلا شعاعيا في ساحة $G\subset X=R_3$ و $T(x): X\to R_3$ المؤثر الذي يعمل حسب الدستور:

$$qT(x)=[q, P(x)]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ P_1(x) & P_2(x) & P_3(x)\end{vmatrix}.$$

بتعويض الرموز q_1, q_2, q_3 بـ $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$ نصل الى العبارة:

$$\nabla T(x) = [\nabla, P(x)] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1(x) & P_2(x) & P_3(x) \end{vmatrix} = \text{rot}\, P\,;$$

وهكذا يتبين ان عملية الدوار « rot » حالة خاصة من المؤثر ∇ .

جـ . ليكن P(x) حقلا سلميا في ساحةR_n $G \subset X=$ و $T(x): X \to X$ المؤثر الذي يعمل حسب الدستور qT(x)=q.P(x). نجد هنا بخصوص الكمية $\nabla T(x) = \nabla P(x)$ الموافقة لذلك:

$$\nabla P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_k P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P(x)}{\partial x_k} e_k = \text{grad}\, P.$$

وبالتالي نرى أن التدرج أيضا حالة خاصة من العملية الهاميلتونية.

33. 4 . تطبيق المؤثر ∇ على الجداءات. يتم تطبيق المؤثر الخطي ∇ على جداء $T_1 T_2$ مؤثرين، في التحليل الشعاعي القديم، وفق القاعدة التالية. نتفق، في حالة وجود رمز ملموس للعبارة $\nabla T(x)$ حيث تقع بعض المتغيرات (حقول شعاعية أو سلمية) على يسار الرمز ∇ والبعض الآخر على اليمين، على ان المؤثر ∇ يعمل على المتغيرات التي تقع على يمينه فقط. على سبيل المثال يعمل المؤثر ∇ ، في الرمز $(P, \nabla) Q$ ، على Q ولا يعمل على P . نستعمل احيانا اتفاقا ثانيا: نزود المتغيرات التي لا يعمل عليها الرمز ∇ بالدليل الاضافي c (وكذلك بشكل مستقل عن ترتيب المتغيرات) الذي يبين ان هذه المتغيرات تلعب دور الثوابت. على سبيل المثال يعني الرمز $(\nabla, P_c) Q$ ان ∇ يعمل على Q ولا يعمل على P . ينبغي في مثل هذه الحالات وان كان بالامكان تحويل العبارة $\nabla T(x)$ بشكل يجعل المتغيرات المزودة بالدليل، تقع على يسار الرمز ∇ ؟ حينئذ نستطيع، اتفاقاً، اهمال الدليل، لان موقع المتغير يدلنا على وجوب اعتباره ثابتا. فيما يتعلق بالمثال الوارد آنفاً يكفي تبديل ∇ و P_c؛ عندئذ، باعتبار P كشعاع و ∇ كعدد سلمي، نحصل على:

$$(\nabla, P_c) Q = (P_c, \nabla) Q = (P_c, \nabla Q) = (P, \text{grad}\, Q).$$

بعد هذا، نسوق القاعدة المتعلقة بذلك: نتيجة عمل المؤثر الهاميلتوني على جداء عاملين يساوي مجموع حدين يعمل المؤثر الهاميلتوني في كل منهما على عامل واحد فقط، يعمل على واحد في الحد الاول وعلى الآخر في الحد الثاني.

حتى نوضح هذا النص الغامض الى حد ما وحتى نستنتج منه قضية متينة نعتبر الفضاءات ذات الابعاد المنتهية $X = R_n, Y, Z, U,$ حيث $V \subset L(X, Z)$ و $W \subset L(X, U)$ مع التطبيقات الثنائية الخطية:

$$\begin{aligned}\times &: V \text{ et } W \text{ dans } L(X, Y),\\ \vee &: V \text{ et } U \text{ dans } Y,\\ \wedge &: W \text{ et } Z \text{ dans } Y,\end{aligned}$$

ونفرض من اجل كل شعاع $q \in X$ ومن أجل كل مؤثرين $R \in V$ و$S \in W$ ان العلاقة الاساسية التالية محققة:

$$q(R \times S) = S \wedge qR = R \vee qS. \tag{1}$$

نفرض بعد ذلك ان المؤثرين $R = R(x)$ و $S = S(x)$ يتعلقان بوسيط يتجول في x ساحة $G \subset X$ وان مشتقاتها الاولى في G مستمرة.

يتبين من 23.4 ان المؤثرين $R(x)$ و $S(x)$ يؤثر عليهما المؤثر ∇، ولدينا:

$$\nabla R(x) \subset Z, \quad \nabla S(x) \in U.$$

نظـريـة. نحتفـظ بـالشروط الواردة اعلاه. يقبـل عنـدئـذ المؤثـر $T(x) = R(x) \times S(x)$ ان يُطبق عليه المؤثر ∇، ولدينا

$$\nabla(R(x) \times S(x)) = S(x) \wedge \nabla R(x) + R(x) \vee \nabla S(x). \tag{2}$$

البرهان. إن المؤثر $T(x)$ يقبل الاشتقاق بالنسبة لِx_j $(j = 1, \ldots, n)$ وذلك بفضل 43.1 - ب، ولدينا العلاقة:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(R(x) \times S(x)) = \frac{\partial R(x)}{\partial x_j} \times S(x) + R(x) \times \frac{\partial S(x)}{\partial x_j}.$$

لدينا، باستخدام (1):

$$q \frac{\partial}{\partial x_j}(R(x) \times S(x)) = S(x) \wedge q \frac{\partial R(x)}{\partial x_j} + R(x) \vee q \frac{\partial S(x)}{\partial x_j}.$$

ينتج عن ذلك:

$$\nabla (R(x) \times S(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} e_k (R(x) \times S(x)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} S(x) \wedge e_k \frac{\partial R(x)}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} R(x) \vee e_k \frac{\partial S(x)}{\partial x_k} =$$

$$= S(x) \wedge \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(e_k R(x)) + R(x) \vee \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(e_k S(x)) =$$

$$= S \wedge \nabla R + R \vee \nabla S,$$

وهو المطلوب.

43.4 . امثلة .

أ . ليكن $S(x)$ و $R(x)$ حقلين سلميين في ساحة $G \subset X = R_n$؛ لنبحث عن $(R(x) \cdot S(x))$

لدينا من اجل كل شعاع $q \in X$ العلاقة البديهية التالية:

$$q(R(x) S(x)) = S(x) \cdot qR(x) = R(x) \cdot qS(x).$$

يمكن اعتبار هذه العلاقة كحالة خاصة من العلاقة 33.4 (1)، وتعين الفضـــاءات والعمليـــات الواردة فيهـــا كما يلي $X = Y = Z = U =$، $= R_n, V = W \subset L(R_n)$ (هي مجموعة مؤثرات الضرب في عدد، $\times$ هي ضرب الاعداد اما $\vee$ و $\wedge$ فتمثل كل منهما ضرب عدد في شعاع). نجد بتطبيق الدستور 33.4 (2):

$$(1)\ \text{grad}\,(R(x)\,S(x)) = \nabla (RS) = S(x) \cdot \nabla R(x) + R(x) \cdot \nabla S(x) =$$
$$= S(x) \cdot \text{grad}\, R(x) + R(x) \cdot \text{grad}\, S(x).$$

باختصار، يمكننا اتباع الطريقة التالية باستخدام النص الاول للقاعدة:

$$\nabla (RS) = \nabla (R_c S) + \nabla (RS_c) = R_c \cdot \nabla S + S_c \nabla R =$$
$$= R\, \text{grad}\, S + S\, \text{grad}\, R.$$

ب. ليكن $R(x)$ حقلا شعاعيا و $S(x)$ حقلا شعاعيا في R_n؛ نبحث

عن $\operatorname{div}(R(x)\,S(x))$. نتبع طريقة مماثلة لما سبق فنجد:

$$\operatorname{div}(RS) = (\nabla, (RS)) = R(\nabla, S) + S, (\nabla, R) = R \operatorname{div} S + (S, \operatorname{grad} R). \tag{2}$$

ج. نحصل من اجل $n = 3$ ايضا على:

$$\operatorname{rot}(RS) = [\nabla, RS] = R[\nabla, S] - [S, \nabla R] = \\ = R \operatorname{rot} S - [S, \operatorname{grad} R].$$

د. ليكن $R(x)$ و $S(x)$ حقلين شعاعيين في G. من أجل كل شعاع $q \in X$ لدينا:

$$(q, [R, S]) = (S, [q, R]) = -(R, [q, S]), \tag{3}$$

$$[q, [R, S]] = R(q, S) - (R, q)S = -S(q, R) + (S, q)R, \tag{4}$$

ومنه يأتي:

$$\operatorname{div}[R, S] = (\nabla, [R, S]) = (S, [\nabla, R]) - (R, [\nabla, S]) = \\ = (S, \operatorname{rot} R) - (R, \operatorname{rot} S), \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}[R, S] = [\nabla, [R, S]] = R(\nabla, S) - (R, \nabla)S - S(\nabla, R) + \\ + (S, \nabla)R = R \operatorname{div} S - S \operatorname{div} R - (R, \nabla)S + (S, \nabla)R \tag{6}$$

تكتب العبارة $(R, \nabla)S$ بدلالة الاحداثيات على النحو التالي:

$$(R, \nabla)S = \sum_{k=1}^{3} R_k \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{3} S_j e_j = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} R_k \frac{\partial S_j}{\partial x_k} \right) e_k; \tag{7}$$

نرمز للعبارة $(S, \nabla)R$ بشكل مماثل لـ(7).

4 .53. المؤثرات من الرتبة الثانية. نفرض ان لدينا في ساحة G من الفضاء $X = R_n$ تابعا $T(x)$ تمثل قيمته عند كل نقطة $x \in G$ مؤثرا ثنائي الخطية يعمل من $X \times X$ في فضاء باناخي Y بحيث ان الشكل الثنائي الخطية $pqT(x)$ $(p \in X, q \in X)$ يصبح معرفا. لنفرض ان $T(x)$ تابعا مستمرا لـ x، وبالتالي ان $pqT(x)$ مستمر بالنسبة لمجموعة المتغيرات p, q, x .

طبقا لِـ 13.4 يمكننا تعريف العبارة $\nabla qT(x)$ الخطية بالنسبة لِـ q.
بافتراض ان التابع $T(x)$ يقبل الاشتقاق واختيار اساس متعامد ومتجانس $e_1, \ldots, e_n$ في X اختياراً كيفيا يمكننا كتابة:

$$\nabla qT(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(e_k qT(x)).$$

إذا كان $T(x)$ قابلا للإشتقاق مرتين في الساحة G، يمكننا تعويض المتغير q بِـ ∇ وهو ما يعرف العبارة $\nabla\nabla T(x)$ ؛ ان هذه العبارة ذاتها تكتب على نفس الاساس $e_1, \ldots, e_n$ ، على النحو:

$$\nabla\nabla T(x) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}(e_k e_j T(x)). \quad (1)$$

نستطيع اتباع كيفية اخرى: نعوض أولا q بِـ ∇ ثم p بِـ ∇، فنجد:

$$p\nabla T(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(pe_j T(x)), \quad (2)$$

$$\nabla\nabla T(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(e_k e_j T(x)),$$

وهذه العلاقة مطابقة لِـ(1). بفضل استقلال المشتقات المختلطة عن ترتيب الاشتقاق. يمكننا اعتبار الشكل القرين $qpT(x)$ ؛ عند استبدال p بِـ ∇ و q بِـ ∇ (باي ترتيب كان) في الشكل السابق نجد من جديد العبارة (1) أو (2)، وهما يمثلان نفس العلاقة. الواقع ان النتيجة لا تتعلق بالشكل التربيعي $qqT(x)$ ، وهو ما ينتج من التوطئة التالية:

توطئة. إذا كان $T_1(x)$ و $T_2(x)$ مؤثرين ثنائيي الخطية يحققان الشروط المصاغة اعلاه والعلاقة $qqT_1(x) \equiv qqT_2(x)$، فإن

$$\nabla\nabla T_1(x) = \nabla\nabla T_2(x).$$

البرهان. نعتبر المؤثر $T(x) = T_1(x) - T_2(x)$. لدينا فيما يتعلق بالشكلين الثنائي الخطية $(p+q)(p+q)\ T = ppT + pqT + qpT + qqT.$

لكن الفرض ينص على ان

$$(p+q)(p+q)T = 0, \; ppT = 0, \; qqT = 0$$

إذن

$$pqT + qpT = 0.$$

عندما نعوض هنا p و q بـ ∇ ومراعاة ما قلناه اعلاه نجد ان:

$$\nabla\nabla T + \nabla\nabla T = 2\nabla\nabla T = 0,$$

ومنه يأتي $\nabla\nabla T_1(x) = \nabla\nabla T_2(x)$ ، وهو المطلوب.

36. 4 . إذا كان $P(x)$ تابعا سلميا، يمكننا كتابة العبارات التالية:

(أ) $$(\nabla, \nabla)P \equiv \nabla^2 P = (\nabla, \nabla P) = \text{div grad } P,$$

(ب) $$[\nabla, \nabla]P \equiv [\nabla, \nabla P] = \text{rot grad } P \text{ (dans } R_3).$$

إذا كان $P(x)$ حقلا شعاعيا، يمكننا كتابة العبارات

(جـ) $$(\nabla, \nabla)P = \nabla^2 P;$$

(د) $$\nabla(\nabla, P) = \text{grad div } P;$$

(ر) $$(\nabla, [\nabla, P]) = \text{div rot } P;$$

(س) $$[\nabla, [\nabla, P]] = \text{rot rot } P;$$

(في R_3).

إذا عوضنا ∇ بشعاع عادي q فإن نتيجتي العمليتين (ب) و (د) منعدمتان حسب قواعد الجبر الشعاعي.

نختم كما يلي: من اجل كل حقل سلمي $P(x)$ في R_3، فإن:

$$\text{rot grad } P(x) \equiv 0, \quad (1)$$

ومن اجل كل حقل شعاعي $P(x)$ في R_3، فإن:

$$\text{div rot } P(x) \equiv 0. \quad (2)$$

نستطيع التأكد من العلاقتين (1) و (2) المحصل عليهما من الاستدلالات العامة، بواسطة حساب مباشر:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} P(x)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} & \frac{\partial P}{\partial x_2} & \frac{\partial P}{\partial x_3} \end{vmatrix}=0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} P(x)=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix}=0,$$

حيث

$$P(x)=e_1P_1(x)+e_2P_2(x)+e_3P_3(x)$$

نعتبر العملية (a) . بما ان لدينا ما يلي بخصوص شعاع q :

$$q=\sum_{j=1}^{n} q_j e_j,\ (q,q)=\sum_{1}^{n} q_j^2,\quad (q,q)P(x)=\sum_{1}^{n} q_j^2 P(x),$$

فإن تعويض مركبات الشعاع بالمشتقات بالنسبة للإحداثيات الموافقة لها يعطي :

$$(\nabla,\nabla)P(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_j^2}. \tag{3}$$

يسمى هذا المؤثر التفاضلي من الرتبة الثانية **مؤثر لابلاس** (Laplace) ؛ وهو واحد من اهم المؤثرات التفاضلية في الفيزياء الرياضية.

يمكن ان نعبّر عن العملية (س) بدلالة (ج) و (د). يعطي الدستور 53. 4(4) :

$$[\nabla,[\nabla,P]]=\nabla(\nabla,P)-(\nabla,\nabla)P=\operatorname{grad}\operatorname{div}P-\nabla^2 P. \tag{4}$$

§ 4.4 بعض الانماط من الحقول الشعاعية.

14.4 . الحقول المتناظرة الكروية.

أ. نعتبر حقلا سلميا في R_n معطى، باعتبار y متغيراً و x مثبتا، بالدستور:

$$u(y) = f(r), \quad r = |y - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}, \tag{1}$$

حيث ان التابع $f(r)$ معرف من اجل $r > 0$ ومستمر ويقبل مشتقا مستمرا. بما ان التابع $u(y)$ لا يتعلق الّا بالمسافة التي تفصل y عن النقطة x ، فإننا نقول عن الحقل u انه حقل متناظر كروي مركز تناظره في x .

ب. نحسب تدرج الحقل المتناظر الكروي $u(y)$. لدينا، حسب 73.1 ـ ب:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y_i} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial y_i} = f'(r) \frac{y_i - x_i}{r},$$

ومنه يأتي:

$$\operatorname{grad}_y f(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} e_i = \frac{f'(r)}{r} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) e_i.$$

نزود رمز تدرج بالدليل y لإبراز الاحداثيات التي نشتق بالنسبة اليها. اذا كان الشعاع الواحدي المتجه من x نحو y بحيث ان

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) e_i = re(x, y)$ فإننا نستطيع كتابة التدرج المطلوب على الشكل:

$$\operatorname{grad}_y f(r) = f'(r) e(x, y). \tag{2}$$

ج. بصفة عامة فإن اي حقل شعاعي $P(x)$ من الشكل $\varphi(r) \cdot e(x, y)$ ، حيث $r = |y - x|$ و $\varphi(r)$ تابع عددي، يسمى

حقلا شعاعيا متناظرا كرويا مركز تناظره x. مهما كان التابع المعطى $\varphi(r)$ (المستمر) يمكن استعادة تابع $f(r)$ بحل المعادلة التفاضلية $f'(r) = \varphi(r)$. وبالتالي فإن كل حقل شعاعي متناظر وكروي ومستمر يمثل كمونا، اي انه (من اجل $x \neq y$) تدرج حقل متناظر وكروي وسلمي له نفس مركز التناظر.

د. نبحث عن تفرق حقل متناظر كروي شعاعي $P(y) = \psi(r)\, e(x, y)$ يستحسن وضع $P(y) = \varphi(r) \times re(x, y)$ où حيث $\varphi(r) = \psi(r)/r$.

لدينا حسب 43.4 - ب:

$$\operatorname{div}_y P(y) = (\nabla, \varphi(r)\, re(x, y)) = \varphi(r)\, (\nabla_y, re(x, y)) +$$
$$+ (re(x, y), \nabla_y \varphi(r)) = \varphi(r) \operatorname{div}_y re(x, y) + (re(x, y), \operatorname{grad} \varphi(r)).$$

إلّا ان

$$\operatorname{div}_y re(x, y) = \operatorname{div}_y \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (y_i - x_i)}{\partial y_i} = n,$$

$$\operatorname{grad}_y \varphi(r) = \varphi'(r)\, e(x, y),$$

أذن

$$\operatorname{div} P(y) = n\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

هل يمكن ان يكون $\operatorname{div}_y P(y) = 0$ ؟ بحل المعادلة التفاضلية:

$$n\varphi(r) + r\varphi'(r) = 0,$$

نحصل على

$$\varphi(r) = \frac{C}{r^n},$$

حيث C ثابت كيفي.

وهكذا يتبين ان من بين الحقول الشعاعية المتناظرة الكروية فإن الحقول ذات الشكل

$$P(y) = \frac{C}{r^n} re(x, y) = \frac{Ce(x, y)}{r^{n-1}} \qquad (3)$$

هي الوحيدة التي لها تفرق منعدم (من اجل $y \neq 0$).

إن تدفق الحقل (3) عبر سطح الكرة S_ρ التي نصف قطرها ρ

ومركزها في x يساوي

$$\oint_{S_\rho} (m, P)\, dS = C \oint_{S_\rho} \frac{dS}{r^{n-1}} = \frac{C}{\rho^{n-1}} |S_\rho| = C |S_1|,$$

حيث يمثل $|S_1|$ مساحة سطح الكرة الواحدية نرى إذن انه يوجد داخل سطح الكرة S_ρ مصدر حقل $P(y)$ ؛ من الواضح ان هذا المصدر لا يمكن ان يقع في غير النقطة x.

ر. نلاحظ من اجل $n = 3$ و $C = -m, m > 0$ ان الحقل (3)

$$P(y) = \frac{Ce(x, y)}{r^2} = \frac{me(y, x)}{r^2}$$

مطابق لحقل جاذبية كتلة نقطية m تقع في النقطة x (قانون نيوتن!) ونرى ان قانون نيوتن يمكن البرهان عليه انطلاقا من افتراضات طبيعية تنص على ان الحقل المطلوب ينبغي ان يكون متناظراً وكرويا ومصدره الوحيد كتلة نقطية. (تكون قوة الجاذبية في كون ذي بعدين متناسبة عكسيا مع المسافة، اما في كون ذي n بعدا فهي متناسبة عكسيا مع القوة ذات الرتبة $(n-1)$ للمسافة).

س. عندما يكون $n = 3$ فإن دوار حقل متناظر وكروي وشعاعي $P(y)$ منعدم من اجل $y \neq x$ بسبب وجود كمون. ان دوران حقل $P(y)$ على كل سطح كرة S_ρ مركزها في النقطة x منعدم (لأن $[m, P] = 0$)، إذن فإن الدوار منعدم ايضا عند النقطة $y = x$.

24. 4. الحقل النيوتني.

أ. طبقا لقانون نيوتن في الفضاء الثلاثي البعد فإن القوة الجاذبة التي تؤثر بها كتلة m واقعة في نقطة x على كتلة واحدية تقع عند نقطة y تكتب على النحو:

$$F(y) = \frac{m}{|x-y|^2} e(y, x), \qquad (1)$$

حيث تمثل $|x-y|$ المسافة التي تفصل x عن y. ويمثل $e(y, x)$ الشعاع الواحدي الذاهب من y نحو x ؛ نفرض بطبيعة الحال ان النقطة

إن الحقل $F(y)$ متناظر وكروي (مركز تناظره x) وهو كمون، كما جاء في 14.4 - ج من البديهي في حالتنا هذه بأن كمون الحقل $F(y)$ يساوي:

$$f(y)=\frac{m}{|x-y|}. \qquad (2)$$

ب. إن كان حقل الجاذبية مولدا ليس عن كتلة واحدة بل عن عدة كتل نقطية $m_1, \ldots, m_k$ تقع في النقاط $x_1, \ldots, x_k$, على التوالي، فإن كلا منها تؤثر على الكتلة الواحدية الواقعة في نقطة y وفق دستور مماثل لـ(1). يتبين من قانون جمع القوى ان التأثير الكلي لكافة الكتل ممثل بالمجموع الشعاعي

$$F(y)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{|x_i-y|^2}e(y, x_i), \qquad (3)$$

وذلك شريطة ان تكون النقطة y مخالفة لكل نقطة x_i $(i=1, \ldots, k)$.

وان الحقل (3) كموني دائما، وتابعه الكموني هو

$$f(y)=\sum_{i=1}^{k}\frac{m_i}{|x_i-y|}. \qquad (4)$$

ج. لنتصور توزيعا مستمرا للكتلة: في ساحة محدودة $G\subset R_3$، كل ساحة

(جوردانية) $V\subset G$ مزودة بكتلة $m(V)$ تمثل تابعا جمعيا بقوة للساحة V. نذكّر بمفهوم كثافة كتلة. نعرف، من اجل ساحة معطاة ΔV تحوي Δm وحدة كتلة، الكثافة المتوسطة للكتلة على انها تساوي النسبة $\frac{\Delta m}{|\Delta V|}=\mu(\Delta V)$. ثم نثبّت نقطة x ونعتبر متتالية $\Delta V_1, \ldots \ldots, \Delta V_s, \ldots$ من الساحات المتقلصة نحو النقطة x عندما يؤول s الى ∞. من اجل كل ساحة من هذه الساحات، توجد كثافة متوسطة للكتلة $\mu(\Delta V_s)$. نفرض، مهما كانت مثل هذه المتتالية من الساحات، ان الاعداء $\mu(\Delta V_s)$ تؤول،

لما $s \to \infty$، الى نهاية مثبتة $\mu = \mu(x) = \lim \mu(\Delta V_s)$ لا تتعلق باختيار المتتالية ΔV_s . تسمى عندئذ الكمية $\mu(x)$ **كثافة كتلة عند النقطة** x .

نفرض في ساحة V ، أن الكتلة تقبل كثافة مستمرة (بتقطع) $\mu(x)$. ننشىء عبارة حقل الجاذبية الناشيء عن هذه الكتلة.

نقسّم الساحة V الى عدد من الساحات الصغيرة $\Delta V_i \ (i=1, \ldots\ldots, k)$ ونرمز بِـ Δm_i الى الكتلة التي تحملها الساحة ΔV_i . من الطبيعي ان نقبل بأن تكون القوة $\Delta F_i(y)$ التي تؤثر بها الكتلة الاولية Δm_i على الكتلة الواحدية عند النقطة y ، هي نفس القوة التي نحصل عليها لو كانت هذه الكتلة الاولية متمركزة في نقطة وحيدة من الساحة ΔV_i ، مثلا في النقطة x_i . يسمح ذلك بتطبيق الدستور (3) على القوة $\Delta F_i(y)$. عند الجمع على الدليل i والانتقال الى النهاية نصل الى العبارة المطلوبة الخاصة بالقوة الكلية للجاذبية:

$$F(y) = \int_V \frac{\mu(x)\, e(y, x)}{|x-y|^2}\, dx. \qquad (5)$$

إن التكامل (5) معرف ايضا من اجل النقاط y الواقعة خارج الساحة V او داخلها. يصبح التكامل في الحالة الاخيرة موسعا لكنه متقارب مطلقا لأن المقام يمثل مربع الكمية $|x-y|$ (37.3 ـ ب).

يسمى الحقل $F(y)$ الوراد في (5) الحقل النيوتني في R_3 .

د . نسمي في الفضاء ذي البعد n **حقلا نيوتنيا** كل حقل شعاعي معرف من اجل $y \in R_n$ بالدستور:

$$F(y) = \int_V \frac{\mu(x)\, e(y, x)}{|x-y|^{n-1}}\, dx \qquad (6)$$

حيث $V \subset R_n$ ساحة محدودة و $\mu(x)$ تابع مستمر بتقطع.

لنثبت ان الحقل (6) يقبل كمونا مساويا لِـ:

$$f(y) = \frac{1}{n-2} \int_V \frac{\mu(x)\, dx}{|x-y|^{n-2}} \quad (n>2). \qquad (7)$$

يكفي ان نثبت بأن $f(y) = F(y)$

بتطبيق النظرية 77.3 - ص على التكامل (7) وبمراعاة المساواة 14.4 (2) نجد:

$$\operatorname{grad}_y \frac{1}{n-2} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{n-2} \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \cdot e_i = \frac{e(y, x)}{|x-y|^{n-1}}$$

و

$$\operatorname{grad} f(y) = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \int_V \frac{\mu(x)\, dx}{|x-y|^{n-2}}\, e_i =$$

$$= \int_V \mu(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{n-2} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dx \cdot e_i = \int_V \mu(x) \frac{e(y, x)}{|x-y|^{n-1}}\, dx = F(y).$$

يتعين تعويض التابع $1/((n-2)\,|x-y|^{n-2})$ بـ $\ln(1/|x-y|)$ في حالة $n = 2$.

ر. نبحث عن تفرق حقل نيوتني. يمكن ان نتوقع بأنه سيرتبط والتابع $\mu(x)$ لأننا رأينا بأن مصادر حقل جاذبية هي الكتل التي تنشئه.

إذا كانت النقطة y على مسافة موجبة من الساحة V، فإن اشتقاق التكامل (6) يمكن ان يتم تحت رمز الجمع (53.3 - د) لأن له، كما هو الحال بالنسبة للتابع $1/|x-y|^{n-1}$، مشتقات من كل الرتب. ينتج عن ذلك بمراعاة 14.4 - د، ان:

$$\operatorname{div} F(y) = \int_V \mu(x) \operatorname{div} \frac{e(y, x)}{|x-y|^{n-1}}\, dx = 0.$$

إذا انتمت النقطة y الى الساحة V فإن التكامل (6) يمثل تكاملا موسعا من النمط الثاني ذي «شذوذ متغيّر» (77.3 - أ). لإشتقاق مثل هذه التكاملات نستخدم النظرية 77.3 - ص.

رغم ذلك فإن هذه النظرية لا تقبل التطبيق على الحالة المعتبرة هنا، لأنها تتطلب ان يكون اس المقام اصغر من $n-1$. للحيلولة دون ذلك نلجأ الى طريقة اخرى. نبحث في البداية على تدفق الحقل $F(y)$ (6) عبر السطح المغلق S الذي يحد ساحة Q ثم نقسمه على الحجم $|Q|$ لهذا السطح وبعدها نقلص الساحة Q نحو نقطة مثبتة. يمكننا لدى حساب

التدفق تطبيق النظرية 3 .77 ـ د:

$$\oint_S (m(y), F(y))\, dS(y) = \oint_S \left(m(y), \int_V \frac{\mu(x)\, e(y, x)\, dx}{|x-y|^{n-1}}\right) dS(y) =$$

$$= \int_V \mu(x) \left\{ \oint \frac{m(y), e(y, x))}{|x-y|^{n-1}} dS(y) \right\} dx.$$

يمثل التكامل الداخلي التدفق عبر السطح S لحقل الكتلة الواحدية الواقعة في النقطة x . اذا كانت النقطة x خارج الساحة Q فإن هذا التدفق منعدم لأن حقل كتلة نقطية لا يملك مصادر باستثناء الكتلة ذاتها. إذا كانت النقطة x داخل الساحة Q فإن التدفق لا يتعلق بشكل الساحة Q وهو يساوي التدفق عبر سطح الكرة S_1 ذات نصف القطر 1 والمركز x ، من السهل حساب ذلك:

$$\oint_{S_1} \frac{m(y), e(y, x)}{|x-y|^{n-1}} dS(y) = -\oint_{S_1} \frac{dS}{1} = -|S_1|$$

حيث يمثل $|S_1|$ مساحة سطح الكرة الواحدية في R_n .

وهكذا لدينا في الحالة المعتبرة:

$$\oint_S (m(y), F(y))\, dS(y) = -|S_1| \int_Q \mu(x)\, dx.$$

مع افتراض ان التابع $\mu(x)$ مستمر (بتقطع)؛ لدينا في نقاط استمراره:

$$\operatorname{div} F(y_0) = \lim_{Q\to y_0} \frac{1}{|Q|} \oint_S (m(y), F(y))\, dS(y) =$$

$$= -|S_1| \lim_{Q\to y_0} \frac{1}{|Q|} \int_Q \mu(x)\, dx = -|S_1|\, \mu(y). \qquad (8)$$

نعتبّر المساواة (8) على العلاقة المطلوبة بين تفرق حقل الجاذبية وكثافة الكتلة المولدة لهذه الحقل.

س. على الرغم من ان الحقل $F(y)$ (6) يملك تفرقا، فهذا لا يعني لحد الآن وجود المشتقات $\frac{\partial F(y)}{\partial y_i}$. لنثبت انه إذا كان التابع $\mu(x)$ ، بجوار نقطة $x = y_0$ ، مستمرا ويقبل مشتقات جزئية مستمرة فإن التوابع $\frac{\partial F(y)}{\partial y_i}$ موجودة ومستمرة عند $y = y_0$.

توطئة. من اجل كل تابع قابل للإشتقاق $f(r)$ حيث $r = |x - y|$ ، $x \in R_n,\ y \in R_n$ ، فان المساواة التالية محققة:

$$\nabla_y f(|x-y|) = -\nabla_x f(|x-y|).$$

البرهان. لدينا حسب 4 .14(2):

$$\nabla_y f(r) = \operatorname{grad}_y f(r) = f'(r)\, e(x, y);$$

نعوض y بـ x فنجد:

$$\nabla_x f(r) = \operatorname{grad}_x f(r) = f'(r)\, e(y, x) = -\nabla_y f(r),$$

وهو المطلوب.

ص. حتى نثبت قابلية الحقل $F(y)$ (6) للإشتقاق، نفرض في البداية ان التابع $\mu(x)$ مستمر ومشتقاته موجودة ومستمرة ليس بجوار النقطة $x = y$ فحسب بل اينما كان في الساحة V، وانه منعدم على حافة V. نضع الحقل $F(y)$ في شكل تدرج (د)، ثم ننقل بواسطة النظرية 3 .77 ـ ص، التدرج تحت رمز المكاملة ونطبق التوطئة السابقة؛ بعدها نحول التابع الواقع تحت رمز المكاملة استناداً الى 4 .43(1):

$$F(y) = \nabla_y \frac{1}{n-2} \int_V \frac{\mu(x)\, dx}{|x-y|^{n-2}} =$$

$$= \frac{1}{n-2} \int_V \mu(x)\, \nabla_y \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dx = \frac{-1}{n-2} \int_V \mu(x)\, \nabla_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n-2} \int_V \nabla_x \left(\frac{\mu(x)}{|x-y|^{n-2}} \right) dx + \frac{1}{n-2} \int_V \frac{\nabla_x \mu(x)}{|x-y|^{n-2}}\, dx.$$

نطبق نظرية اوستروغرادسكي 4 .31(7) على أول التكاملين الواردين في الطرف الاخير:

$$\int_V \nabla_x \frac{\mu(x)}{|x-y|^{n-2}}\, dx = \oint_S m(x) \frac{\mu(x)}{|x-y|^{n-2}}\, dS_x = 0,$$

لأن التابع $\mu(x)$ منعدم على الحافة S للساحة V. وهكذا نجد:

$$F(y) = \frac{1}{n-2} \int_V \frac{\nabla_x \mu(x)}{|x-y|^{n-2}}\, dx,$$

ومن ثم ينتج وجود المشتقات الاولى المستمرة للحقل $F(y)$ بفضل النظرية 3 .77 ـ ص والشروط المفروضة على التابع $\mu(x)$.

ط. نفرض ان وجود المشتقات المستمرة للتابع $\mu(x)$ ليس مضموناً الآ

في جوار النقطة y_0 ، مثلا من اجل $|x - y_0| < 2\delta$. نعتبر تابعا قابلا للإشتقاق $f(r)$ معرفا من اجل $r \geqslant 0$ ومساويا لـ 1 في المجال $0 \leqslant r \leqslant \delta$ و لـ 0 من اجل $r \geqslant 2\delta$ عندئذ يتمتع التابع $\mu_1(x) = \mu(x) f(|x - y_0|)$ بالشروط الواردة في ص، ويكتب الحقل النيوتني الموافق له على النحو:

$$F^*(y) = \int_V \frac{\mu_1(x)\, e(y, x)\, dx}{|x - y|^{n-1}}$$

ولهذا الحقل مشتقات مستمرة اينما كان في R_n لدينا:

$$F(y) - F^*(y) = \int_V \frac{[\mu(x) - \mu_1(x)]\, e(y, x)\, dx}{|x - y|^{n-1}}.$$

بما ان التابع $\mu(x) - \mu_1(x)$ منعدم من اجل $|x - y_0| < \delta$ فإن الحقل $F(y) - F^*(y)$ يملك، حسب ر، بجوار النقطة y_0 مشتقات من كل الرتب. ينتج عن ذلك ان الحقل $F(y) = F^*(y) + (F(y) - F^*(y))$ يقبل الاشتقاق باستمرار عند النقطة y_0 ، وهو ما ذهبنا اليه.

ع. بعد ذلك، إذا كان $F = \{F_1, \ldots, F_n\} = \operatorname{grad} f$ ، فإن

$$\operatorname{div} F(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i(y)}{\partial y_i} = (\nabla, F) = (\nabla, \nabla f) = \nabla^2 f(y),$$

وهو ما اثبتناه في 51.4 .

نصل بفضل (8) الى دستور بواسون (Poisson) التقليدي الخاص بالحقل النيوتني $F(y)$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i(y)}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i^2} = -|S_1|\, \mu(y). \tag{9}$$

كنا اثبتنا انه قائم عند كل نقطة y يكون بجوارها التابع $\mu(x)$ ذا مشتقات مستمرة.

ف . يبين هذا الدستور بصفة خاصة كيف نجد حلا خاصا لمعادلة بواسون:

$$\Delta f(y) \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_i^2} = g(y), \qquad (10)$$

حيث $g(y)$ تابع معطى في ساحة محدودة $V \subset R_n$ و $f(y)$ تابع غير معلوم معرف في نفس الساحة. يتبين مما اثبتناه ان الكمون النيوتني المزود بكثافة الكتلة $g(y)/|S_1|$ - يحقق المعادلة (10) عند كل نقطة y يكون بجوارها التابع $g(y)$ قابلا لمشتقات مستمرة.

ق . فيما يتعلق بدوار الحقل النيوتني $F(y)$ (6) فهو منعدم لأن الحقل $F(y)$ يقبل كمونا، ونستطيع بذلك تطبيق 63.4 (1).

34.4 . حقل بيوت وسافار (Biot ,Savart).

أ . ليكن $\nu(x)$ حقلا شعاعيا في ساحة $V \subset R_3$ محدودة بسطح مرن بتقطع S ؛ **حقل بيوت وسافار** الموافق له هو الحقل الشعاعي:

$$G(y) = \int_V \frac{[\nu(x),\ e(x, y)]}{|x-y|^2}\, dx. \qquad (1)$$

إذا كانت الساحة V مليئة بشحنات كهربائية متحركة، كثافة تيارها الكهربائي $\nu(x) = u(x)\frac{dq(x)}{dx}$ (تمثل $dq(x)$ كمية الشحنة في حجم dx ، وتمثل $u(x)$ سرعتها)، فإن الحقل المغنطيسي المولد عن هذا التيار معطى حسب قانون بيوت وسافار، بالدستور (1)، وهو ما يفسر اختيار مصطلحنا.

ب . إن الحقل $G(y)$ (1) دواري، عموماً، وعليه فليس له تابع كموني إلّا اننا نستطيع انشاء **كمون شعاعي** لهذا الحقل، اي حقل شعاعي $J(y)$ بحيث $G(y) = \text{rot}\, J(y)$. نضع:

$$J(y) = \int_V \frac{\nu(x)\, dx}{|x-y|}. \qquad (2)$$

لدينا حسب النظرية 77.3 - ص والقاعدة 43.4 - ج:

$$\text{rot}\, J(y) = [\nabla, J(y)] = \left[\nabla_y, \int_V \frac{\nu(x)\, dx}{|x-y|}\right] =$$

$$= \int_V \left[\nabla_y, \frac{\nu(x)}{|x-y|}\right] dx = -\int_V \left[\nu(x), \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\right] dx =$$

$$= -\int\limits_V \left[\nu(x), \operatorname{grad}_y \frac{1}{|x-y|} \right] dx = \int\limits_V \frac{[\nu(x), e(x,y)]}{|x-y|^2}\, dx = G(y),$$

وهو المطلوب.

ج. نبحث عن الكمية $\operatorname{div} J(y)$. نتبع استدلالا مماثلا للسابق ونطبق التوطئة 4 .24 ـ س ونظرية اوستروغرادسكي فنحصل عند افتراض قابلية $\nu(x)$ للإشتقاق، على:

$$\operatorname{div} J(y) = (\nabla, J) = \int\limits_V \left(\nabla_y, \frac{\nu(x)}{|x-y|}\right) dx = \int\limits_V \left(\left(\nu(x), \nabla_y \frac{1}{|x-y|}\right) dx = \right.$$
$$= -\int\limits_V \left(\nu(x), \nabla_x \frac{1}{|x-y|}\right) dx = -\int\limits_V \left(\nabla_x, \frac{\nu(x)}{|x-y|}\right) dx +$$
$$+ \int\limits_V \frac{(\nabla_x, \nu(x))}{|x-y|} dx = -\oint\limits_S \left(m(x), \frac{\nu(x)}{|x-y|}\right) dS + \int\limits_V \frac{\operatorname{div} \nu(x)}{|x-y|} dx. \quad (3)$$

د. نفرض الآن على الحقل $\nu(x)$ الشرطين التاليين:

(*) $\operatorname{div} \nu(x) \equiv 0$ («الشحنات الكهربائية لا تظهر ولا تزول»)

(**) لدينا على الحافة S للساحة V العلاقة $(m(x), \nu(x)) = 0$ («تتكون الحافة من خطوط تيارية؛ لا تغادرها الشحنات ولا تأتيها»)

تبين المساواة (3) انه ينتج من الشرطين (*) و(**):

$$\operatorname{div} J(y) = 0. \quad (4)$$

نفرض الشرطين (*) و(**) ونحسب دوار حقل بيرت وسافار $G(y)$ (1).

بمراعاة (4) و4 .63(4) نجد:

$$\operatorname{rot} G(y) = [\nabla, [\nabla, J]] = \nabla(\nabla, J) - (\nabla, \nabla) J =$$
$$= \nabla \operatorname{div} J(y) - \nabla^2 J(y) = -\nabla^2 J(y).$$

الّا أن مركبات الحقل $J(y)$ لها شكل كمونات نيوتونية؛ إن كان $J = \{J_1, J_2, J_3\}$ و $\nu = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ ، فإن:

$$J_k(y) = \int\limits_V \frac{\nu_k(x)\, dx}{|x-y|} \quad (k = 1, 2, 3).$$

كنا رأينا في 4 .24 ـ س، عندما يكون التابع $\mu(x)$ قابلا للإشتقاق،

أن :

(في R_3)
$$\nabla_y^2 \int\limits_V \frac{\mu(x)\, dx}{|x-y|} = -|S_1|\mu(y) = -4\pi u(y)$$

ينتج عن ذلك : $\nabla^2 J(y) = -4\pi v(y)$

$$\text{rot } G(y) = 4\pi v(y). \qquad (5)$$

يمكن القول ان دوار الحقل المغنطيسي لتيار يدلنا على اتجاه التيار المولد عن هذا الحقل المغنطيسي.

أما فيما يتعلق بتفرق حقل بيوت وسافار (1) فهو منعدم لأن $G(y) = \text{rot } J(y)$ ولأن تفرق دوار منعدم دوما (4 .63(2)).

نشير في الختام الى الخاصيات المتضادة لحقول نيوتن من جهة وبيوت وسافار من جهة ثانية: بخصوص الحقل الأول فإن الدوار منعدم ويتم تعيين التفرق انطلاقا من التوابع المعطاة (كثافة الكتلة)، اما فيما يخص الحقل الثاني فالتفرق منعدم ويتم تعيين الدوار انطلاقا من التوابع المعطاة (كثافة التيار)؛يقبل الاول كمونا سلميا ولا يقبل كمونا شعاعيا (التفرق غير منعدم)؛ اما الثاني فيقبل كمونا شعاعيا ولا يقبل كمونا سلمياً.

§ 4 .5 . الحقول والتوابع التوافقية

4 .15 . الحقول التوافقية.

أ . نقول عن حقل شعاعي $H(x)$ معطى في ساحة $V \subset R_3$ قابل لمشتقات مستمرة $\frac{\partial H}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ إنه توافقي إذا تحقق في كل الساحة V :

$$\text{div } H(x) = 0, \quad \text{rot } H(x) = 0. \qquad (1)$$

على سبيل المثال فإن الحقل النيوتني (4 .24) في ساحة مجردة من الكتلة وكذا حقل بيوت وسافار (4 .34) في ساحة مجردة من التيار، حقلان توافقيان.

ب . يمكن صياغة تعريف للحقل التوافقي من اجل الحقول الشعاعية في

الفضاء ذي البعد n . نقول عن حقل شعاعي قابل للإشتقاق $H(x) = \{H_1(x), \ldots, H_n(x)\}$ إنه توافقي في ساحة $V \subset R_n$ إن تحقق لدينا في كل الساحة V :

$$\operatorname{div} H(x) \equiv \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial H_n}{\partial x_n} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

نتحث فيما يلي عن حقل توافقي في ساحة مترابطة ببساطة $V \subset R_n$.
ينتج بادىء ذي بدء من (4 .12 ـ د) العلاقة (3) ان الحقل H يقبل كمونا اي انه يوجد تابع (يقبل الاشتقاق مرتين) $h(x)$ بحيث:

$$H(x) = \operatorname{grad} h(x) = \left\{ \frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n} \right\}. \tag{4}$$

يمكن اعتبار العلاقة (2) كشرط على التابع $h(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_k^2} = 0. \tag{5}$$

يسمى كل تابع (قابل للإشتقاق مرتين) $h(x)$ يحقق المعادلة (5) في ساحة V **تابعا توافقيا في الساحة** V . وهكذا فإن **التابع الكموني لحقل شعاعي توافقي تابع توافقي**. بما ان كل شعاع $H(x) = \operatorname{grad} h(x)$ يحقق بفضل 4 .12 ـ د، العلاقات (3) فإن القضية العكسية قائمة ايضا: **يمثل تدرج كل تابع توافقى حقلا شعاعيا توافقياً**.

4 .25 . دستورا غرين (Green) لتكن $V \subset R_n$ ساحة حافتها S مرنة بتقطع. نعتبر في V حقلا سلميا قابلا للإشتقاق $\psi(x)$ وحقلا شعاعيا $R(x) = \operatorname{grad} \varphi(x)$ قابلا للإشتقاق ولكمون. لدينا حسب 4 .43 ـ ب:

$$\operatorname{div} \psi R = (\nabla, \psi R) = \psi(\nabla, R) + (R, \nabla\psi) = \psi\Delta\varphi + (\nabla\varphi, \nabla\psi).$$

نكامل الطرفين على الساحة V ثم نطبق على الطرف الاول دستور اوستروغرادسكي 4 .31 (5) فنحصل على:

$$\int_V \operatorname{div} \psi R\, dx = \oint_S (m, \psi R)\, dS = \oint_S \psi (m, R)\, dS =$$

$$= \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial m}\, dS = \int_V \psi \Delta \varphi\, dx + \int_V (\nabla \varphi, \nabla \psi)\, dx,$$

بحيث ان

$$\int_V (\nabla \varphi, \nabla \psi)\, dx + \int_V \psi \Delta \varphi\, dx = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial m}\, dS \tag{1}$$

(دستور غرين الاول) . عندما نستبدل هنا φ و ψ فيما بينهما ثم نقوم بعملية طرح نصل الى دستور غرين الثاني:

$$\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi)\, dx = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial m} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial m} \right) dS. \tag{2}$$

35. 4 . نظرية .

أ . إذا انعدم تابع توافقي $h(x)$ على حافة ساحة V فإن $h(x) \equiv 0$ اينما كان في الساحة V .

ب . اذا تطابق تابعان توافقيان على حافة ساحة V فهما كذلك ايضا داخل V.

جـ . إذا انعدمت المركبة (m, H) لحقل توافقي $H(x)$ على حافة الساحة V فإن الحقل $H(x)$ منعدم داخل V .

إذا تساوت المركبتان الناظميتان (m, H_1) و (m, H_2) لحقلين توافقيين $H_1(x)$ و $H_2(x)$ ، اينما كان على حافة الساحة V فإن هذين الحقلين متطابقان داخل الساحة V .

البرهان. ليكن $h(x)$ تابعا توافقيا في الساحة V . نضع $\varphi = \psi = h$ في دستور غرين 25. 4 (1) ، عندئذ $\Delta h \equiv 0$، وعندما يتحقق فرض a يزول التكامل على الحافة. وهكذا يعطي الدستور 25. 4 (1) :

$$\int_V |\nabla h|^2\, dx = 0.$$

ينتج عن ذلك ان $\nabla h = \operatorname{grad} h(x) = 0$ في الساحة V ، وعليه يكون

التابع $h(x)$ ثابتا؛ ولما كان منعدّما، فرضا، على الحافة فهو منعدم اينما كان في الساحة V . ينتهي بذلك البرهان على القضية a .

ليكن $H(x)$ حقلا توافقيا في الساحة V . نضع $\psi = \varphi = h(x)$ في دستور غرين 4 .25(1)، حيث يمثل $h(x)$ كمون الحقل $H(x)$. عندئذ $\Delta\varphi = 0$ مرة اخرى، وعندما يتحقق فرض ج تكون الكمية $\frac{\partial\varphi}{\partial m} = (m, H)$ منعدمة على حافة V ، بحيث ان كل التكامل على S منعدم. ينتج من الدستور 4 .25(1):

$$\int_V |\nabla h|^2 \, dx = \int_V |H(x)|^2 \, dx = 0,$$

ومنه يأتي $H(x) \equiv 0$ في الساحة V . ينتهي بذلك البرهان على ج.

تأتي القضيتان ب و د من أ و ج لأن فرق تابعين (حقلين) توافقيين تابع (حقل) توافقي.

4 .45 . نتائج اخرى من دستوريْ غرين.

أ . إذا كان $h(x)$ تابعا توافقيا في ساحة V، فإن

$$\oint_S \frac{\partial h(x)}{\partial m} \, dS = 0. \tag{1}$$

بالفعل فإن الدستور (1) مباشر عند وضع $\varphi = h, \psi = 1$ في دستور غرين 4 .25(2).

ب. نظرية. إن قيمة تابع توافقي $h(x)$ في المركز y لكرة $W \subset V$ تساوي المتوسط الحسابي لقيمة على الحافة Σ للكرة W.

$$h(y) = \frac{1}{|\Sigma|} \oint_\Sigma h(x) \, dS. \tag{2}$$

البرهان. لتكن $W \subset V$ و $Q \subset W$ كرتين متمركزيتن في النقطة y نصف قطر الاولى، والثانية ρ حيث $r > \rho$، وحافتاهما Σ_r و Σ_ρ على التوالي. ليكن $V_{r\rho} = W - Q$ إن الحافة S للساحة $V_{r\rho}$ هي اتحاد Σ_r و Σ_ρ؛ ثم إن مؤثر الاشتقاق $\frac{\partial}{\partial m}$ وفق الناظم الخارجي على حافة الساحة W مطابق لِـ $\frac{\partial}{\partial r}$ على Σ_r ولِـ $-\frac{\partial}{\partial r}$ على Σ_ρ

نضع في دستور غرين 25.4 (2): $V = V_{r\rho}$، و $\varphi = h$ و $\psi = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$؛ نعلم (15.4 ـ أ) ان هذا التابع الاخير توافقي بالنسبة لـ x من اجل $x \neq y$. لهذا السبب، فإن تكامل الحجم في الدستور 25.4 (2) يزول ونحصل بذلك على:

$$\oint_{\Sigma_r} \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial h}{\partial r} - h \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS = \oint_{\Sigma_\rho} \left(\frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial h}{\partial r} - h \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} \right) dS,$$

أو

$$\frac{1}{r^{n-2}} \oint_{\Sigma_r} \frac{\partial h}{\partial r} dS + \frac{n-2}{r^{n-1}} \oint_{\Sigma_r} h\, dS = \frac{1}{\rho^{n-2}} \oint_{\Sigma_\rho} \frac{\partial h}{\partial r} dS + \frac{n-2}{\rho^{n-1}} \oint_{\Sigma_\rho} h\, dS.$$

يتبين من أ ان الحدود الاولى في الطرفين منعدمان. فيما يخص الحدود الثانية نجد بادخال العامل $1/|S_1|$ (حيث يمثل $|S_1|$ مساحة سطح الكرة الواحدية في R_n) ان:

$$\frac{1}{r^{n-1}|S_1|} \oint_{\Sigma_r} h\, dS = \frac{1}{\rho^{n-1}|S_1|} \oint_{\Sigma_\rho} h\, dS.$$

نشير الى ان $|\Sigma_r| = r^{n-1}|S_1|$ و $|\Sigma_\rho| = \rho^{n-1}|S_1|$ بجعل أ يؤول الى 0 وبمراعاة استمرار التابع $h(x)$ عند $x = 0$ نحصل على المساواة المطلوبة (2).

ج. كل تابع توافقي $h(x)$ معرف في كل الفضاء R_n ويؤول الى 0 بانتظام لما $|x| \to \infty$، تابع مطابق للصفر.

بالفعل، من اجل كل نقطة $y \in R_n$، فإن القيمة $h(y)$ تمثل، حسب ب، المتوسط الحسابي لقيم التابع $h(x)$ على سطح الكرة ذات نصف القطر r والمركز y. عندما يؤول r الى ∞، فإن قيم التابع $h(x)$ على سطح الكرة تؤول بانتظام الى 0، فرضاً. وعليه بالامر كذلك فيما يخص المتوسط الحسابي. بما ان هذا الاخير لا يتعلق بـ r (يساوي $h(y)$) فهو منعدم. ذلك ما ذهبنا اليه.

55.4. تمثيل تابع توافقي داخل كرة بدلالة قيمة على الحافة. لتكن $W \subset R_n$ كرة نصف قطرها r ومركزها z، تقع داخل ساحة عرفنا فيها

تابعا توافقيا $h(x)$. استنادا الى 35.4 ـ ب فإن قيم التابع التوافقي $h(x)$ داخل الكرة W معينة بشكل وحيد بقيمة على الحافة Σ لهذه الكرة؛ نريد ايجاد دستور صريح يعبّر على قيمة التابع $h(x)$ عند نقطة كيفية y داخل الكرة بدلالة قيمة على الحافة من اجل $z = y$، نعتبر كما فعلنا في 45.4 ـ ب، كرة $Q \subset W$ متمركزة في z ونطبق دستور غرين 25.4 (2) على الساحة $W - Q$ بوضع $\varphi = h, \psi = \frac{1}{|x-z|^{n-2}}$. كان تكامل الحجم في 45.4 ـ ب قد زال (لأن التابعين السابقين توافقيان في $W - Q$) واصبح تكاملا السطح بسيطين للغاية لأن التابع $\psi(x)$ ثابت على حافتي W و Q يستحيل هنا استخدام هذه الفكرة كما هي من اجل $z \neq y$، ذلك ان التابع $1/|x-z|^{n-2}$ غير ثابت على $\sum$، لكنه يتبين من الممكن طرح تابع توافقي $\psi_0(z)$ من $\psi(z)$ بحيث يكون الفرق

$\Psi(x) = \psi(x) - \psi_0(x)$ ثابتا على $\sum$ وبهذا نفلح في ايجاد التمثيل المطلوب.

يمكن، دون المساس بعمومية القضية، افتراض بان المركز z للكرة W مطابق لمصدر الاحداثيات في الفضاء R_n ؛ عندئذ تكتب معادلة سطح الكرة Σ_r على الشكل $|x| = r$. نرمز بـ$y^* = \frac{r^2}{|y|^2} y$. نؤكد، من اجل $x \in \Sigma_r$، على ان نسبة المسافتين $|x - y^*|$ و $|x - y|$ ثابت. بالفعل إذا كان $x \in \Sigma_r$ فإن $(x, x) = r^2$ و $(x, y^*) = (x, y)\frac{r^2}{|y|^2}$, بحيث ان:

$$\frac{|x-y|^2}{|x-y^*|^2} = \frac{r^2 - 2(x, y) + |y|^2}{r^2 - 2(x, y)\frac{r^2}{|y|^2} + \frac{r^4}{|y|^2}} = \frac{|y|^2}{r^2} = \text{const.} = \text{ثابتا} \qquad (1)$$

لهذا السبب فإن التابع

$$\Psi(x) = \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{r^{n-2}}{|y|^{n-2}} \frac{1}{|x-y^*|^{n-2}}$$

ثابت (يساوي 0) على السطح Σ_r .

نلاحظ بعد ذلك ان التابع:

$$\psi_0(x) = \frac{r^{n-2}}{|y|^{n-2}} \frac{1}{|x-y^*|^{n-2}}$$

توافقي اينما كان في W . نضع $V = W - Q$ في دستور غرين 25.4 (2) حيث $Q \subset V$ كرة مركزها y ونصف قطرها ρ ، $\varphi = h(x)$ ، $\psi = \Psi(x)$. عندئذ يزول تكامل الحجم، كما هو الحال في 45.4 ـ ب، ونحصل على:

$$-\oint_{\Sigma_r} h(x) \frac{\partial \Psi}{\partial r} dS = \oint_{\Sigma_\rho} \left(\Psi \frac{\partial h(x)}{\partial \rho} - h \frac{\partial \Psi(x)}{\partial \rho} \right) dS_\rho,$$

حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial \rho}$ للإشتقاق وفق نصف القطر الذاهب من النقطة y نحو النقطة x على السطح Σ_ρ للكرة المتمركزة في y وذات نصْف القطر ρ .

ثم:

$$\left| \oint_{\Sigma_\rho} \Psi \frac{\partial h(x)}{\partial \rho} dS_\rho \right| \leqslant C_1 \frac{1}{\rho^{n-2}} C_2 \rho^{n-1} \xrightarrow{\rho \to 0} 0$$

$$\left| \oint_{\Sigma_\rho} h \frac{\partial \psi_0(x)}{\partial_\rho} dS \right| \leqslant C \rho^{n-1} \xrightarrow{\rho \to 0} 0$$

$$-\oint_{\Sigma_\rho} h \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{\rho^{n-2}} dS = (n-2) \oint_{\Sigma_\rho} h \frac{1}{\rho^{n-1}} dS =$$

$$= \frac{(n-2)|S_1|}{|\Sigma_\rho|} \oint_{\Sigma_\rho} h \, dS \to (n-2)|S_1| h(y)$$

عند الانتقال الى النهاية بجعل $\rho \to 0$ ، نجد:

$$h(y) = \frac{-1}{(n-2)|S_1|} \oint_{\Sigma_r} h(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial r} dS.$$

يبقى حساب $\frac{\partial \Psi(x)}{\partial r}$ على سطح الكرة Σ_r . بما ان هذا السطح استواء للتابع $\Psi(x)$ والتابع Ψ متزايد عندما تؤول النقطة x الى مركز الكره ($\Psi(y) = \infty$) فإن لدينا $\frac{\partial \Psi(x)}{\partial r} = -|\operatorname{grad} \Psi|$. باستخدام (1) نجد من اجل $|x| = r$:

$$|\operatorname{grad} \Psi| = \left| \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y|^{n-2}} - \frac{r^{n-2}}{|y|^{n-2}} \operatorname{grad}_x \frac{1}{|x-y^*|^{n-2}} \right| =$$

$$= (n-2) \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{r^{n-2}}{|y|^{n-2}} \frac{x-y^*}{|x-y^*|^n} \right| =$$

$$= (n-2) \left| \frac{x-y}{|x-y|^n} - \frac{|y|^2}{r^2} \frac{x-y^*}{|x-y|^n} \right| =$$

$$= \frac{n-2}{|x-y|^n} \left| x-y - \frac{|y|^2}{r^2} \left(x - \frac{r^2}{|y|^2} y \right) \right| = \frac{(n-2)(r^2 - |y|^2)}{r|x-y|^n}. \qquad (2)$$

اخيراً، فإن الدستور المطلوب (من اجل $z = 0$) يؤخذ الشكل

$$h(y) = \frac{r^2 - |y|^2}{|S_1| r} \oint_{\Sigma} \frac{h(x)}{|x-y|^n} dS \tag{3}$$

يسمى هذا الدستور دستور بواسون.

65. 4 . نتائج من دستور بواسون.

أ. نفرض ان لدينا تابعا توافقيا $h(x)$ يحقق على الحافة Σ من الكرة W المتراجحــه

$$A \leqslant h(x) \leqslant B.$$

عندئذ فإن هذا التابع يحقق نفس المتراجحة داخل الكرة W. بالفعل فإن « نواة بواسون ».

$$P(x, y) = \frac{r^2 - |y|^2}{|S_1| r} \cdot \frac{1}{|x-y|^n} \tag{1}$$

موجبة في الكرة W؛ وبالتالي نجد، عند كتابة دستور بواسون من اجل التابعين $B - h(x)$ و $h(x) - A$ التوافقيين والموجبين على حافة الكرة:

$$B - h(y) = \oint_{\Sigma} P(x, y)(B - h(x))\, dS \geqslant 0$$

$$h(y) - A = \oint_{\Sigma} P(x, y)(h(x) - A)\, dS \geqslant 0$$

وهو المطلوب.

وهكذا فإن القيمة العظمى والقيمة الصغرى لاي تابع توافقي على الكرة W يبلغ على حافة هذه الكرة.

ب. إن شكل دستور بواسون 55. 4 (3) هو تكامل تابع ذو وسيط y. بما انه يمكن للتابع $P(x, y)$ (1) ان يكون قابلا للإشتقاق لانهائيا بالنسبة للنقطة y. نستطيع تطبيق النظرية 53. 3 ـ د؛ وبالتالي فإن التابع $h(y)$ الوارد في الطرف الاول من دستور بواسون يقبل الاشتقاق لانهائيا بالنسبة لِـ y. وهكذا، فإن كل تابع توافقي يقبل الاشتقاق لانهائيا عند كل نقطة من ساحة تعريفه.

$$\Delta \frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta h(x) = 0$$

فإن كل مشتق لتابع توافقي هو ايضا تابع توافقي.

بصفة خاصة، نرى ان مركبات حقل توافقي $H(x) = \{H_1(x), \ldots, H_n(x)\}$ بوصفها مشتقات تابع توافقي $h(x)$ اي مشتقات كمون الحقل $H(x)$ (15.4 ـ ب) هي نفسها توابع توافقية.

د. إذا كان حقل توافقي $H(x)$ معرف في كل الفضاء R_n وكان $\lim_{|x| \to \infty} H(x) = 0$ فإن $H(x) = 0$. بالفعل، فإن كل مركبة للحقل $H(x)$ تؤول الى 0 لما $|x| \to \infty$؛ يتضح من ج ان هذه المركبات توابع توافقية، يبقى فقط تطبيق 45.4 ـ ج.

ر. نفرض ان تابعا كيفيا (مستمرا) $\lambda(x)$ معطى على سطح الكرة Σ الذي يمثل حافة الكرة W؛ نعرّف تابعا $h(y)$ داخل الكرة W بالدستور:

$$h(y) = \oint_{\Sigma} P(x, y)\, \lambda(x)\, dS, \quad P(x, y) = \frac{r^2 - |y|^2}{|S_1|\, r} \cdot \frac{1}{|x - y|^n}$$

نؤكد على ان $h(y)$ تابع توافقي. لإثبات ذلك يكفي ان نرى بأن نواة بواسون $P(x, y)$ تمثل تابعا توافقيا (بالنسبة لـ y) داخل الكرة W، لأن الاشتقاقات للتابع $h(y)$ بالنسبة لـ y يمكن ان تتم تحت رمز المكاملة. نعلم ان التابع $\frac{1}{|x - y|^{n-2}}$ توافقي؛ وعليه فمشتقاته ايضا توافقية حسب ج؛ ومنه يأتي ان التابع الموالي توافقي:

$$\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{2}{n-2} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x - y|^{n-2}} = \frac{1}{|x - y|^{n-2}} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i (y_i - x_i)}{|x - y|^n} = \frac{1}{|x - y|^n} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{|x - y|^n} \sum_{i=1}^{n} (y_i^2 - x_i^2) = \frac{|y|^2 - r^2}{|x - y|^n} = -|S_1|\, r P(x, y),$$

وهو المطلوب.

س. لنثبت ان التابع $h(y)$ الذي انشأناه آنفا في د، داخل الكرة W له نهاية، عندما تؤول النقطة الداخلية y الى نقطة x_0 على الحافة، تساوي الكمية $\lambda(x_0)$.

للقيام بذلك، نبرهن على ان نواة بواسون $P(x, y)$ تتمتع بخاصيات

متتالية من شكل دلتا (63.3) عندما $y = y_m \to x_0$، وهي الخاصيات:

$P(x, y_m) > 0$ (وهذا واضح) و

(1 $$1 = \oint_{\Sigma} P(x, y_m)\, dS(x)$$

(2 $$\oint_{\Sigma'} P(x, y_m)\, dS(x) \to 0 \quad \text{لما} \quad m \to \infty$$

حيث Σ' هو السطح Σ المجرد من جوار U صغير بشكل كيفي للنقطة x_0. تنتج الخاصية 1) من دستور بواسون بتعويض $h(x)$ بالتابع التوافقي المساوي لِـ1، اما الخاصية 2) فتأتي من العلاقة:

$$\lim_{m \to \infty} \frac{r^2 - |y_m|^2}{|x - y_m|^n} = 0$$

وهي علاقة منتظمة بالنسبة لِـ$x \in \Sigma - U$ لأن $|y_m| \to r$ و $0 <$ ثابت $\leqslant |x - y_m|$ خارج U.

عندما نطبق 63.3، نحصل على:

$$\lim_{m \to \infty} \oint_{\Sigma} P(x, y_m)\, \lambda(x)\, dS(x) = \lambda(x_0)$$

بذلك ينتهي البرهان.

ص. نظرية. من اجل كل تابع $\lambda(x)$ معطى ومستمر على سطح كرة $\Sigma \subset R_n$، يوجد تابع وحيد $h(y)$ معرف على الكرة W المحدودة بالسطح Σ، ومستمر على الكرة (المغلقة) W وتوافقي داخل W ومطابق على Σ للتابع $\lambda(x)$.

البرهان. إننا قد انشأنا ضمن د و س تابعا يتمتع بالشروط المطلوبة في نص النظرية. يبقى فقط اثبات وحدانية هذا التابع $h(y)$. من المستحيل تطبيق النظرية 35.4 ـ ب في هذه الحالة لأن البرهان عليها تطلب ان تكون التوابع الواردة فيها قابلة للإشتقاق مرتين اينما كان في W (بما في ذلك حافة الكرة)، في حين ان المشتقات الاولى للتوابع المعتبرة هنا قد تكون غير مستمرة على الكرة المغلقة W. ها هو البرهان الذي نقترحه: في البداية يكفي البرهان على التابع الوحيد $h(y)$ الذي يحقق فرض النظرية

من اجل $\lambda(x) \equiv 0$ هو التابع المنعدم، نرمز لـ r لنصف قطر الكرة W.
من اجل $\varepsilon > 0$ معطى، توجد بفضل الاستمرار المنتظم لـ $h(y)$ سطح كرة $\Sigma_{r-\delta}$ مركزها هو مركز W ونصف قطرها $r - \delta$ (حيث $\delta > 0$) بحيث تتحقق المتراجحة $|h(y)| \leqslant \varepsilon$ عند كل نقطة من $\Sigma_{r-\delta}$. حينئذ تقوم نفس المتراجحة عند كل نقطة $y \in W_{r-\delta}$ وذلك استنادا الى النتيجة أ المطبقة على الكرة $W_{r-\delta}$ ذات السطح $\Sigma_{r-\delta}$. نجعل ε و δ يؤولان الى 0، فنرى ان $h(y) \equiv 0$ داخل W، وهو المطلوب.

ط. نظرية. نفرض، في كرة $W \subset R_n$، انه توجد متتالية $h_1(y), \ldots, h_m(y), \ldots$ من التوابع المستمرة في W والتوافقية داخل W، كما نفرض ان هذه المتتالية متقاربة في W نحو تابع $h(y)$. عندئذ يكون التابع $h(y)$ مستمرا في W وتوافقيا داخل W .

البرهان. يتبين من أ، س، ص ان التوابع $h_m(y)$ يمكن وضعها في الشكل

$$h_m(y) = \oint_{\Sigma} P(x, y)\, h_m(x)\, dS$$

ننتقل الى النهاية في هذا الدستور. بجعل $m \to \infty$ نحصل على:

$$h(y) = \oint_{\Sigma} P(x, y)\, h(x)\, dS$$

لأن التابع $h(y)$ مستمر في الكرة المغلقة W. يتبين من د ان التابع $h(y)$ توافقي داخل الكرة W، وهو المطلوب.

4 .75 . تمثيل حقل توافقي داخل كرة بدلالة قيم مركبتها الناظمية على حافة الكرة.

أ . لتكن $W \subset R_n$ كرة نصف قطرها r ومركزها في نقطة z يحتواه داخل ساحة V معرف فيها حقل توافقي $H(y)$. يتبين من 4 .35 ـ د أن الحقل $H(y)$ معين بشكل وحيد داخل الكرة W حسب قيم مركبتة الناظمية على حافة الكرة W ؛ نريد تقديم قاعدة صريحة تسمح بانشاء الحقل

$H(y)$ انطلاقا من مركبته الناظمية على الحافة.

ليكن $h(y)$ كموناً للحقل $H(y)$، اي تابعا توافقيا يحقق $H(y) = \text{grad}\, h(y)$؛ بطبيعة الحال فإن المركبة الناظمية للحقل $H(y)$ على Σ مطابقة للمشتق الناظمي للتابع $h(y)$ على Σ. إذا تمكنا من ايجاد التابع $h(y)$ داخل الكرة W انطلاقا من قيم مشتقة الناظمي على Σ، فإننا نجد الحقل $H(y)$ نفسه بفضل الدستور $H(y) = \text{grad}\, h(y)$. لهذا السبب، فإن مسألة استعادة حقل توافقي في W انطلاقا من مركبته الناظمية على Σ ترد الى مسألة البحث عن تابع توفيقي في W انطلاقا من قيم مشتقة الناظمي على Σ.

ب. ليكن $h(y) \equiv h(y_1, \ldots, y_n)$ تابعا توافقيا في كرة $W \subset R_n$. نؤكد على ان التابع $\varphi(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial h(y)}{\partial y_i}$ هو ايضا توافقي في الكرة W.

بالفعل، يمكننا ان نشتق لانهائيا التابع $\varphi(y)$، كما هو الحال فيما يخص التابع $h(y)$ (65.4 ـ ب)، ثم إن المشتقات $\frac{\partial h(y)}{\partial y_i}$ توافقية وكذا $h(y)$ (65.4 ـ جـ). إذن:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial h}{\partial y_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial^3 h}{\partial y_j^2 \, \partial y_i} + 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial y_i^2} \right) = 0$$

جـ. يمكن كتابة التابع $\varphi(y)$ الوارد في ب على الشكل $\varphi(y) = (y, \text{grad}\, h)$. نفرض فيما يلي (بدون المس بعمومية القضية) ان $z = 0$ و $r = 1$. نضع $y = \rho x$، $|x| = 1$، $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ عندئذ يأخذ التابع $\varphi(y)$ الشكل $\varphi(y) = \rho \frac{\partial h(\rho x)}{\partial \rho}$. ينتج عنه ان التابع $h(y)$ يمكن تعيينه انطلاقا من $\varphi(y)$ حسب الدستور

$$h(y) \equiv h(\rho x) = \int_0^{\rho} \frac{\varphi(\tau x)}{\tau} d\tau + h(0) \qquad (1)$$

حيث $h(0)$ قيمة كيفية

لكن وضع $\rho = 1$ يؤدي الى:

$$\varphi(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial \rho}$$

اي ان التابع التوافقي $\varphi(y)$ مطابق على حافة الكرة W للمشتق الناظمي للتابع $h(y)$. نستنتج من ذلك طريقة استعادة التابع $h(y)$ انطلاقا من مشتقه الناظمي على Σ : عندما يكون $\frac{\partial h(x)}{\partial \rho}$ معطى نجد التابع $\varphi(y)$ بدستور بواسون 55.4 (3)؛ ثم، عند معرفة $\varphi(y)$، نحصل على التابع $h(y)$ حسب الدستور (1).

د . لنبين ان الطريقة المشار اليها لا تسمح باستعادة تابع توافقي $h(y)$ انطلاقا من قيم مشتقة الناظمي على Σ فحسب، بل تسمح ايضا بإنشاء تابع توافقي انطلاقا من القيم $\lambda(x)$ المعطاة بشكل كيفي لمشتقه الناظمي على Σ شريطة ان تحقق هذه القيم العلاقة:

$$\oint_{\Sigma} \lambda(x)\, dS = 0 \qquad (2)$$

التي تأتي ضرورتها من 45.4 ـ أ.

ليكن $\lambda(x)$ تابعا معطى، مستمرا على Σ ويحقق الشرط (2). نضع:

$$\varphi(y) = \oint_{\Sigma} P(x, y)\, \lambda(x)\, dS$$

حيث يمثل $P(x, y)$ نواة بواسون. يتبين من 65.4 ر ـ س ان التابع $\varphi(y)$ مستمر في الكرة (المغلقة) W توافقي داخل W ومطابق للتابع $\lambda(x)$ على الحافة. زيادة على ذلك، ينتج من (2) ان:

$$\varphi(0) = \oint_{\Sigma} \lambda(x)\, dS = 0$$

نضع ايضا:

$$h(y) \equiv h(\rho x) = \int_{0}^{\rho} \frac{\varphi(\tau x)}{\tau}\, d\tau + h(0) \qquad (3)$$

حيث $h(0)$ قيمة كيفية؛ بما ان التابع $\varphi(y)$ قابل للإشتقاق من اجل $y = 0$ و $\varphi(0) = 0$ فإن التكامل (3) موجود. لنبين ان التابع $h(y)$ (3) توافقي داخل W ومستمر في الكرة المغلقة W. يأتي الاستمرار

بطبيعة الحال من استمرار التابع $\varphi(\tau x)/\tau$ ؛ اما القيم على الحافة للتابع $h(y)$ فهي معطاة بالدستور:

$$h(x)=\int_0^1 \frac{\varphi(\tau x)}{\tau}\,d\tau \qquad (4)$$

للبرهان على ان التابع $h(y)$ توافقي يكفي، بمراعاة 65. 4 ـ ج، ان نثبت انه يمكن استعادته بواسطة دستور بواسون، انطلاقا من قيمة على الحافة الواردة في (4). نضع، قصد الاختصار، $h(0)=0$ فنجد:

$$\oint_\Sigma P(s, y)\,h(s)\,dS=\oint_\Sigma P(s, y)\left\{\int_0^1 \frac{\varphi(\tau s)}{\tau}\,d\tau\right\}dS=$$

$$=\int_0^1\left\{\oint_\Sigma P(s, y)\,\frac{\varphi(\tau s)}{\tau}\,dS\right\}d\tau$$

لكن التابع $\varphi(\tau y)/\tau$ توافقي وكذا $\varphi(y)$ (حيث τ مثبت)؛ وبالتالي فإن التكامل الداخلي يساوي $\varphi(\tau y)/\tau$ ، وبفضل التعويض $\xi=\rho\tau$ نحصل على:

$$\oint_\Sigma P(s, y)\,h(s)\,dS=\int_0^1 \frac{\varphi(\tau y)}{\tau}\,d\tau=\int_0^\rho \frac{\varphi(\xi x)}{\xi}\,d\xi=h(y)$$

وهو المطلوب.

اخيرا، لدينا $\frac{\partial h(\rho x)}{\partial\rho}=\frac{\varphi(\rho x)}{\rho}$ ، ومنه يأتي من اجل $\rho=1$ $\frac{\partial h(x)}{\partial\rho}=\varphi(x)=\lambda(x)$ وبذلك ينتهي البرهان.

ر. نلخص النتائج ب ـ د في النظرية التالية:

نظرية. من اجل كل تابع $\lambda(x)$ معطى مستمر على سطح الكرة $\Sigma\subset R_n$ ويحقق الشرط:

$$\oint_\Sigma \lambda(x)\,dS=0$$

يوجد تابع $h(y)$ مستمر في الكرة W المحدودة بسطح الكرة $\Sigma\subset R_n$ وتوافقي داخل W ، مشتقة $\frac{\partial h(\rho x)}{\partial\rho}$ $(x\in\Sigma,\ 0<\rho\leqslant 1)$ مستمر،

وهو يساوي $\lambda(x)$ من اجل $\rho = 1$. إن كل تابع آخر يتمتع بنفس الخاصيات يختلف عن $h(y)$ بثابت.

اثبتنا وجود التابع المطلوب $h(y)$ في د، أما وحدانيته بتقدير ثابت جمعي فتنتج من ج.

§ 6. 4 . انشاء حقل شعاعي في R_3 انطلاقا من دوارة وتفرقة.

16. 4 . ليكن $R(y)$ حقلا شعاعيا و $b(y)$ حقلا سلميا في ساحة مغلقة $V \subset R_3$. نتساءل عما اذا كان بالإمكان انشاء حقل شعاعي $Q(y)$ ، في الساحة V ، يتمتع بالخاصيتين:

$$\operatorname{div} Q(y) = b(y), \qquad \operatorname{rot} Q(y) = R(y) \tag{1}$$

إذا كان الجواب نعم، فكيف نصف كل الحقول الشعاعية التي تحقق المعادلتين (1) تسمى المسألة المطروحة مسألة انشاء حقل شعاعي انطلاقا من دوارة وتفرقه او المسألة المعاكسة للتحليل الشعاعي.

نفرض ان الحقلين المعطيين $R(y)$ و $b(y)$ قابلان للإشتقاق في الساحة V . نطلب زيادة على ذلك ان تفرق الحقل $R(y)$ منعدم اينما كان في V ، وان المركبة الناظمية لهذا الحقل على حافة V، منعدمة. إن اول هذين الشرطين ضروري لحل المسألة المطروحة لأن $\operatorname{div} \operatorname{rot} Q(y) = 0$ مهما كان الحقل $Q(y)$. فيما يخص الشرط الثاني فتتطلبه طريقة الحل لا غير (راجع 66. 4 ادناه).

26. 4 . نبدأ بانشاء حل خاص للجملة (1).

نعتبر الحالة التي يكون فيها الحقل المعطى $R(y)$ منعدم بحيث ترد الجملة (1) الى جملة اكثر بساطة:

$$\operatorname{div} Q(y) = b(y), \qquad \operatorname{rot} Q(y) = 0 \tag{2}$$

نحن نعلم حلا لهذه الجملة. وبالفعل، دعنا ننشىء حقل الجاذبية المزود بالكثافة $-\frac{1}{4\pi} b(x)$ (24.4 (5)):

$$F(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{b(x)\, e(y, x)}{|x-y|^2} dx \qquad (3)$$

رأينا في 24.4 ـ ر ـ ق ان:

$$\operatorname{div} F(y) = b(y), \qquad \operatorname{rot} F(y) = 0$$

بحيث ان الحقل $F(y)$ الوارد في (3) يمثل حلا خاصا للجملة (2).

36.4 . نعتبر الحالة الاخرى حيث يكون الحقل السلمي المعطى منعدم بحيث تأخذ الجملة (1) الشكل:

$$\operatorname{div} Q(y) = 0, \qquad \operatorname{rot} Q(y) = R(y) \qquad (4)$$

نعرف هنا ايضا حلا خاصا، ننشىء حقل بيوت وسافار باعتبار كثافة التيار $\nu(x) = \frac{1}{4\pi} R(x)$ (34.4 ـ أ)؛

$$G(y) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[R(x), e(y, x)]}{|x-y|^2} dx \qquad (5)$$

بالنظر الى 34.4 ـ ر وبمراعاة الشروط المفروضة على الحقل $R(y)$، نجد:

$$\operatorname{div} G(y) = 0, \qquad \operatorname{rot} G(y) = R(y)$$

بحيث ان الحقل $G(y)$ يعطي حلا خاصا للجملة (4).

46.4 . انطلاقا من الحقلين المنشأين $F(y)$ و $G(y)$، نضع:

$$Q_0(y) = F(y) + G(y). \qquad (6)$$

لدينا فيما يخص الحقل $Q_0(y)$:

$$\operatorname{div} Q_0(y) = \operatorname{div} F(y) + \operatorname{div} G(y) = b(y),$$
$$\operatorname{rot} Q_0(y) = \operatorname{rot} F(y) + \operatorname{rot} G(y) = R(y).$$

وهكذا فإن الحقل $Q_0(y)$ حل خاص للجملة (1). ليكن $Q_1(y)$ حلا ثانيا للجملة (1) نجد فيما يخص الحقل $H(y) = Q_1(y) - Q_0(y)$:

$$\operatorname{div} H(y) = \operatorname{div} Q_1(y) - \operatorname{div} Q_0(y) = 0,$$
$$\operatorname{rot} H(y) = \operatorname{rot} Q_1(y) - \operatorname{rot} Q_0(y) = 0,$$

إذن، فإن $H(y)$ حقل توافقي (15.4). وبالعكس، إذا كان $H(y)$ حقلا توافقيا و $Q_1(y) = Q_0(y) + H(y)$ نجد أن:

$$\operatorname{div} Q_1(y) = \operatorname{div} Q_0(y) + \operatorname{div} H(y) = b(y),$$
$$\operatorname{rot} Q_1(y) = \operatorname{rot} Q_0(y) + \operatorname{rot} H(y) = R(y),$$

بحيث ان الحقل $Q_1(y)$ يمثل مع الحقل $Q_0(y)$، حلا للجملة (1).
نصل بذلك الى النظرية التالية:

نظرية. نحتفظ بالشروط الواردة اعلاه. عندئذ تكون الجملة (1) منسجمة. يعطي الدستور (6) احد حلولها ونحصل على الحلول الاخرى باضافة حقل توافقي كيفي الى الحل السابق.

56.4 . يمكن ان نفرض على الحل المطلوب $Q(y)$ بعض الشروط الاضافية التي تعين هذا الحل بشكل وحيد.

نفرض، مثلا، ان المركبة الناظمية $(Q(x), m(x))$ للحقل المطلوب $Q(y)$ معطاة عند كل نقطة x على الحافة S من الساحة V .

بكتابة الحل $Q(y)$ كمجموع $Q_0(y) + H(y)$ حيث يمثل $Q_0(y)$ حل (6) و $H(y)$ حقلا توافقيا مجهولا، نرى ان المركبة الناظمية على S للحقل الاخير هي:

$$(H(x), m(x)) = (Q(x), m(x)) - (Q_0(x), m(x)). \tag{7}$$

اذا كانت الساحة V كرة W، فإن الحقل التوافقي $H(x)$ المحقق للشرط (7) موجود ووحيد حسب 73.4 ، أ و د؛ وبالتالي فان حل الجملة (1) موجود ووحيد.

طبقا لـ65.4 ـ ص، نرى بنفس الطريقة ان حل هذه الجملة موجود ووحيد عندما تكون قيم كمون الحقل $H(x)$ (أو الحقل $Q(x)$ إن كان توافقيا بمقربة الحافة) معطاة على حافة الكرة W .

أما في الحالة العامة التي لا تكون فيها الساحة V كرة فإن وجود

ووحدانية الحلول باعتبار احد الشروط الواردة اعلاه مسألة على جانب كبير من التعقيد؛ فهي تعد مسألة من اهم مسائل نظرية المعادلات ذات المشتقات الجزئية (المسألة الحدية الاولى او الثانية المتعلقة بمعادلة لابلاس)، لن نتعرض لها في هذا الكتاب(*).

يتمثل شرط من نمط آخر في كون الحقل المطلوب $Q(y)$ الذي نعتبره في الفضاء R_n باكمله، يؤول بانتظام الى 0 لما $\infty \rightarrow |y|$ امن الواضح ان الحقل $Q_0(y)$ الذي انشأناه يحقق هذا الشرط لأن العبارتين (3) و(5) الحاويتين في مقاميها الكمية $|x - y|^2$ اتبينان مباشرة ان التكاملين الواردين فيهما يؤولان الى 0 لما $\infty \rightarrow |y|$، نؤكد على انه لا وجود لحل آخر (للجملة) يحقق الشرط السابقة. بالفعل، اذا وجد حل آخر فإن الفرق بينه وبين الحل $Q_0(y)$ يكون حقلا توافقيا؛ غير ان الحقل التوافقي الوحيد، حسب 65.4 ـ د، الذي يؤول الى 0 لما $\infty \rightarrow |y|$، مطابق للصفر، ومنه تأتي وحدانية حل الجملة (1) في صنف الحقول المعتبر.

66.4 . يمكن صياغة مسألة انشاء حقل انطلاقا من تفرقة ودوارة صياغة محلية: يجب انشاء حقل $Q(y)$ يحقق المعادلتين 16.4(1) بجوار نقطة معطاة $y_0 \in V$؛ نعلم ان $R(y) \equiv 0$ ، لكن ليس هناك اي فرض على المركبة الناظمية للحقل $R(y)$ على حافة الساحة V .

ترد هذه المسألة الى انشاء، بجوار النقطة y_0 حقل $G(y)$ على الاقل مثل $G(y) = R(y)$ ، بالفعل، انطلاقا من ذلك الحقل، نرمز بـ: $\varphi(y) = \operatorname{div} G(y)$ ، حينئذ يكون الحقل المطلوب $Q(y)$ من شكل مجموع الحقل $G(y)$ والحقل النيوتني الذي كثافته $-\frac{1}{4\pi}(b(y) - \varphi(y))$.

نستطيع تعيين المركبات $G_1(y), G_2(y), G_3(y)$ للحقل

(*) راجع مثلا، ا. جز. بتروفسكي محاضرات في المعادلات التفاضلية الجزئية ط. 5، «ناوكا» 1970 (بالروسية)

المطلوب $G(y)$ انطلاقا من المركبات $R_1(y), R_2(y), R_3(y)$ لـ $R(y)$، وهـذا بجوار النقطـة $y_0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ بـاستخـدام الدساتير التالية مثلا :

$$G_1(y) = \int_{y_3^0}^{y_3} R_2(y_1, y_2, \tau_3)\, d\tau_3,$$

$$G_2(y) = -\int_{y_3^0}^{y_3} R_1(y_1, y_2, \tau_3)\, d\tau_3 + \int_{y_1^0}^{y_1} R_3(\tau_1, y_2, y_3^0)\, d\tau_1,$$

$$G_3(y) \equiv 0,$$

بالفعل فإنه ينتج عن هذه الدساتير :

$$\frac{\partial G_3}{\partial y_2} - \frac{\partial G_2}{\partial y_3} = R_1, \quad \frac{\partial G_1}{\partial y_3} - \frac{\partial G_3}{\partial y_1} = R_2;$$

باستخدام الشرط $\operatorname{div} R = \frac{\partial R_1}{\partial y_1} + \frac{\partial R_2}{\partial y_2} + \frac{\partial R_3}{\partial y_3} = 0$ ، نجد :

$$\frac{\partial G_2}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial y_2} = -\int_{y_3^0}^{y_3} \frac{\partial R_1(y_1, y_2, \tau_3)}{\partial y_1}\, d\tau_3 + R_3(y_1, y_2, y_3^0) -$$

$$-\int_{y_3^0}^{y_3} \frac{\partial R_2(y_1, y_2, \tau_3)}{\partial y_3}\, d\tau_3 = R_3(y_1, y_2, y_3^0) +$$

$$+\int_{y_3^0}^{y_3} \frac{\partial R_3(y_1, y_2, \tau_3)}{\partial y_3}\, d\tau_3 = R_3(y_1, y_2, y_3),$$

وهو المطلوب .

تمارين

1 . اوجد دوار الحقل $P(A) = f(\rho)\,\tau(A)$ ، حيث يمثل ρ المسافة التي تفصل النقطة A عن مستقيم ثابت λ ، ويمثل $\tau(A)$ α الشعاع الواحدي العمودي على λ وكذا العمود المسقط من النقطة A على المستقيم λ . ما هي الحالة التي تجعل $P(A) = 0$ ؟

2 . نعتبر جماعة وحيدة الوسيط من المنحنيات المرنة بكفاية في المستوى. اثبت من اجلها العلاقة

$$\operatorname{div} m = -k,$$

حيث يمثل m الشعاع الناظمي الواحدي و k انحناء منحنى من الجماعة، في النقطة المعتبرة.

3 . اثبت ان العلاقة الموالية محققة من اجل كل حقل شعاعي R في R_3 سطوحة متعامدة:

$$(R, \operatorname{rot} R) = 0.$$

4 . هب أن $(R, \operatorname{rot} R) = 0$. نرسم ابتداء من نقطة معطاة A خطا L عموديا على خطوط الحقل R، ونرسم ابتداء من كل نقطة M على الخط L منحنيا $\gamma(M)$ ماسا عند كل نقطة منه للشعاع rot R. برهن أن السطح S المحصل عليه عمودي على الحقل R.

5 . هب ان $(R, \operatorname{rot} R) = 0$ ، انشيء جماعة وحيدة الوسيط من السطوح المتعامدة على الحقل R.

6 . يحقق الحقل الشعاعي $R = \{X, Y\}$ في المستوى $R_2 - \{0\}$ ، حيث

$$X = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Y = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

الشرط $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$ ، لكن ليس له كمون معرف في كل ساحة تعريف الحقل. كيف نفسر هذا التناقض الظاهري مع النظرية 4 .12ـ د ؟

7 . إن للحقل $R(M) = \frac{e(0, M)}{r^2(0, M)}$ في $R_3 - \{0\}$ تفرقا منعدما. باعتبار الكرة ذات نصف القطر 1 المتمركزة في مصدر الاحداثيات والمجردة من جوار صغير لنقطة مثبتة، اثبت ان الحقل $R(M)$ ليس له كمون شعاعي.

8 . احسب الحقل النيوتني الذي ينشأ عن كرة متجانسة كتلتها 1 ونصف قطرها r ومركزها في مصدر الاحداثيات.

9 . اثبت ان كل تابع توافقي غير سالب $h(x)$ يحقق، في كرة نصف قطرها r ومركزها في مصدر الاحداثيات للفضاء R_n ، متراجحة هارناك : (Harnack):

$$\frac{(r - |y|)\, r^{n-2}}{(r + |y|)^{n-2}}\, h(0) \leqslant h(y) \leqslant \frac{(r + |y|)\, r^{n-2}}{(r - |y|)^{n-2}}\, h(0).$$

10 . اثبت ان كل تابع توافقي وغير سالب في كل الفضاء R_n ، ثابت.

11 . نفرض ان لدينا تابعا توافقيا $h(y)$ في كرة $W \subset R_n$ نصف قطرها r ، يحقق المتراجحة $|h(y)| \leqslant M$. اثبت ان لدينا المتراجحة التالية حيث يرمز z لمركز الكرة W :

$$|\text{grad}\, h(z)| \leqslant \frac{n}{r} M.$$

12 . نفرض ان لدينا تابعا توافقيا $h(y)$ يحقق المتراجحة $|h(y)| \leqslant M$ في ساحة $V \subset R_n$. برهن في كل ساحة مغلقة $\overline{W} \subset V$، على قيام المتراجحة.

$$|\text{grad}\, h(y)| \leqslant CM,$$

حيث لا يتعلق C باختيار التابع $h(y)$

13 . إذا كانت مجموعة غير منتهية $\{h(y)\} = B$ من التوابع التوافقية محدودة بانتظام في ساحة $V \subset R_n$ ، يمكننا ان نستخرج منها متتالية $h_1(y)$ ، $h_2(y), \ldots$ من التوابع المتقاربة بانتظام في كل ساحة مغلقة $\overline{W} \subset V$.

14 . اثبت إنه إذا كانت متتالية رتيبة $h_1(y) > h_2(y) > \ldots$ من التوابع التوافقية في كرة $|y| < r$ ، متقاربة عند مركز الكرة، فهي متقاربة في كافة الكرة نحو تابع توافقي.

15 . هل يمكن تطبيق دستور ستوكس على شريط موبيوس (Möbius) ؟

نبذة تاريخية

تم البرهان على الدساتير التي تربط تكاملا على حافة ساحة بتكامل على الساحة ذاتها وفق الجدول التالي:

الدستور 61.4 (3) (« دستور غرين ») من طرف أولر في الفترة 1771 ـ 1772 وغرين سنة 1828 ؟

الدستور 31.4 (5) (« دستور اوستروغرادسكي ») من طرف غوس في حالة خاصة جدا (1813) واوستروغرادسكي (1828) من اجل n = 3 ، ثم

من اجل n كيفي سنة 1834؛

الدستور 62.4(6) («دستور ستوكس») من طرف تومسن (Thomson) سنة 1849؛ ادرجه ستوكس في الامتحان السنوي الذي ينظمه في كمبريدج من سنة 1849 الى 1882.

الدستوران 25.4(1) و(2) («دستورا غرين») من طرف غرين سنة 1828. واضح ان كل هذه الدساتير كانت كتبت في اول صياغة لها باستخدام الرموز المعتادة بدون اشعة. ظهر الحساب الشعاعي لدى هاميلتون (مؤلفه الرئيسي «محاضرات حول الرباعيات» نشر سنة 1853) كجزء من نظريته المتعلقه بالرباعيات. تشكل الرباعيات، باللغة الحديثة، جبرا رباعي البعد على الحقل R_1 باسا $1, i, j, k$ والمعتمد على قواعد الضرب التالية:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

يمثل، من اجل رباعي $a + bi + cj + dk$، العدد a، حسب هاميلتون، «سلميا» ويمثل $bi + cj + dk$ «شعاعا» هنا ادخل هاميلتون لأول مرة هذين المصطلحين). يؤدي ضرب الاشعة، بوصفها رباعيات، الى المساواة التالية:

$$(b_1i + c_1j + d_1k)(b_2i + c_2j + d_2k) = (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) + \\ + i(c_1d_2 - d_1c_2) + j(d_1b_2 - d_2b_1) + k(b_1c_2 - b_2c_1),$$

حيث نرى في آن واحد الجداءات «السلمية» «الشعاعية» للاشعة.

يعمل المؤثر الرباعي لهاميلتون:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

على تابع شعاعي $f = iu + jv + kw$ حسب القاعدة الشكلية لضرب الرباعيات، ويؤدي الى النتيجة:

$$\nabla f=\left(i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}\right)(iu+jv+kw)=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+$$
$$+i\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

نرى في الجزء السلمي التفرق (تسبقه الاشارة −) المعروف منذ عهد أولر؛ اما الجزء الشعاعي، اي الدوار، فكان يمثل في عهد هاميلتون شيئاً مستحدثا، ولم يكن تفسيره الفيزيائي معروفا آنذاك. كان هاميلتون يحلم بنظرية توابع لمتغير رباعي تعمم حساب التوابع لمتغير عقدي. لكن القدر لم يشأ ان تتحقق آمال هاميلتون المعلقة على الرباعيات. وجد الجزء الجبري لنظرية هاميلتون، نفسه مضموما باكمله في نظرية المصفوفات التي تطورت بسرعة فائقة. اما الجزء التحليلي فأبرز منه التحليل الشعاعي «غير الرباعي» (ج. جيبس Gibbs، سنة 1881) الذي بدأ يلعب دورا هاما في الفيزياء الرياضية. وإذا كان العديد من العلماء، قبل جيبس، قد اعتبروا الاشعه، بحذر (مثل ج. ماكسويل (Maxwell) منشيء النظرية الكهرومغنطيسية، الذي لم يستعمل الاشعة بل كتب المعادلات الاساسية للكهروديناميكا، اول مرة، في شكل سلمي) فإن هـ. هارتز (Hertz)، خلف ماكسويل، قد كتب هذه المعادلات في شكل شعاعي ظاهري (1890):

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-c\,\text{rot}\,H,\qquad \frac{\partial H}{\partial t}=+c\,\text{rot}\,E$$

(في الفراغ). تقبل جملة هاتين المعادلتين، فيما تقبل، حلا من الشكل: $H=F(x-ct)\,j,\ E=F(x-ct)\,k$ ، حيث F تابع كيفي؛ يمثل هذا الحل موجة عارضية مظهرها الجانبي F تنبث على طول محور العناصر x ، بسرعة c . أكد الإنجاز التجريبي لمثل هذه الامواج من طرف هارتز واكتشاف الراديو من طرف أ. بوبوف Popov (1895) صحة نظرية ماكسويل تأكيدا قاطعا، كما ساهم ذلك في ابراز الاهمية القصوى للدور الذي تلعبه الرياضيات في سبيل تقدم العلم.

اشار الى التابع الكموني للحقل النيوتني لاغرانج سنة 1773 . يمكن ايجاد المعادلة $\Delta u = 0$ في اعمال أولر الّا ان الذي درسها دراسة متواصلة هو لابلاس (منذ 1782) . استنتج بواسون سنة 1813 المعادلة $\Delta u = -4\pi\rho$ من اجل الحقل النيوتني؛ وهو نفسه الذي أنشأ تابعا توافقيا (مصطلح لابلاس) في كرة بدلالة قيم هذا التابع على حافة الكرة. اما إنشاء تابع توافقي بدلالة قيم مشتقة الناظمي على الحافة فقد توصل له نومان (Neumann) سنة 1877 . نجد وصفا للحالة الراهنة للمسائل الحدية المتعلقة بالتوابع التوافقية، مثلا ، في كتاب أ.ج. بتروفسكي: محاضرات في المعادلات التفاضلية الجزئية، ط. 5 ، «ناوكا»، 1970 (بالروسية).

القسم الثاني

من الفضاءات الشعاعية الى المنوعات التفاضلية.

الفصل 5

الهندسة التفاضلية التقليدية

إن الهندسة ـ وبالتحديد الهندسة التفاضلية ـ غنية، حتى على سطح ثنائي البعد في الفضاء الثلاثي البعد، بالافكار والنتائج وطرح مسائل لها تعميات واسعة؛ ثم إنها تستخدم في نفس الوقت كحقل تطبيق طبيعي لطرق التحليل الرياضي. هناك نتائج ذات طابع عام تجد مكانها الطبيعي عندما تعرض من اجل سطح متعدد الابعاد، وهو ما سنقوم به كلما اتيحت لنا الفرصة. يُدخل الشكل التربيعي الاول (§ 5.1) مسافة على السطح ذي البعد m في الفضاء الاقليدي ذي البعد n وهذا باستعادتها من الفضاء الاقليدي الاخير على مستوى لا متناهي الصغر. لم يكن في البداية امل وراء وجود مثل هذه المسافة على السطح. فيما يخص الشكل التربيعي الثاني (§ 5.2) المستعمل لحساب انحناء الخطوط الواقعة على السطح فقد تطلب ان يكون بعد السطح وبعد كل الفضاء لا يختلفان الّا بوحدة. يتم تعريف انحناء سطح. الذي يمثل احدى المميزات الهامة للسطح، بفضل الشكل التربيعي الثاني؛ نشير في هذا النطاق انه إذا اختلفت اشارات انحناءات سطوح فإن هذه السطوح تتمتع بخاصيات هندسية مختلفة اختلافا اساسيا. ثم إن تعريف مسافة على سطح يسمح بابراز ترابط هذا السطح أي ترابط الخاصيات المحلية لموقع النقطة على السطح. نعرّف بفضل الترابط الخطوط الجيوديزية (§ 5.4) والانسحاب على السطح (§ 5.6) واخيرا الانحناء بوصفه نتيجة لدوران شعاع مسحوب على طول محيط مغلق. يتبين ان الانحناء خاصية مميزة ومستقلة للسطح، اي لا يتعلق الّا بالمسافة (اي بالشكل التربيعي الاول) وهو لا يتعلق بالكيفية المجسم بها السطح في الفضاء المحيط به.

§ 1.5 . الشكل التربيعي الاول

11.5 . نعيّن في الفضاء R_n، ذي البعد n، سطحا P بعده m بواسطة n تابعا تعبر عن الاحداثيات $x_1, \ldots, x_n$ لنقطة من السطح بدلالة الوسيطات $u_1, \ldots, u_m$ حيث تتحول النقطة الوسيطية $u = (u_1, \ldots, u_m)$ في ساحة $U \subset R_m$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
x_1 = x_1(u_1, \ldots, u_m), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = x_n(u_1, \ldots, u_m).
\end{array}
\right. \qquad (1)
$$

نفرض ان التوابع $x_1(u), \ldots, x_n(u)$ قابلة للإشتقاق عددا كافيا من المرات (سنقول كم في بداية كل فقرة). بالامكان تعويض المعادلات (1) بمعادلة شعاعية

$$r = r(u) = \{x_1(u), \ldots, x_n(u)\}.$$

من الناحية الشكلية، يمكن أن تقابل نقطتين وسيطيتين مختلفتين $u = (u_1, \ldots, u_m)$ و $u' = (u'_1, \ldots, u'_m)$ نفس النقطة من السطح P . لكن حتى نتفادى التعقيدات المتعلقة بالتقاطعات الذاتية، فإننا لا نعتبر مثل هذه الحالات. إن ابسط فرض نقبله وهو يضمن التقابل المحلي للتطبيق $u \to r(u)$ ، يتمثل في اشتراط ان تكون مرتبة المصفوفة اليعقوبية:

$$
\left\| \begin{array}{ccc}
\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m}
\end{array} \right\| = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_m)} \qquad (2)
$$

عند نقطة u^0 من الساحة U مساوية m . ليكن، مثلا:

$$
\left\| \begin{array}{ccc}
\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m}
\end{array} \right\|
$$

اصغريا غير منعدم. نرى عندئذ، انطلاقا من 47.1 ـ ب، ان التطبيق (1) تقابلي في جوار V للنقطة $(u_1^0, \ldots, u_m^0) = u^0$، أي ان هذا التطبيق يصل نقطتين مختلفتين $(u_1, \ldots, u_m)$ و $(u'_1, \ldots, u'_m)$ من الساحة V بنقطتين مختلفتين من السطح P سندرس السطح في هذا الجوار V للوسيطات. وهكذا نتخذ وجهة نظر محلية: نعتبر السطح في جوار نقطة مثبتة فقط؛ مع العلم ان هذا يكفي للوصول الى النظريات مبرهنات الاولى من نظرية السطوح.

21.5 . نفرض ان مرتبة المصفوفة 11.5(2) عند نقطة معطاة $u^0 \in U$ تساوي m . ينتج عن ذلك ان الاشعة:

$$r_1 \equiv \frac{\partial r}{\partial u_1} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \right\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$r_m \equiv \frac{\partial r}{\partial u_m} = \left\{ \frac{\partial x_1}{\partial u_m}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \right\},$$

مستقلة خطيا، عند النقطة M من السطح P الموافقة لـ M^0 تقع هذه الاشعة، عندما تكون منطلقاتها في النقطة M، في المستوى الماس للسطح P؛ ثم إن الشعاع r_j ماس للخط الذي تتغير عليه الاحداثية u_j عند تثبيت الاحداثيات الاخرى u_i من اجل $i \neq j$.

لنجد شعاعا ماسا لأي خط L يمر على السطح P في النقطة M يمكن تعيين الخط L بالمعادلات الوسيطية

$$\left\{ \begin{array}{l} u_j = u_j(t),\ j = 1, \ldots, m, \\ a \leqslant t \leqslant b;\ r = r(u_1(t), \ldots, u_m(t)). \end{array} \right. \qquad (1)$$

نفرض أن التوابع $u_j(t)$ قابلة للإشتقاق. عندئذ يكون لدينا، حسب النظرية الخاصة بمشتق تابع مركب 1 .33 ـ ب:

$$\frac{dr}{dt}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial r}{\partial u_j}\frac{du_j}{dt}=\sum_{j=1}^{m}r_j u'_j(t). \quad (2)$$

نستطيع تفسير المساواة (2) على انها نشر شعاع $\frac{dr}{dt}$ وفق اشعة الاساس $r_1, \ldots, r_m$ عند النقطة M. بطريقة مماثلة نحصل بخصوص التفاضلية dr للشعاع $r(t)$ على:

$$dr=\sum_{j=1}^{m}r_j u'_j(t)\,dt=\sum_{j=1}^{m}r_j\,du_j. \quad (3)$$

31. 5 كما رأينا في ي 16 .91، فإن طول المنحنى L بين النقطتين الموافقتين لقيمتي الوسيط $t=a$ ، $t=\tau$ ، يعطيه التكامل:

$$s=\int_a^\tau |r'(t)|\,dt,$$

وبالتالي:

$$ds(t)=|r'(t)|\,dt=|dr(t)|.$$

بصفة خاصة، لدينا على السطح P :

$$(1) \qquad ds^2 = |dr|^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} r_j\, du_j,\ \sum_{k=1}^{m} r_k\, du_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} g_{jk}\, du_j\, du_k,$$

حيث $g_{jk} = (r_j, r_k)$. يسمى الشكل التربيعي في الطرف الثاني من (1) **الشكل التربيعي الاول للسطح** P ، ونرمز له بـ $G = G(u; du)$. إذا عرفنا الشكل التربيعي الاول أي المعاملات g_{jk} كتوابع للنقطة M من السطح P ، أو ـ والقولان متكافئان ـ كتوابع للوسيطات $u_1, \ldots, u_m$ فإننا نستطيع ايجاد طول الخط L بين نقطتين A و B توافقان القيمتين a و b للوسيط t وذلك بفضل الدستور:

$$(2) \qquad s = \int_{t=a}^{b} ds = \int_{a}^{b} \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} g_{jk}(u(t))\, u'_j(t)\, u'_k(t)\, dt}.$$

إذا عينا خطين L_1 و L_2 مرسومين على السطح P بالمعادلات $u_j = u_j^{(1)}(t),\ u_j = u_j^{(2)}(t)\ (j = 1, \ldots, m)$ على التوالي وتقاطع هذين الخطين في النقطة M فإننا نستطيع ايجاد الزاوية التي يشكلانها (أي الزاوية ω التي يشكلها المماسان) استنادا الى الشكل التربيعي الاول:

$$\cos\omega = \frac{(dr^{(1)}, dr^{(2)})}{|dr^{(1)}|\,|dr^{(2)}|} =$$

$$(3) \qquad = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} g_{jk}(M)\, du_j^{(1)}\, du_k^{(2)}}{\sqrt{\sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}(M)\, du_j^{(1)}\, du_k^{(1)}}\ \sqrt{\sum_{j,k=1}^{m} g_{jk}(M)\, du_j^{(2)}\, du_k^{(2)}}}.$$

إن الشكل التربيعي الاول معرف موجب بطبيعة الحال (وهذا حسب انشائه، زيادة على ان اصغرياته الرئيسية تمثل معينات غرام «Gram» للأشعة المستقلة خطيا، وعليه فهي موجبة). نعرف، من اجل الاشعة $r^{(i)} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j^{(i)} r_j\ (i = 1, 2)$ في المستوى الماس للسطح P جداء سلميا $(r^{(1)}, r^{(2)})_g$ بالدستور:

$$(r^{(1)}, r^{(2)})_g = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_j^{(1)} \xi_k^{(2)} g_{jk}.$$

نؤكد على ان هذا الجداء السلمي يطابق الجداء السلمي المعتاد $(r^{(1)}, r^{(2)})$ لنفس الاشعة في الفضاء R_n . بالفعل:

$$(r^{(1)}, r^{(2)}) = \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j^{(1)} r_j,\ \sum_{k=1}^{m} \xi_k^{(2)} r_k\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_j^{(1)} \xi_k^{(2)} \cdot (r_j\ r_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \xi_j^{(1)} \xi_k^{(2)} g_{jk} = (r^{(1)}, r^{(2)})_g .$$

وهكذا فإن الشكل التربيعي الاول يستعيد على المستوى الماس، بدلالة الاحداثيات $\xi_1, \ldots, \xi_m$ المسافة الاقليدية الاولى للفضاء R_n .

41. 5 . ليكن $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ سطحين، نفرض ان هناك صلة تقابلية بين نقاطها تجعل طول كل خط على السطح $P^{(1)}$ مساويا لطول صورته على السطح $P^{(2)}$. نسمي هذه الصلة التقابلية ايزومترية.

نظرية. حتى يكون سطحان $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ ايزومتريين يلزم ويكفي ان يكون التمثيلان الوسيطيان لها

$$r^{(1)} = r^{(1)}(u_1, \ldots, u_m), \quad r^{(2)} = r^{(2)}(u_1, \ldots, u_m)$$

في نفس ساحة التغير U للوسيطات $u_1, \ldots, u_m,$ وان تكون التوابع $g_{jk}^{(1)} = (r_j^{(1)}, r_k^{(1)})$ مطابقة على التوالي للتوابع $g_{jk}^{(2)} = (r_j^{(2)}, r_k^{(2)})$.

البرهان. إذا كان التمثيلان الوسيطان المذكوران موجودين فإن طولي منحنيين متوافقين على السطحين $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ معطيات بتكاملين من النمط 31. 5 (2)، إذن فهما متطابقان، لذا فإن السطحين $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ ايزومتريان. وبالعكس، إذا كان السطحان $P^{(1)}$ و $P^{(2)}$ أيزومتريين فإن المساواة الموالية قائمة، ضمن تمثيليهما الوسيطين المتوافقين، وذلك من اجل كل τ :

$$\int_a^{\tau} \sqrt{\sum_{j,k} g_{jk}^{(1)}(u)\, u_j'(t)\, u_k'(t)}\ dt = \int_a^{\tau} \sqrt{\sum_{j,k} g_{jk}^{(2)}(u)\, u_j'(t)\, u_k'(t)}\ dt.$$

نشتق بالنسبة لـ τ فنجد:

$$\sum_{j,k} g_{jk}^{(1)}(u)\, u_j'(\tau)\, u_k'(\tau) = \sum_{j,k} g_{jk}^{(2)}(u)\, u_j'(\tau)\, u_k'(\tau)$$

وهذا من اجل كل u_j' لأنه من الممكن أن نرسم على السطح $P^{(1)}$ أو $P^{(2)}$ منحنيا يمر بالنقطة M في اي اتجاه كان. من تطابق هذين الشكلين يأتي تساوي المعاملات المتوافقة لهذين الشكلين، وهو المطلوب.

تنتمي خاصيات سطح التي يُحتفظ بها عند الانتقال لسطح ايزومتري، الى الهندسة المميزة للسطح؛ من الناحية التحليلية، حتى تكون خاصية مميزة (للسطح) يلزم ويكفي ان نستطيع التعبير عنها بدلالة التوابع $g_{jk}(u)$. تسمى خاصيات سطح التي تتغير عند الانتقال الى سطح ايزومتري للسطح الاول (مثل انحناءات الخطوط على السطح) خاصيات خارجية.

فيما يخص الخط اي عندما يكون m=1، فإن التصنيف السابق يفقد معناه: كل الخطوط القابلة للإشتقاق خطوط ايزومترية: إذا كان m=2 فالتصنيف له معنى؛ إذ ان المستوى والاسطوانة ايزومتريان (محليا) اما المستوى وسطح الكرة فهما ليسا ايزومتريين، ذلك ما سنراه في المستقبل (33.5). ثم إذا كان $m > 2$ فإن ايزومترية سطحين يمثل ظاهرة نادرة نسبياً (53.5).

51.5 . السطوح الثنائية البعد في R_3 . نرمز لإحداثيات R_3 كالمعتاد بـ: $x, y, z,$ ونرمز للوسيطين $u_1, u_2,$ اللذين يعينان موقع النقطة M على السطح P بـ $u, v,$ بحيث أن الجملة 11.5 تكتب على الشكل:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

أو، بدلالة الاشعة:

$$r = r(u, v) = \{x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)\}.$$

نرمز لمشتقات لنصف قطر الشعاع للسطح $r(u, v)$ بالنسبة للوسيطين v و u بـ r_u و r_v على التوالي، ولدينا:

$$r_u = \left\{\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \quad \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\right\},$$

$$r_v = \left\{\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\right\}.$$

نرمز، حسب غوس، لمعاملات الشكل التربيعي الاول كما يلي:

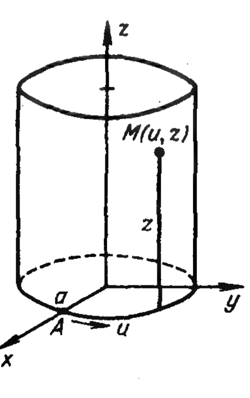
$$E = (r_u, r_u), \quad F = (r_u, r_v), \quad G = (r_v, r_v),$$

وبعد ذلك يكتب الشكل التربيعي الاول على النحو:

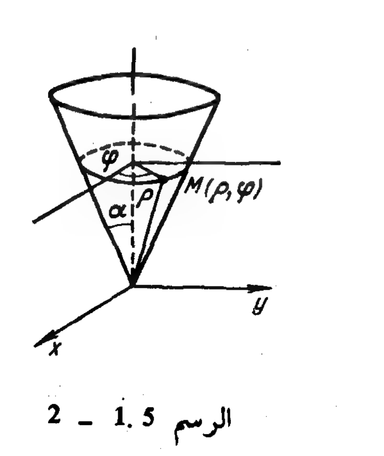
$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \quad (1)$$

امثلة . أ . ليكن P مستويا مطابقا لمستوى الاحداثيات x, y . نختار كوسيطين للنقطة M الاحداثيتين x و y فنجد :

$$r = \{x, y, 0\}, \quad r_x = \{1, 0, 0\}, \quad r_y = \{0, 1, 0\}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (2)$$



الرسم 1.5 ـ 1



الرسم 1.5 ـ 2

ب . يمكن ان نختار ، في نفس المستوى ، كوسيطين الاحداثيتين القطبيتين φ و ρ . عندئذ :

$$\begin{aligned}
r &= \{\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0\},\\
r_\varphi &= \{-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0\},\\
r_\rho &= \{\cos\varphi, \sin\varphi, 0\},\\
E &= (r_\varphi, r_\varphi) = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = 1,\\
ds^2 &= \rho^2\,d\varphi^2 + d\rho^2.
\end{aligned}$$

جـ . نختار على اسطوانة C نصف قطرها a (الرسم 1.5ـ1) ، كوسيطين للنقطة M طول القوس u لدائرة القاعدة السفلى المحسوب ابتداء من النقطة A في الاتجاه المشار اليه والاحداثية z . عندئذ :

$$r(u,\ z) = \left\{a \cos\frac{u}{a},\ a \sin\frac{u}{a},\ z\right\}$$

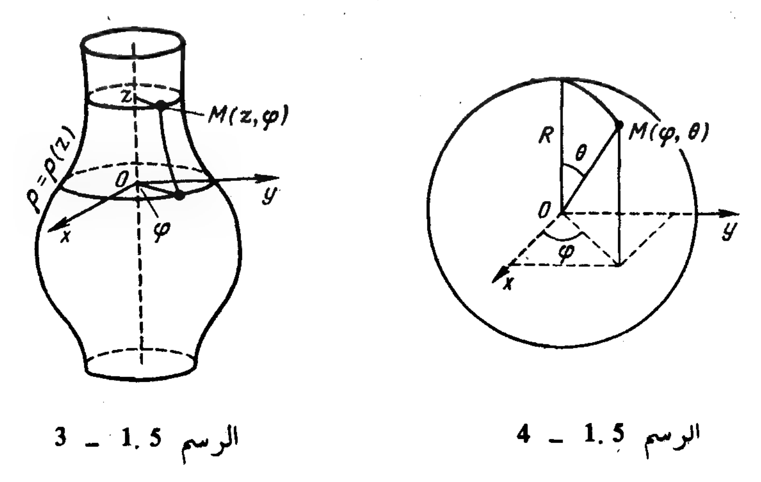
$$(4) \qquad r_u = \left\{-\sin\frac{u}{a},\ \cos\frac{u}{a},\ 0\right\},$$

$$r_z = \{0,\ 0,\ 1\},$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$ds^2 = du^2 + dz^2,$$

إن معاملات الشكل التربيعي الاول هي نفس المعاملات من اجل المستوى ضمن الاحداثيات المستطيلة (القائمة)؛ ذلك ما يؤكد من الناحية التحليلية ان المستوى والاسطوانة ايزومتريان.



الرسم 1.5 ـ 3

الرسم 1.5 ـ 4

د . نختار على مخروط K كوسيطين للنقطة M زاويتها القطبية φ والمسافة ρ التي تفضل رأس المخروط عن M على طول المولدة (الرسم 1.5 ـ 2). إذا كانت الزاوية التي يشكلها محور المخروط والمولدة تساوي α فإن:

$$r(\varphi,\ \rho) = \{\rho \sin\alpha \cos\varphi,\ \rho \sin\alpha \sin\varphi,\ \rho \cos\alpha\},$$

$$r_\varphi = \{-\rho \sin\alpha \sin\varphi,\ \rho \sin\alpha \cos\varphi,\ 0\}$$

$$(5) \qquad r_\rho = \{\sin\alpha \cos\varphi,\ \sin\alpha \sin\varphi,\ \cos\alpha\},$$

$$E = (r_\varphi,\ r_\varphi) = \rho^2 \sin^2\alpha, \quad F = (r_\varphi,\ r_\rho) = 0,$$

$$G = (r_\rho,\ r_\rho) = 1,$$

$$ds^2 = \rho^2 \sin^2\alpha\, d\varphi^2 + d\rho^2.$$

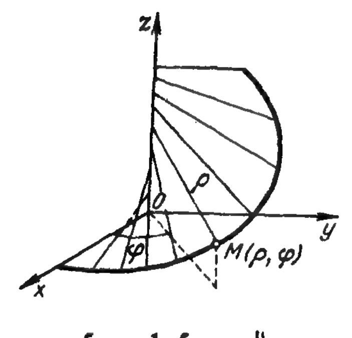
عند تعويض الاحداثية φ بالاحداثية الجديدة $\psi = \frac{\varphi}{\sin \alpha}$ فإن الشكل ds^2 يكتب على النحو $\rho^2 d\psi^2 + d\rho^2$ ، ذلك هو بالضبط الشكل التربيعي الاول للمستوى ضمن الاحداثيات القطبية. وهكذا فإن المخروط والمستوى ايزومتريان ايضا؛ وهذا معروف في الهندسة الاولية.

ر. نختار على سطح كرة S نصف قطرها R (الرسم 1.5 ـ 3) الاحداثيتين الكروتين المعتادتين φ ، θ. لدينا في هذه الحالة:

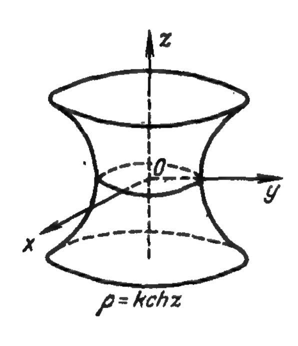
$$
\begin{aligned}
&r(\varphi, \theta) = \{R \sin\theta \cos\varphi,\ R \sin\theta \sin\varphi,\ R\cos\theta\},\\
&r_\varphi = \{-R\sin\theta\sin\varphi,\ R\sin\theta\cos\varphi,\ 0\},\\
&r_\theta = \{R\cos\theta\cos\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ -R\sin\theta\},\\
&E = (r_\varphi, r_\varphi) = R^2\sin^2\theta,\ F = (r_\varphi, r_\theta) = 0,\\
&G = (r_\theta, r_\theta) = R^2,\\
&ds^2 = R^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 + R^2\, d\theta^2
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

س. نعتبر سطحا P دورانيا حول محور العناصر z معرفا بالمعادلة $\rho = \rho(z)$ حيث ρ هي المسافة التي تفصل النقطة M عن محور z. نختار كوسيطين للنقطة M الكمية z والزاوية القطبية φ (الرسم 1.5 ـ 4). لدينا:

$$
\begin{aligned}
&r(z, \varphi) = \{\rho(z)\cos\varphi,\ \rho(z)\sin\varphi,\ z\},\\
&r_z = \{\rho_z\cos\varphi,\ \rho_z\sin\varphi,\ 1\},\\
&r_\varphi = \{-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ 0\},\\
&E = (r_z, r_z) = \rho_z^2 + 1,\quad F = (r_z, r_\varphi) = 0,\\
&G = \{r_\varphi, r_\varphi\} = \rho^2,\\
&ds^2 = (\rho_z^2 + 1)\, dz^2 + \rho^2\, d\varphi^2.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$



الرسم 1.5 ـ 5



الرسم 1.5 ـ 6

ص. هناك حالة خاصة هامة لسطح دوراني يمثلها الكاتينويد[9] اي السطح الدوراني حول محور العناصر z لسليسلة:

$$\rho(z) = k \operatorname{ch} \frac{z}{k}.$$

(انظر الرسم 1.5 ـ 5) يكتب الدستور (7) في حالة الكاتينويد على الشكل:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{z}{k} (dz^2 + k^2\, d\varphi^2). \tag{8}$$

ط. **السطح اللولبي** هو السطح الذي يرسمه نصف مستقيم β مواز للمستوى x, y ينطلق من محور العناصر z، عند دورانه حول المحور z وصعوده، في نفس الوقت، بسرعة متناسبة مع سرعة دورانه تبعده عن المستوى x, y (الرسم 1.5 ـ 6). وهكذا إذا اخترنا وسيطي النقطة M من السطح اللولبي المسافة ρ التي تفصل هذه النقطة عن مصدر β والزاوية القطبية φ (اي زاوية دوران β المسحوبة ابتداء من موقعه الابتدائي) فإننا نجد:

$$\begin{aligned}
&r(\rho, \varphi) = \{\rho \cos\varphi,\ \rho \sin\varphi,\ k\varphi\},\\
&r_\rho = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\}, \quad r_\varphi = \{-\rho \sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ k\},\\
&E = (r_\rho, r_\rho) = 1, \quad F = (r_\rho, r_\varphi) = 0,\\
&G = (r_\varphi, r_\varphi) = \rho^2 + k^2,\\
&ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + k^2)\, d\varphi^2.
\end{aligned}$$

إذا وضعنا $\rho = k \operatorname{sh} \frac{v}{k}$ فإن عبارة ds^2 ضمن الاحداثيات v, φ تأخذ الشكل:

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{v}{k} dv^2 + k^2 \operatorname{ch}^2 \frac{v}{k} d\varphi^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{v}{k} (dv^2 + k^2\, d\varphi^2). \tag{9}$$

إن الطرف الثاني في (9) مطابق (بغض النظر عن رموز الوسيطات) للشكل التربيعي الاول للكاتينويد (8). نصل الى خلاصة غير منتظرة الى حد ما: الكاتينويد والسطح اللولبي ايزومتريان. اما الصلة التقابلية بينهما فتجعل خطوط السطح اللولبي، من اجل φ مثبت (اي المواقع المتوالية لنصف المستقيم خلال دورانه) تقابل الخطوط $z = C$ للكاتينويد (اي خطوط عرضه). يقابل خط انقباض الكاتينويد (اي $z = 0$) محور العناصر

z على السطح اللولبي. نشير ان الامر يتعلق هنا بايزومترية اجزاء هذين السطحين، وان ليست هناك إيزومترية شاملة.

61.5 . يتبين ضمن الاعتبارات السابقة ان الشكل المتري للسطح يأتي في آخر المطاف من مسافة الفضاء الاقليدي الذي يحوى السطح. لكن ذلك ليس ضروريا ، إذ يمكننا تعريف مسافة (أي شكلا $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \cdot du_i\, du_j$) على سطح ذي بعد m : $r = r(u_1, \ldots, u_m)$ ، بطريقة اخرى دون ربطها بمسافة الفضاء الذي يحوي هذا السطح. يجب فقط ان يكون الشكل $\sum_{i,j} g_{ij}\, du_i\, du_j$ متناظرا ومعرفا موجبا. سنقدم، مثالا هاما لمثل هذه المسافة على المجسم الزائدي $x^2 + y^2 - z^2 = -\rho^2$ في الفضاء R_3 ، ضمن 45.5 .

§ 2.5 . الشكل التربيعي الثاني

12.5 . انحناء خط على سطح. نقتصر هنا على الحالة n=m+1 (سطح ذو بعد n في الفضاء الاقليدي R_{n+1} ذي البعد($(n+1)$)، والمسافة المأخوذة عن R_{n+1} . يمكننا، ضمن هذه الشروط، ادخال الشعاع الناظمي على السطح عند نقطة معطاة؛ إن هذا الشعاع معرف بشكل وحيد، بتقدير عامل عددي، إذا ما احتفظنا بالإفتراضات السابقة حول قابلية نصف القطر الشعاع $r(u_1, \ldots, u_n)$ للإشتقاق وحول مرتبة المصفوفة اليعقوبية $\frac{\partial(x_1, \ldots, x_{n+1})}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$. نستطيع من الناحية التحليلية تعيين الشعاع N الناظمي على السطح عند نقطة معطاة M كجداء شعاعي لِـ n شعاع اساس $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u_1}, \ldots, r_n = \frac{\partial r}{\partial u_n}$ للمستوى الماس (26.3 ـ ج):

$$N = [r_1, \ldots, r_n] = \begin{Vmatrix} e_1 & \ldots & e_{n+1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \ldots & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial u_n} \end{Vmatrix} . \qquad (1)$$

يمكن توحيد الشعاع N بتقسيمه على طوله، وبعدها نحصل على شعاع ناظمي واحدي $m=m(u)$ معرف بتقدير العامل ± 1 . نثبّت في جوار صغير لنقطة M الشعاع $m(u)$ عند كل نقطة بحيث يكون لدينا تابع $m(u)$ مستمر.

22.5 . نفرض من الآن ان نصف القطر الشعاع $r(u)$ للسطح يقبل الاشتقاق باستمرار مرتين (بالنسبة للوسيطات $u_1, \ldots, u_n$). نعتبر على السطح P منحنيا L معطى بالمعادلات:

$$u_1 = u_1(t), \ldots, u_n = u_n(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

$$r = r(u_1(t), \ldots, u_n(t)),$$

حيث ان التوابع $u_j(t)$ هي ايضا قابلة للإشتقاق باستمرار مرتين. إن الذي يهمنا هو انحاء هذا الخط عند النقطة $A \in P$ الموافقة للقيمة $t = \alpha$ لحساب الانحناء ننتقل على المنحنى L الى الوسيط الطبيعي s الذي يمثل طول قوس محسوبا ابتداء من نقطة ثابتة A_0. نذكّر ان (ي22.16) لدينا الدستور التالي الخاص بمنحنى وسيطه s :

$$\frac{dr(A)}{ds} = \tau(A),$$

وإذا كان $\frac{d^2r(A)}{ds^2} \neq 0$ فإن

$$\frac{d^2r(A)}{ds^2} = \frac{d\tau(A)}{ds} = k(A)\,\nu(A).$$

يمثل τ هنا الشعاع الواحدي الماس للمنحنى L, ν الشعاع الواحدي للناظمي على τ والواقع في المستوى الملاصق، ويمثل k انحناء الخط L . يسمى المستقيم المعين في المستوى الملاصق بالشعاع ρ الناظم الرئيسي على المنحنى L.

لما كان المنحنى L واقعا على السطح P فإن:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\sum_{j=1}^{n} r_j \frac{du_j}{ds}\right) = \sum_{j,\,k=1}^{n} r_{jk} \frac{du_k}{ds}\frac{du_j}{ds} + \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{d^2u_j}{ds^2}, \quad (1)$$

حيث $r_{jk} = \frac{\partial^2 r}{\partial u_j \partial u_k}$. عندما نضرب المساواة (1) سلمياً في الشعاع m فإننا نحصل على:

$$\left(\frac{d^2r}{ds^2}, m\right) = \sum_{j,k=1}^{n} (r_{jk}, m) \frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds},$$

لأن $(r_j, m) = 0$. ليكن $b_{jk} = (r_{jk}, m)$. يسمى الشكل:

$$B \equiv B(u, du) = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\, du_j\, du_k \qquad (2)$$

الشكل التربيعي الثاني للسطح P، إذا تذكرنا بأن $ds^2 = \sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}\, du_j\, du_k = G(u, du)$ هو الشكل التربيعي الاول للسطح P، فإننا نحصل في الاخير على:

$$\left(\frac{d^2r}{ds^2}, m\right) = \frac{B(u, du)}{G(u, du)} = \frac{\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}(u)\, du_j\, du_k}{\sum_{j,k=1}^{n} g_{jk}(u)\, du_j\, du_k}$$

(دستور موني Meusnier). يؤدي دستور موني الى النتائج الموالية:

أ. اذا كان الشكل التربيعي الثاني غير منعدم من اجل اتجاه $\{du_j\}$ فإن لدينا $\left(\frac{d^2r(A)}{ds^2}, m\right) \neq 0$ من اجل كل منحنى على السطح P ماس عند النقطة A للشعاع du_j . عندئذ $\frac{d^2r}{dS^2} = kv \neq 0$ ، إذن فإن للمنحنى L عند النقطة A انحناء غير منعدم ويأخذ دستور موني الشكل:

$$(kv, m) = k\cos(\widehat{v, m}) = \frac{B(u, du)}{G(u, du)}. \qquad (3)$$

وهكذا نرى، من اجل الاتجاهات المناحي $\{du_j\}$ حيث $B(u, du) \neq 0$ ، أن انحناء الخط الموافق لذلك على السطح معين بالكميات: $u_j\ (j = 1, \ldots, n)$ (نقطة من السطح) $du_j\ (j = 1, \ldots, n)$ (منحى المستقيم الماس) و v (منحى الناظم الرئيسي). على وجه الخصوص، فإن كل الخطوط على السطح P المارة بنقطة معطاة A في منحنى معطى $\{du_j\}$ ، التي لها نفس المستوى الملاصق والتي يكون من اجلها $B(u, du) \neq 0$ لها نفس الانحناء.

ب. من بين كل الخطوط على السطح P المارة بنقطة معطاة A، في منحى معطى (u_j و du_j مثبتا) حيث $B(u, du) \neq 0$ ، فإن الخط الذي له مستو ملاصق يحوي الشعاع m بحيث ان $|\cos(\widehat{v, m})| = 1$ هو الخط الذي

له اصغر انحناء.

يمكن ان نختار هذا الخط مطابقا للمقطع الناظمي للسطح اي الخط المعين بتقاطع السطح P والمستوى (الثنائي البعد) المار بالشعاعين m و $dr = \sum_j r_j du_j$ نحصل على انحناء هذا الخط من الدستور:

$$k_N = \frac{|B(u, du)|}{G(u, du)}.$$

إن الشكل المتداول لتعريف انحناء مقطع ناظمي هو:

$$k_N = \frac{B(u, du)}{G(u, du)}. \qquad (4)$$

تسمى هذه العبارة **الانحناء الناظمي للسطح** P عند النقطة A وفق الاتجاه (المنحى) $\{du_j\}$ ؛ إن اشارتها + في الحالة التي يكون فيها الشعاعان في اتجاه واحد وتكون اشارتها − في الحالات الاخرى؛ اي ان الانحناء الناظمي موجب إن كان الخط منحنيا في اتجاه الشعاع، وسالب في الحالات الاخرى.

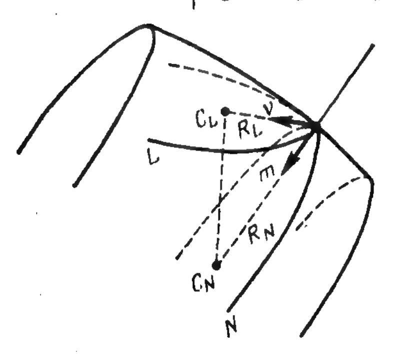
ينتج من (3) و(4) ان انحناء اي خط مرتبط بإنحناء المقطع الناظمي الموافق له ارتباطا تصفه العلاقة:

$$k \cos(\widehat{v, m}) = k_N. \qquad (5)$$

ثم إن نصفي قطري الانحناء R_L و R_N للخط L وللمقطع الناظمي الموافق له مرتبطان بالمساواة:

$$R_N \cos(\widehat{v, m}) = R_L. \qquad (6)$$

ومنه تأتي الخاصية الهندسية التالية (الرسم 2.5 ـ 1)



الرسم 2.5 ـ 1

جـ . (نظرية موني). إذا كان L منحنيا معطى، فإن مركز انحنائه C_L هو مسقط مركز الانحناء C_N على المستوى الملاصق للمقطع الناظمي الموافق له N.

إن الخاصية الاخيرة التي تأتي مباشرة من الدستور (6) يمكن تطبيقها بغرض تعيين مركز الانحناء الناظمي انطلاقا من معرفة مركز إنحناء خط مار بنقطة معطاة من المنحنى المعطى في نفس المنحنى

د . إن كل القضايا الواردة اعلاه قائمة من اجل المناحي $\{du_j\}$ بحيث $B(u, du) \neq 0$. نعتبر منحنى $\{du_j\}$ يحقق $B(u, du) = 0$. نسميه المنحنى (الاتجاه) المقارب على المستوى الماس Π (للسبب الذي سنراه في 42.5 - س). لدينا المساواة التالية من اجل منحنى $L = \{r = r(u), u = u(s)\}$ مار على السطح P عند النقطة A في منحنى مقارب:

$$\left(\frac{d^2r(A)}{ds^2}, m\right) = 0.$$

يعني ذلك أنه: اما أن يكون إنحناء المنحنى L عند النقطة A منعدما، واما ان يكون الشعاع $\frac{d^2r}{ds^2} = kv(A)$ ، في حالة $\frac{d^2r(A)}{ds^2} \neq 0$ ، في المستوى Π . بما ان الشعاع $\boldsymbol{\tau}(A)$ ينتمي ايضا الى المستوى Π ، فإن المستوى الملاصق للمنحنى L عند النقطة A تقع في المستوى Π الماس للسطح P. بصفة خاصة، فإن انحناء كل خط مستو منحاه هو المنحنى المقارب ولا ينتمي الى المستوى Π ، انحناء منعدم.

32.5 . يمكن تأويل الشكل التربيعي الثاني تأويلا هندسيا مباشراً. ننشر تزايد نصف القطر الشعاع $r(u)$ الخاص بالإنتقال من نقطة u الى نقطة تريبة $u + du$ حسب دستور تايلور، نحصل عندئذ (بتقدير اللامتناهيات في الصغر من الرتبة الثانية):

$$\Delta r \equiv r(u + \Delta u) - r(u) = \sum_{j=1}^{n} r_j du_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} r_{jk} du_j du_k + \ldots,$$

ومنه يأتي:

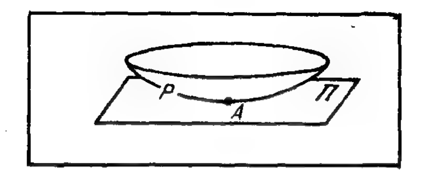
$$(\Delta r, m) = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^{n} (r_{jk}, m)\, du_j\, du_k + \ldots = \frac{1}{2} B(u, du) + \ldots .$$

وهكذا فإن الشكل $B(u, du)$ بالمعامل 1/2 يطابق الجزء التربيعي الرئيسي لمسقط الشعاع Δr على الشعاع m ، اي إنحراف السطح P عن مستويه الماس. نختار الاتجاه الموجب اتجاه الشعاعm. عندما نعوض الشعاع m بالشعاع المعاكس له ، فإن الشكل $B(u, du)$ تتغير اشارته ، وكذا الامر فيما يخص انحناءات كل الخطوط على السطح عند النقطة A يمكن القول أن للشكل $B(u, du)$ التفسير الهندسي المذكور بتقدير اشارة.

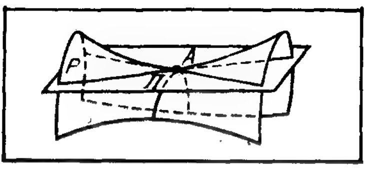
مثلا ، إذا كان n=2 وكان الشكل $B(u, du)$ عند نقطة معطاة A ذا اشارة محددة ، فإن السطح P يقع (في جوار للنقطة A) من جهة واحدة بالنسبة للمستوى الماس؛ اما إذا كان الشكل $B(u, du)$ ، عند النقطة A ، ذا اشارة غير محددة (وغير منحل) فإن السطح P (على مقربة كيفية من النقطة A) له اجزاء تقع في جهتي المستوى الماس. نقول في الحالة الاولى ان النقطة A **نقطة ناقصية** من السطح ، ونقول في الحالة الثانية إنها **نقطة زائدية** لأن الحالة الاولى تجعل السطح يأخذ ، بجوار النقطة A ، شكل مجسم مكافىء ناقصي ، ويأخذ في الحالة الثانية شكل مجسم مكافىء زائدي (بتقدير لا متناهيات في الصغر من الرتبة الثانية).

إذا كان الشكل $B(u, du)$ ، عند النقطة A ، منحلا فان السطح يأخذ بجوار النقطة A شكل اسطوانة تكافئية. نقول عن مثل هذه النقطة انها **نقطة تكافئية**. اما إذا كان الشكل $B(u, du)$ مطابقا للصفر عند النقطة A فإن السطح يطابق ، بتقدير لا متناهيات في الصغر من الرتبة الثانية ، مستوية الماس وذلك بالابتعاد عن هذا المستوى بمقدار لا متناه في الصغر من رتبة اكبر من 2 . تسمى هذه النقطة **نقطة مستعرضة**.

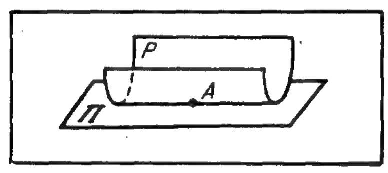
نجد توضيحا لكل انماط هذه النقاط في الرسم 25 ـ 2 .



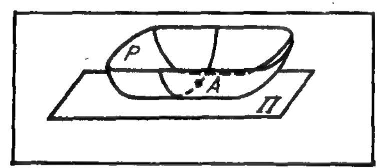
نقطة ناقصية



نقطة زائدية



نقطة تكافئية



نقطة مستعرضة

5 .42 . ارتباط انحناءات المقاطع الناظمية للمنحي على سطح ماس.

أ . نحاول اختصار دستور انحناء مقطع ناظمي:

$$k_N = \frac{B(u, du)}{G(u, du)} \tag{1}$$

بالانتقال الى جملة جديدة من الاحداثيات على المستوى الماس (ذي البعد n) عند نقطة A من السطح P . نبحث في هذا المستوي عن اساس متعامد ومتجانس $g_n, \ldots, g_1$ يجعل الشكل B يأخذ الشكل القانوني:

$$B(u, du) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2,$$

حيث تمثل $\xi_n, \ldots, \xi_1$ الاحداثيات الجديدة للشعاع $dr = \sum_{j=1}^{n} r_j du_j$. بما ان الشكل $G(u, du)$ لا يمثل سوى مربع طول الشعاع dr ضمن الاساس الجديد، فهو يكتب على النحو:

$$G(u, du) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2.$$

ويكتب الدستور (1) ضمن الاساس الجديد على النحو:

$$k_N = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2}{\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2 \varphi_j, \tag{2}$$

حيث يمثل φ_j الزاوية التي يشكلها الشعاع dr مع شعاع الاساس g_j . تسمى اتجاهات (مناحي) الاشعة g_j **الاتجاهات الرئيسية** على المستوى الماس Π . اما الاعداد λ_j فتمثل انحناءات المقاطع الناظمية الموافقة لذلك؛ وتسمى **الانحناءات الرئيسية** للسطح Π عند النقطة A . يسمى الدستور

(2) دستور اولر.

ب. إذا كانت كل الاعداد λ_j عند النقطة A، من نفس الاشارة فإن اشارة الشكل $B(u, du)$ محددة؛ نسمي مثل هذه النقطة (كما هو الحال لما $n = 2$) **نقطة ناقصية**. إذا كانت A ناقصية فإن كل المقاطع الناظمية منحنية في نفس الاتجاه (بالنسبة للشعاع m). اما إذا كانت من بين الاعداد λ_j اعداد موجبة واخرى سالبة (بدون وجود اعداد منعدمة) فإن المقاطع الناظمية ينحني بعضها في اتجاه وينحني البعض في الاتجاه المعاكس؛ تسمى النقطة التي يتحقق ذلك من اجلها **نقطة زائدية** (كما هو الحال لما n=2). إذا انعدم احد الاعداد λ_j على الاقل ولم ينعدم واحد منها على الاقل تسمى النقطة A **نقطة تكافئية**. اخيرا، إن انعدمت كل الاعداد λ_j، تسمى النقطة A **نقطة مستعرضة**.

يسمى العدد $H = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ **الانحناء المتوسط للسطح** P عند النقطة A. كما يسمى العدد $K = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$ **الانحناء الكلي للسطح** P عند النقطة A. من اجل n=2، لدينا $K > 0$ إذا تعلق الامر بنقطة ناقصية، ولدينا $K < 0$ من اجل نقطة زائدية، و$K = 0$ من اجل نقطة تكافئية.

ج. إن المقاطع الناظمية لمستو $P \subset R_{n+1}$ ذي بعد n، عند كل نقطة A منه تمثل مستقيمات؛ وبالتالي فإن **الشكل التربيعي الثاني لمستو مطابق للصفر**.

وبالعكس، إذا كان **الشكل التربيعي الثاني لسطح ذي بعد n** $P \subset R_{n+1}$ **مطابقا للصفر فإن P مستو بعده n**. بالفعل، إذا كان $(r_{kj}, m) = 0$ من اجل $k, j = 1, \ldots, n$ فإن اشتقاق المساواة $(r_j, m) = 0$ تعطي $(r_j, m_k) = -(r_{jk}, m) = 0$ ومنه يأتي $m_k = 0$ من اجل كل القيم $k = 1, \ldots, n$؛ وبالتالي فإن الشعاع m لا يتغير على السطح P. ليكن r_0 الشعاع الموصل الى نقطة ثابتة من السطح P، و r الشعاع الموصل الى نقطة كيفية من السطح P. عندئذ

بحيث ان الكمية $(r - r_0, m)_j = (r_j, m) = 0 \ (j = 1, \ldots, n)$

$(r - r_0, m)$ لا تتغير على السطح P ؛ بما انها منعدمة من اجل $r = r_0$ فإن $(r - r_0, m) = 0$ من اجل كل قيم r . تمثل المعادلة الاخيرة معادلة المستوى المار بموصل الشعاع r_0 والعمودي على الشعاع m . بصفة خاصة، فإن كل الانحناءات الرئيسية منعدمة، من اجل مستو $P \subset R_{n+1}$ ذي بعد n ، وكذا الامر فيما يخص الانحناء المتوسط للإنحناء الكلي.

د . لدينا فيما يخص جزءا من السطح الكرة ذات البعد n (من R_{n+1}) والمركز r_0 ونصف القطر R والناظم الموجه من المركز نحو السطح: $r - r_0 = Rm, r_j = Rm_j$ ؛ ينتج عن ذلك ان $(r_j, m) = R\,(m_j, m) = 0$ إذن:

$$b_{jk} = (r_{jk}, m) = (r_j, m)_k - (r_j, m_k) =$$

$$= -(r_j, m_k) = -\frac{1}{R}(r_j, r_k) = -\frac{1}{R}\, g_{jk}.$$

وإذا كان الناظم على سطح الكرة موجها نحو المركز فإن $b_{jk} = \frac{1}{R} g_{jk}$. وهكذا، يتبين في كل جملة احداثيات، وفي على كل جزء من سطح الكرة ذات نصف القطر R ، ان معاملات الشكل التربيعي الثاني متناسبة (معاملها $\pm 1/R$) مع المعاملات الموافقة لها الواردة في الشكل التربيعي الاول. كما يتضح ان تلك هي خاصية تميز سطح الكرة. وعلى وجه التحديد، إذا كانت لدينا، من اجل سطح $P \subset R_{n+1}$ ، العلاقة $b_{jk} = \pm \frac{1}{R} g_{jk} \ (j, \ k = 1, \ldots, n, R$ ، وحيث R ثابت، والاشارة ثابتة)، فإن:

$$b_{jk} = (r_{jk}, m) = -(r_j, m_k) = \pm \frac{1}{R}\, g_{jk} =$$

$$= \pm \frac{1}{R}(r_j, r_k) = \pm \left(r_j, \frac{1}{R}\, r_k\right),$$

إذن $m_k = \mp \frac{1}{R}\, r_k \ (k = 1, \ldots, n)$ يكافيء ذلك القول بأن الشعاع $m \pm \frac{1}{R} r$ لا يتغير على السطح P . نرمز له بـ $\pm \frac{1}{R} r_0$. حينئذ $|r - r_0| = R\,|m| = R$ ، ونرى ان السطح P يمثل بالفعل جزءا من سطح الكرة ذات نصف القطر R والمركز r_0 .

ر . فيما يخص جزء سطح الكرة، ونصف قطرها R . فإن كل المقاطع الناظمية تمثل دوائر متمركزة في مركز سطح الكرة ونصف قطرها R تتطابق إذن كل الانحناءات الناظمية لسطح الكرة، وهي تساوي انحناء الدائرة الكبيرة $1/R$ تمثل نفس الكيمة $1/R$ الانحناء المتوسط عند كل نقطة من سطح الكرة. أما الانحناء الكلي لسطح الكرة، بوصفه جداء n انحناء رئيسياً، فيساوي $1/R^n$. نشير الى ان الكميتين الاخيرتين ثابتتان على كل سطح الكرة.

س. دليله(*) دوبين (Dupin).

نرسم، في المستوى الماس Π ، على كل نصف مستقيم $\{du_j\}$ منطلق من النقطة A ومشكل الزوايا φ_j مع الاشعة $g_j(a)$ ، نرسم قطعة مستقيمة $\rho = \sqrt{R_N}$ (حيث يمثل $R_N = 1/|k_N|$ نصف قطر انحناء المقطع الناظمي الموافق لذلك). نحصل عندئذ على سطح معطى بالمعادلة:

$$\rho = \sqrt{R_N} = \frac{1}{\sqrt{|k_N|}} = \frac{1}{\sqrt{\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2 \varphi_j\right|}}$$

أي :

$$\left|\rho^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2 \varphi_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2\right| \equiv |B(u, du)| = 1,$$

$$B(u, du) = \pm 1.$$

يَسمح هذا السطح من الرتبة الثانية أو زوج من هذه السطوح (دليلة دوبين) بايجاد تفسير هندسي لإرتباط انحناءات المقاطع الناظمية لمنحنى الماس $\{du_j\}$ على المستوى Π . إذا كان $n = 2$ فإن دليلة دوبين تمثل قطعا ناقصا من اجل نقطة ناقصية، وتمثل زوجا من القطوع الزائدية من اجل نقطة زائدية وزوجا من المستقيمات المتوازية من اجل نقطة تكافئية مخالفة لنقطة مستعرضة.

إن المناحي (الاتجاهات) المقاربة في المستوى Π اي المناحي التي ينعدم وفقها الشكل التربيعي الثاني، توافق النقاط الواقعة في اللانهاية من دليلة دوبين. انها مناحي (اتجاهات) الخطوط المقاربة للدليلة، ومنه اتت تسمية هذه المناحي.

(*) يقال ايضا مخبرة.

52.5 . أ . لنبين كيف يتم حساب الانحناءات الرئيسية وايجاد المناحي (الاتجاهات) الرئيسية ضمن الاحداثيات الاولى $u_1, \ldots, u_n$. يمكن تفسير هذه المسألة على انها مسألة ردّ الشكل $G(u, du)$ الى مجموع مربعات الاحداثيات وردّ في نفس الوقت الشكل $B(u, du)$ الى شكله القانوني. ينص الجبر الخطي (ل 23.10) انه يجب لبلوغ ذلك اعتبار جملة المعادلات:

$$(1) \qquad \begin{cases} (b_{11} - \mu g_{11})\, du_1 + \ldots + (b_{1n} - \mu g_{1n})\, du_n = 0, \\ (b_{n1} - \mu g_{n1})\, du_1 + \ldots + (b_{nn} - \mu g_{nn})\, du_n = 0. \end{cases}$$

تقدم جذور المعادلة:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \mu g_{11} & \ldots & b_{1n} - \mu g_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} - \mu g_{n1} & \ldots & b_{nn} - \mu g_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

المعاملات القانونية لشكل $B(u, du)$ أي الاعداد $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ الواردة في 42.5 (2). إذا عوضنا μ بـ λ_j في (1) فإننا نحصل على جملة غير منعدمة $\{du_1^{(j)}, \ldots\ldots, du_n^{(j)}\}$ تمثل شعاع الاساس g_j الموافق لِـ λ_j (بتقدير عامل).

نعلم ان للمعادلة (2) n جذرا حقيقيا (كل جذر مضاعف n مرة يحسب ρ مرة)، وان الجملة (1) تقبل، من اجل جذر λ_1 مضاعف ρ مرة، ρ حلا كلها مستقلة خطياً. إذا كانت كل الجذور $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مختلفة فإن لدينا n اتجاها رئيسيا معرفة بشكل وحيد؛ وإن كان جذر كيفي، λ_j مثلا، له تضاعف ρ_1 اكبر من 1 فإننا نستطيع اختيار كجملة اتجاهات (منحاي) رئيسية اساسا كيفيا يضم ρ_1 شعاعا متعامدا في الفضاء الجزئي الموافق له ذي البعد ρ_1 .

ب . ليكن.

$$a_0\mu^n + a_1\mu^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(\mu - \lambda_1) \ldots (\mu - \lambda_n)$$

الفك الى عوامل لكثير الحدود الوارد في الطرف الايسر من (2). لدينا:

$$(-1)^n a_n = \lambda_1 \ldots \lambda_n a_0 = K a_0,$$

حيث يمثل K الانحناء الكلي للسطح P عند النقطة A (42.5 ـ ب).

نحصل على الحد الحر a_n لكثير الحدود (2) بوضع $\mu = 0$؛ نرى ان a_n مطابق لمعين الشكل التربيتي الثاني detB . نحصل على المعامل a_0 بتقسيم كثير الحدود (2) على μ^n ثم بالإنتقال الى النهاية بجعل $\mu \to \infty$. إذا قسمنا كل عمود على μ وانتقلنا الى النهاية، نجد ان a_0 مطابق للمعين detG الخاص بالشكل التربيعي الاول مسبوقا بالاشارة $(-1)^n$. وبالتالي، نصل الى الدستور التالي المتعلق بالانحناء الكلي K:

$$K = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} = \frac{\det B}{\det G} \tag{3}$$

62.5 . الحالة $n = 2$ ؛ امثلة. نتخذ الرموز التالية فيما يخص n=2:

$$r_{11} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} = r_{uu}, \quad r_{12} = \frac{\partial^2 r}{\partial u\, \partial v} = r_{uv}, \quad r_{22} = \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = r_{vv},$$

$$b_{11} = (r_{11}, m) = L, \quad b_{12} = (r_{12}, m) = M, \quad b_{22} = (r_{22}, m) = N,$$

بحيث ان

$$B(u, du) = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2. \tag{1}$$

تأخذ الجملة 52.5(1) الشكل:

$$\left.\begin{aligned} (L - \mu E)\, du + (M - \mu F)\, dv = 0, \\ (M - \mu F)\, du + (N - \mu G)\, dv = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

وتأخذ المعادلة 52.5(2) الشكل:

$$\begin{vmatrix} L - \mu E & M - \mu F \\ M - \mu F & N - \mu G \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

نحسب الشكل التربيعي الثاني باعتبار السطوح الواردة في 51.5 .

أ . من اجل المستوى $z = 0$ ، لدينا ضمن كل جملة احداثيات منحنية u, v: $(r_{uu}, m) = (r_{uv}, m) = (r_{vv}, m) = 0$ بحيث ان $L = M = 0 = N$، $B(u, du) \equiv 0$ إن انحناء كل مقطع ناظمي منعدم (راجع 42.5 ـ ج).

ب . درسنا في امثلة 61.5 ب ـ ص سطوحا دورانية. نتناول الآن سطحا دورانيا عاماً (51.5 ـ س). لدينا ضمن الاحداثيات z, φ :

$$r = \{ \rho (z) \cos \varphi, \ \rho (z) \sin \varphi, \ z \},$$
$$r_z = \{ \rho_z \cos \varphi, \ \rho_z \sin \varphi, \ 1 \}, \quad r_\varphi = \{ -\rho \sin \varphi, \ \rho \cos \varphi, \ 0 \},$$
$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \rho_z \cos \varphi & \rho_z \sin \varphi & 1 \\ -\rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = -\rho \{ \cos \varphi, \ \sin \varphi, \ -\rho_z \},$$
$$m = \frac{N}{|N|} = \frac{\{ -\cos \varphi, \ -\sin \varphi, \ \rho_z \}}{\sqrt{1+\rho_z^2}},$$
$$r_{zz} = \{ \rho_{zz} \cos \varphi, \ \rho_{zz} \sin \varphi, \ 0 \}, \quad r_{z\varphi} = \{ -\rho_z \sin \varphi, \ \rho_z \cos \varphi, \ 0 \},$$
$$r_{\varphi\varphi} = \{ -\rho \cos \varphi, \ -\rho \sin \varphi, \ 0 \},$$
$$L = (r_{zz}, \ m) = -\frac{\rho_{zz}}{\sqrt{1+\rho_z^2}},$$
$$M = (r_{z\varphi}, \ m) = 0,$$
$$N = (r_{\varphi\varphi}, \ m) = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho_z^2}},$$
$$B(u, du) = -\frac{\rho_{zz}}{\sqrt{1+\rho_z^2}} dz^2 + \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho_z^2}} d\varphi^2.$$

كما هو الحال فيما يخص الاحداثيات z, φ، فإن الشكل التربيعي الاول يمثل هو الآخر مجموعة مربعات (51.5 ـ س):

$$G(u, du) = (\rho_z^2 + 1) \, dz^2 + \rho^2 \, d\varphi^2,$$

إن مناحي خطوط الاحداثيات z, φ مناحي (اتجاهات) رئيسية ثم إن المقطع الناظمي المرسوم في اتجاه الخط φ=ثابتا هو بطبيعة الحال خط طول. اما المقطع الناظمي المرسوم في اتجاه خط العرض z =ثابتا يخالف عموما ذلك خط العرض، ويطابق منحنيا ثانيا لا يطابق خط العرض الا إذا كان الشعاع m، عند النقطة المعطاة، عموديا على محور العناصر z. يقع مركز انحناء خط العرض على محور العناصر z، اما مركز انحناء المقطع الناظمي فمسقطه على مستوى خط العرض هو، حسب نظرية موني (22.5 ـ ج)، مركز هذا خط العرض، وعليه يقع على محور الدوران (نظرية مونج Monge) انظر الرسم 2.5 ـ 3). تصبح المعادلة (3):

$$\left(-\frac{\rho_{zz}}{\sqrt{1+\rho_z^2}} - \mu (1+\rho_z^2) \right) \left(\frac{\rho}{\sqrt{1+\rho_z^2}} - \mu \rho^2 \right) = 0,$$

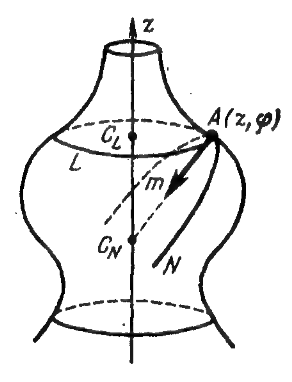
حيث

$$\mu_1 = -\frac{\rho_{zz}}{(1+\rho_z^2)^{3/2}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\rho (1+\rho_z^2)^{1/2}}. \tag{4}$$

وهكذا:

$$K = \mu_1\mu_2 = -\frac{\rho_{zz}}{\rho(1+\rho_z^2)^2}, \quad (5)$$

$$2H = \mu_1 + \mu_2 = \frac{-\rho\rho_{zz} + (1+\rho_z^2)}{\rho(1+\rho_z^2)^{3/2}}. \quad (6)$$



الرسم 5 .2 ـ 3

إن الانحناء الكلي K موجب في النقاط حيث $\rho_{zz} < 0$، اي في النقاط التي يكون فيها المنحنى $\rho = \rho(z)$ مقعرا نحو محور الدوران ويكون سالبا في النقاط حيث $\rho_{zz} > 0$ أي في النقاط التي يكون فيها المنحنى $\rho = \rho(z)$ محدبا نحو محور الدوران.

ج . ما هي السطوح الدورانية التي لها انحناءات كلية منعدمة؛ نستنتج من الدستور (5) $\rho_{zz} = 0$ ، ومنه يأتي $\rho = az + b$ ؛ إنها مخروط من اجل $a \neq 0$ واسطوانة من اجل $a = 0, b > 0$. إن مولدة السطح تمثل، في الحالتين، مقطعا ناظميا انحناؤه منعدم.

د . ما هي السطوح الدورانية التي لها انحناءات متوسطة منعدمة؟ علينا هنا حل المعادلة $\rho\rho_{zz} = 1 + \rho_z^2$. نجد بالتعويض: $\rho_z = u(\rho)$:

$$\rho_{zz} = u_z = u_\rho\rho_z = u_\rho u, \quad \rho u_\rho u = 1 + u^2,$$

إذن:

$$\frac{u\,du}{1+u^2} = \frac{d\rho}{\rho}.$$

نكامل المعادلة التفاضلية، المحصل عليها فنجد

$\ln\sqrt{1+u^2} = \ln\rho + \ln C$ ، ومنه يأتي $\sqrt{1+u^2} = C\rho$ ثم

$u = \rho_z = \sqrt{C^2\rho^2 - 1}$. بوضـــع $C\rho = \text{ch}\, t;\ C\,d\rho = \text{sh}\, t\, dt$

نجد $dt = C\,dz$ ؛ نكامل مرة اخرى فنجد $t = C(z - z_0)$ ، ومنه يأتي في الاخير :

$$\rho = \frac{1}{C}\,\text{ch}\, C(z - z_0).$$

يتبين ان الحل المطلوب كاتينويد (51.5 ـ ص).

ر . لنتناول ايضا مثال السطح اللولبي 51.5 ـ ط . لدينا ضمن الاحداثيات Q و P :

$$r_\rho = \{\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ 0\},\quad r_\varphi = \{-\rho\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi,\ k\},$$
$$ds^2 = d\rho^2 + (\rho^2 + k^2)\,d\varphi^2.$$

ومنه يأتي:

$$N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & k \end{vmatrix} = \{k\sin\varphi,\ -k\cos\varphi,\ \rho\},$$
$$m = \frac{N}{|N|} = \frac{\{k\sin\varphi,\ -k\cos\varphi,\ \rho\}}{\sqrt{k^2 + \rho^2}}.$$

ثم

$$r_{\rho\rho} = 0,\quad r_{\rho\varphi} = \{-\sin\varphi,\ \cos\varphi,\ 0\},\quad r_{\varphi\varphi} = \{-\rho\cos\varphi,\ -\rho\sin\varphi,\ 0\},$$
$$L = (r_{\rho\rho}, m) = 0,\quad M = (r_{\rho\varphi}, m) = -\frac{k}{\sqrt{k^2 + \rho^2}},\quad N = (r_{\varphi\varphi}, m) = 0.$$

يأخذ المعادلة (3) في حالة السطح اللولبي، الشكل:

$$\begin{vmatrix} -\mu & -\dfrac{k}{\sqrt{k^2 + \rho^2}} \\ -\dfrac{k}{\sqrt{k^2 + \rho^2}} & -\mu(\rho^2 + k^2) \end{vmatrix} = 0;$$

نحصل بحلها على:

$$\mu = \pm\frac{k}{\rho^2 + k^2}.$$

نرى إذن ان الانحناء المتوسط لسطح لولبي منعدم ايضا . تمثل دليلة (مخبرة) دوبين ثنـائيـة مـن القطـوع الزائـديـة المتسـاويـة الفـروع

$\xi_2^2 - \xi_1^2 = \pm \frac{\rho^2 + k^2}{k}$. إن انحناء القطع الناظمي في اتجاه نصف المستقيم المولد، منعدم بحيث ان هذا نصف المستقيم يمثل خطا مقاربا للدليلة؛ وبالتالي فإن المناحي الرئيسية عند كل نقطة من السطح اللولبي (التي لا تقع على محور العناصر z) تشكل زوايا مع منحي نصف المستقيم المولد تساوي 45°.

تجدر الملاحظة الى ان السطح اللولبي هو السطح المسوى (اي المحصل عليه بإزاحة مستقيم) الوحيد الذي له انحناء متوسط منعدم (انظر التمارين 8ـ10).

إن الانحناء الكلي للسطح اللولبي سالب:

$$K = \mu_1\mu_2 = -\frac{k^2}{(\rho^2 + k^2)^2}.$$

5 .72 . التفسير الهندسي للإنحناء المتوسط. يتضح من دستور اولر 5 .42(2) ان الانحناء k_N لكل مقطع ناظمي **N** للسطح **P** عند نقطة **A** معطى بالدستور:

$$k_N = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cos^2 \varphi_j.$$

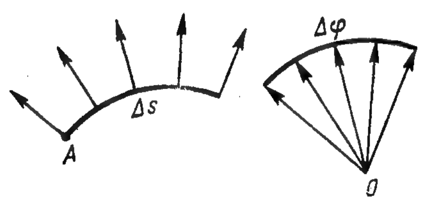
لنبحث عن المتوسط التكاملي لكل القيم k_N وفق كل مناحي المقاطع الناظمية في المستوى الماس Π عند النقطة **A**. يتبين بفضل التناظر ان القيمة المتوسطة للكميات $\cos^2 \varphi_j$ هي نفسها من اجل كل $j = 1$، 2، ...، n . لما كان $\sum_{j=1}^{n} \cos^2 \varphi_j \equiv 1$ فإن القيمة المتوسطة لكل تابع $\cos^2 \varphi_j$ يساوي بطبيعة الحال $1/n$. اخيرا، نرى أن المتوسط التكاملي للإنحناءات يساوي $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} k_j$ اي الانحناء المتوسط للسطح **P** عند النقطة **A**.

بصفة خاصة، فإن هناك مساواة بين اكبر الانحناءات الرئيسية واكبر الانحناءات الناظمية عند نقطة معطاة من اجل n=2، عندما يكون هناك انحناءان رئيسيان فقط، يمكن ان نميز احداهما على انه اكبر الانحناءات الناظمية ونميز الثاني على انه اصغرها. ويمكننا ايضا في حالة $n > 2$ تمييز

الانحناءات المتبقية بلغة القيم القصوى؛ راجع ل 10 . 42 .

82.5 . التفسير الهندسي للإنحناء الكلي. فيما يخص منحنيا مستويا، فإن الانحناء عند نقطة معطاة A يمكن تعريفه بمثابة سرعة دوران الشعاع الماس أو، والقولان متكافئان، سرعة دوران الشعاع الناظمي عند النقطة A . إن هذه الكمية مساوية لنهاية نسبة دوران الشعاع الناظمي على قوس صغير Δs يحوي النقطة A، على هذا القوس نفسه عندما يتقلص هذا الاخير نحو النقطة A . يمكن تعريف زاوية دوران الناظم، بدورها، على انها الطول $\Delta\varphi$ للقوس الموافق لها على الدائرة الواحدية (الرسم 2.5 ـ 4) المتمركزة في نقطة كيفيةO .

يُعمم هذا الانشاء الى حالة سطح ذي بعد n في الفضاء ذي البعد (n+1) بالكيفية التالية. لتكن ΔS ساحة صغيرة من السطح P تحوي النقطة A معينة بساحة صغيرة $\Delta G \subset R_n$ تتغير فيها الوسيطات. نعتبر عند كل نقطة $M \in \Delta S$ الشعاع الواحدي للناظم $m(M)$ ؛ وننقل كل منطلقات هذه الاشعة الى نقطة ثابتة O، ونرمز بـ $\Delta\Omega$ للساحة الواقعة على سطح الكرة الواحدية والمعينة بمواصل تلك الاشعة. تسمى هذه الساحة **التطبيق الكروي للساحة** ΔS . بقدر ما تتنوع مناحي الاشعة $m(M)$ عند النقاط $M \in \Delta S$ اي بقدر ما يكون السطح P منحنيا بجوار النقطة A بقدر ما تكبر هذه الساحة. عرّف غوس، في عهده (1828)، الانحناء $\varkappa(A)$ للسطح P (الثنائي البعد) عند النقطة A بمثابة نهاية نسبة المساحتين $|\Delta\Omega| / |\Delta S|$ لما $\Delta S \to A$



الرسم 2.5 ـ 4

لنحاول، من اجل كل n، ربط إنحناء غوس $\varkappa = \lim\limits_{\Delta S \to A} \frac{|\Delta \Omega|}{|\Delta S|}$ بمميزات إنحناء السطح P عند النقطة A، التي ادخلناها سابقا. نعلم (26.3 ـ ج) ان المساحة $|\Delta S|$ للجزء ΔS نكتب على النحو:

$$|\Delta S| = \int\limits_{\Delta G} |r'(u)|\, du = \int\limits_{\Delta G} |[r_1, \ldots, r_n]|\, du.$$

بما ان نصف القطر الشعاع للساحة $\Delta\Omega$ هو الشعاع $m(u)$، علما ان ΔG هي ساحة تغير الوسيطات $u = (u_1, \ldots, u_n)$، فإن المساحة $|\Delta\Omega|$ للساحة $\Delta\Omega$ تكتب على الشكل التالي المماثل للسابق:

$$|\Delta\Omega| = \int\limits_{\Delta G} |m'(u)|\, du = \int\limits_{\Delta G} |[m_1, \ldots, m_n]|\, du,$$

حيث $m_j = \frac{\partial m}{\partial u_j}$.

طبقا لتعريف غوس فإن:

$$\varkappa(A) = \lim_{\Delta S \to A} \frac{|\Delta\Omega|}{|\Delta S|} = \lim_{\Delta S \to A} \frac{\int\limits_{\Delta G} |[m_1, \ldots, m_n]|\, du}{\int\limits_{\Delta G} |[r_1, \ldots, r_n]|\, du} = \frac{|[m_1(A), \ldots, m_n(A)]|}{|[r_1(A), \ldots, r_n(A)]|}.$$

نحسب $[m_1(A), \ldots, m_n(A)]$ بما ان الشعاع m_j، بوصفه مشتق تابع واحدة، عمودي على m، نستطيع كتابة:

$$m_j = \sum_{k=1}^{n} b_j^k r_k.$$

باستخدام الخاصية الخطية للمعين الذي يعبّر عن الجداء الشعاعي (26.3 ـ ج) نجد:

$$[m_1, \ldots, m_n] = [\sum_{k_1} b_1^{k_1} r_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n} b_n^{k_n} r_{k_n}] =$$
$$= \sum_{k_1, \ldots, k_n} b_1^{k_1} \ldots b_n^{k_n} [r_{k_1}, \ldots, r_{k_n}] =$$
$$= \sum_{k_1 \ldots k_n} b_1^{k_1} \ldots b_n^{k_n} \varepsilon(k_1, \ldots, k_n) [r_1, \ldots, r_n] =$$
$$= \det \| b_j^k \| [r_1, \ldots, r_n].$$

الآن ان اشتقاق المتطابقة $(r_i, m) = 0$ يؤدي الى:

$$0 = (r_i, m)_j = (r_i, m_j) + (r_{ij}, m) = (r_i, \sum_{k=1}^{n} b_j^k r_k) + b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_j^k g_{ik} + b_{ij}.$$

وبالتالي:

$$(1) \qquad b_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} b_j^k g_{ik}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

يتبين من النظرية الخاصة بمعين جداء مصفوفات ان لدينا :

$$\det \| b_{ij} \| = (-1)^n \det \| b_j^k \| \det \| g_{ij} \|,$$

ومنه يأتي:

$$\frac{[m_1(A), \ldots, m_n(A)]}{[r_1(A), \ldots, r_n(A)]} = \det \| b_j^k \| = (-1)^n \frac{\det \| b_{ij} \|}{\det \| g_{ij} \|} = (-1)^n K(A),$$

وهذا بفضل 52.5 ـ ب. اخيرا نستنتج:

$$\varkappa(A) = | K(A) |,$$

ويتبين ان انحناء غوس لسطح P عند نقطة A يُساوي طويلة الانحناء الكلي للسطح P عند نفس النقطة A.

92.5 . خطوط الانحناء .

أ . إذا كانت الجذور $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ، في نقطة معطاة A من سطح P ، متخالفة مثنى مثنى فإنها تبقى كذلك في جوار للنقطة A (تتعلق جذور المعادلة باستمرار بمعاملات هذه المعادلة، 95.1 ـ ج)؛ وبالتالي تبقى المناحي الرئيسية معرفة بكيفية وحيدة بجوار النقطة A. وهكذا نرى؛ بجوار النقطة A ، ان هناك n حقلا من المناحي المتعامدة فيما بينها. عند تثبيت جذر $\mu = \lambda_j$ ، فإن الجملة 52.5(1) تمثل جملة معادلات تفاضلية للحقل ذي الرتبة j. تسمى المنحنيات التكاملية للحقل الاخير **خطوط الانحناء الموافقة للجذر** λ_j . تشكل خطوط الانحناء n جماعة متعامدة فيما بينها. ينتج عن 46.2 ، من اجل n=2 ، انه من الممكن الانتقال؛ بجوار النقطة A على السطح P ، الى جملة احداثيات جديدة u, v تصبح ضمنها خطوط الانحناء خطوطا احداثية. يأخذ الشكلان التربيعيان الاول والثاني، ضمن هذه الجملة، شكليهما القانونيين وذلك بجوار للنقطة A :

$$G = \tilde{g}_{11}(u, v)\, du^2 + \tilde{g}_{22}(u, v)\, dv^2,$$
$$B = \tilde{b}_{11}(u, v)\, du^2 + \tilde{b}_{22}(u, v)\, dv^2.$$

إذا كان $n > 2$ فإن رد الشكلين G وB، في آن واحد، الى الشكل القانوني في جوار للنقطة A ليس ممكنا عموما.

ب. مثال. كنا رأينا بخصوص سطح دوراني (62.5 ـ ب) ان المناحي الرئيسية هي مناحي خط طول وخط عرض؛ وبالتالي فإن شبكة خطوط العرض والطول هي شبكة خطوط الانحناء. اما في رؤوس السطح اي في نقاط تقاطع هذا السطح مع محور الدوران فإن لهذه الشبكة شواذا اي انها تكف عن ان تكون شبكة خطوط احداثية، إذا ما بقي السطح قابلا للإشتقاق في مثل تلك النقاط (كما هو الحال مثلا في المجسم الناقصي الدوراني) فإن الانحناءين الرئيسيين يتطابقان في تلك النقاط.

§ 3.5 . العلاقات بين الشكلين التربيعيين الاول والثاني

13.5 . دساتير اشتقاق غوس وفينغارتن (Weingarten). تصف الدساتير السالفة الذكر تغيّر الاشعة r_j و m عندما تتحرك النقطة على السطح، شأنها في ذلك كشأن دساتير فريني Frénet (ي 72.16) التي تصف تغيّر اشعة الاساس الطبيعي الناجم عن تحرك نقطة من منحن.

لدينا:

$$r_{ij}(A) \equiv \frac{\partial r_i(A)}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(A)\, r_k(A) + \beta_{ij}(A)\, m(A) \tag{1}$$

(حيث $i, j = 1, \ldots, n$)

$$m_j(A) \equiv \frac{\partial m(A)}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{n} b_j^k(A)\, r_k(A) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

حيث يمثل $\Gamma_{ij}^{k}(A), \beta_{ij}(A), b_j^k(A)$ معاملات معينة. الواقع ان كل هذه المعاملات تكتب بدلالة معاملات الشكلين التربيعين الاول والثاني للسطح عند النقطة A، وكذا بدلالة مشتقاتها. كنا رأينا المعاملات b_j^k ضمن 82.5، انها تحقق جملة المعادلات 82.5(1):

$$b_{ij} = -\sum_{k=1}^{n} b_j^k g_{ik}. \tag{3}$$

لحل هذه الجملة، نَستعمل المصفوفة $\| g^{is} \|$ التي تمثل مقلوب المصفوفة $\| g_{ij} \|$.

نضرب (3) في g^{is} ونجمع على i، بما ان:

$$\sum_{i=1}^{n} g_{ik} g^{is} = \begin{cases} 1 \text{ pour } k = s, \\ 0 \text{ pour } k \neq s, \end{cases} \tag{4}$$

فإن جمع لنتيجة المحصل عليها وفق k لا تعطي سوى الحد الموافق للقيمة k=s، ونجد:

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij} g^{is} = -b_j^s. \tag{5}$$

وهكذا تكتب المعاملات b_j^s بدلالة معاملات الشكلين الاول والثاني.

من السهل ايجاد المعاملات β_{ij} الواردة في المساوة (1) بضربها سلميا في m:

$$(r_{ij}, m) = b_{ij} = \beta_{ij}(m, m) = \beta_{ij}. \tag{6}$$

وهكذا تتطابق الكميات β_{ij} مع المعاملات الموالية b_{ij} الواردة في الشكل التربيعي الثاني.

اما فيما يخص المعاملات Γ_{ij}^{k} فالامر اكثر تعقيدا. نضرب سلميا (1) في r_s فنحصل على:

$$\Gamma_{ij,s} \equiv (r_{ij}, r_s) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} (r_k, r_s) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} g_{ks}. \tag{7}$$

ويُعطى اشتقاق المساواة $(r_i, r_s) = g_{is}$ بالنسبة لِـ u_j، العلاقة:

$$(r_{ij}, r_s) + (r_i, r_{sj}) = \frac{\partial g_{is}}{\partial u_j}. \tag{8}$$

نحصل، عند اجراء تغيير دوري للدليلات، على التوالي على:

$$(r_{js}, r_i) + (r_j, r_{is}) = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u_s} \tag{9}$$

$$(r_{si}, r_j) + (r_s, r_{ji}) = \frac{\partial g_{sj}}{\partial u_i}. \tag{10}$$

نجمع (8) و (10) ثم نطرح (9) فيأتي:

$$\Gamma_{ij,s} = (r_{ij}, r_s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s} \right). \tag{11}$$

حتى نحل المعادلات (7) بالنسبة للكميات Γ_{ij}^{k} ، نعوض في (7) دليل الجمع k بـ p ونضرب (7) في g^{ks} ثم نجمع على الدليل s. بمراعاة (4) نحصل على:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{s=1}^{n}\Gamma_{ij,s}g^{ks}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{js}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s}\right)g^{ks}. \quad (12)$$

وهكذا نكتب المعاملات Γ_{ij}^{k} s بدلالة معاملات الشكل التربيعي الاول ومشتقاته فقط. إن هذا امر هام إذ يبين بأن المعاملات Γ_{ij}^{k}, تنتمي، خلافا للمعاملات β_{ij} و b_j^k ، الى الهندسة المميزة للسطح.

تسمى المعاملات $\Gamma_{ij,s}$ **رموز كريستوفال (Christoffel) من النمط الاول** وتسمى المعاملات Γ_{ij}^{k} **رموز كريستوفال من النمط الثاني**. تسمى كل تلك المعاملات **معاملات الربط** إذ انها تربط بين المميزات الهندسية للسطح في نقاط متجاورة وهذا بواسطة معادلات تفاضلية، ذلك ما سنراه مستقبلا. إن المعاملات $\Gamma_{ij,s}$ ، وكذا الامر فيما يخص Γ_{ij}^{k} ، متناظرة بالنسبة للدليلين i و j؛ ذلك ما ينتج من المساواة $r_{ij}=r_{ji}$ بخصوص الكميات $\Gamma_{ij,s}=(r_{ij},r_s)$ اما فيما يخص Γ_{ij}^{k}, فيأتي التناظر من تناظر $\Gamma_{ij,s}$ ومن المعادلة (12).

تسمى الدساتير (1) بالقيم المذكورة لِـ Γ_{ij}^{k} و β_{ij} **دساتير غوس** وتسمى الدساتير (2) بالقيم المذكورة للمعاملات b_j^k **دساتير فينغارتن**.

23. 5 . العلاقات بين معاملات الشكلين التربيعيين الاول والثاني. إن معاملات الشكلين التربيعيين الاول والثاني ليست مستقلة، تنتج العلاقات الموجودة بينها من المساواة بين المشتقات المختلطة العالية للاشعة $r(u)$ و $m(u)$ (بإفتراض وجودها واستمرارها) ومن دساتير اشتقاق غوس وفينغارتن. بالفعل فإن:

$$r_{ikj}\equiv\frac{\partial r_{ik}}{\partial u_j}=\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\sum_{s=1}^{n}\Gamma_{ik}^{s}r_s+\beta_{ik}m\right), \quad (1)$$

$$r_{jki}\equiv\frac{\partial r_{jk}}{\partial u_i}=\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sum_{s=1}^{n}\Gamma_{jk}^{s}r_s+\beta_{jk}m\right). \quad (2)$$

بما أن الطرفين الاولين متطابقان، فإن:

$$(3)\quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{ik}^{s}}{\partial u_j} r_s + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ik}^{p} r_{jp} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_j} m + \beta_{ik} m_j = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{jk}^{s}}{\partial u_i} r_s + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{jk}^{p} r_{ip} + \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial u_i} m + \beta_{jk} m_i.$$

ننقل للمساواة الاخيرة الكميات r_{jp}, r_{ip} et m_j, m_i الواردة في دساتير غوس وفينغارتن فنحصل على:

$$(4)\quad \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{ik}^{s}}{\partial u_j} r_s + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ik}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma_{jp}^{s} r_s + \beta_{jp} m \right) + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_j} m + \beta_{ik} \sum_{s=1}^{n} b_j^s r_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \Gamma_{jk}^{s}}{\partial u_i} r_s + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{jk}^{p} \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma_{ip}^{s} r_s + \beta_{ip} m \right) + \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial u_i} m + \beta_{jk} \sum_{s=1}^{n} b_i^s r_s.$$

بما أن الاشعة r_s و m مستقلة خطيا، فإن (4) تستلزم المساواة التالية من اجل كل مركبة:

$$(5)\quad \frac{\partial \Gamma_{ik}^{s}}{\partial u_j} + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{jp}^{s} + \beta_{ik} b_j^s = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{s}}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{jk}^{p} \Gamma_{ip}^{s} + \beta_{jk} b_i^s$$

(دستور غوس)

$$(6)\quad \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{ik}^{p} \beta_{jp} + \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_j} = \sum_{p=1}^{n} \Gamma_{jk}^{p} \beta_{ip} + \frac{\partial \beta_{jk}}{\partial u_i}$$

(دستور بيترسون ـ كودازي Peterson - Codazzi)

يمكن كتابة الدستور (5) على الشكل:

$$\beta_{jk} b_i^s - \beta_{ik} b_j^s = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{s}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{s}}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n} (\Gamma_{ik}^{p} \Gamma_{jp}^{s} - \Gamma_{jk}^{p} \Gamma_{ip}^{s}).$$

نضرب مرة اخرى في g_{si} ثم نجمع على الدليل s. حينئذ، عندما نرمز بـ:

$$\sum_s b_i^s g_{sl} = c_{il},$$

فإننا نحصل على:

$$(7) \qquad \beta_{jk}c_{il} - \beta_{ik}c_{jl} = \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n} (\Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^s - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^s) \right] g_{sl}.$$

ننقل الى هذا الدستور القيم $\beta_{jk}\,(\beta_{ik})$ و $c_{il}\,(c_{jl})$ الموجودة في 13.5 (3) و(6):

$$\beta_{jk} = b_{jk}, \quad c_{il} = \sum_{s=1}^{n} b_i^s g_{sl} = -b_{il}.$$

نرمز ايضا بـ $B_{ij,\,kl} = b_{ik}b_{jl} - b_{jk}b_{il}$ ، فنصل الى الدستور:

$$(8) \qquad B_{ij,\,kl} = \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \Gamma_{ik}^s}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial u_i} + \sum_{p=1}^{n} (\Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^s - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^s) \right] g_{sl}$$

الذي ينسب هو الآخر الى غوس.

تمثل العبارة $B_{ij,\,kl} = b_{ik}b_{jk} - b_{jk}b_{il}$ الصغري من الرتبة الثانية للمصفوفة المتناظرة $B = \| b_{ik} \|$ المنشأ على السطور i و j والاعمدة k و l.

نرى في الطرف الثاني من (8) عبارة لا تتعلق الّا بمعاملات الشكل الاول ومشتقاته (13.5). وهكذا فإن كل الاصغريات من الرتبة الثانية لمصفوفة الشكل التربيعي الثاني معينة بطريقة وحيدة بالشكل التربيعي الاول. وبالعكس، تؤدي العلاقتان (8) و (6) الى العلاقتين (4) و (3) ومنه تأتي مساواة الطرفين الاولين لـ(1) و (2).

تؤدي المساواة $m_{ij} \equiv \frac{\partial^2 m}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 m}{\partial u_j \partial u_i} = m_{ji}$ هي الاخرى الى علاقتين بين الكميات g_{ij} و b_{ij} . لدينا:

$$\frac{\partial^2 m(u)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial m_i}{\partial u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} \sum_{s=1}^{n} b_i^s r_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b_i^s}{\partial u_j} r_s + \sum_{s=1}^{n} b_i^s r_{sj} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial b_i^s}{\partial u_j} r_s + \sum_{p=1}^{n} b_i^p \left(\sum_{s=1}^{n} \Gamma_{pj}^s r_s + \beta_{pj} m \right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial b_i^s}{\partial u_j} + \sum_{p=1}^{n} b_i^p \Gamma_{pj}^s \right) r_s + \sum_{p=1}^{n} b_i^p \beta_{pj} m.$$

نحصل، عند تبديل i و j فيما بينهما وكتابة مساواة مركبات العبارات المحصل عليها، على العلاقات:

$$\frac{\partial b_i^s}{\partial u_j}+\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{pj}^s=\frac{\partial b_j^s}{\partial u_i}+\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{pi}^s, \tag{9}$$

$$\sum_{p=1}^{n} b_i^p\beta_{pj}=\sum_{p=1}^{n} b_j^p\beta_{pi}. \tag{10}$$

الواقع ان هاتين العلاقتين غير جديدتين، ويمكن استنتاجهما جبريا من العلاقات المثبتة سابقا. للحصول على العلاقة (9) ننطلق من المساواة 13.5 (8):

$$\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_j}=\Gamma_{jk,\,q}+\Gamma_{jq,\,k}$$

التي تؤدي الى

$$\sum_{k=1}^{n} b_i^k\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_j}-\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{pj,\,q}=\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{qj,\,p},$$

او، بتبديل الدليلين i و j، الى:

$$\sum_{k=1}^{n} b_j^k\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_i}-\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{pi,\,q}=\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{qi,\,p}.$$

كما يمكن كتابة دستور بيترسون ـ كودازي (6) كما يلي:

$$\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{jq,\,p}+\frac{\partial b_{iq}}{\partial u_j}=\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{iq,\,p}+\frac{\partial b_{jq}}{\partial u_i} \tag{11}$$

ومنه يأتي:

$$\sum_{k=1}^{n} b_i^k\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_j}-\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{pj,\,q}+\frac{\partial b_{iq}}{\partial u_j}=\sum_{k=1}^{n} b_j^k\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_i}-\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{pi,\,q}+\frac{\partial b_{jq}}{\partial u_i}.$$

من جهة اخرى تؤدي المساواة 13.5 (3)

$$b_{lq}=-\sum_{k=1}^{n} b_l^k g_{kq}$$

الى الدستور:

$$\frac{\partial b_{lq}}{\partial u_m}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_l^k}{\partial u_m}g_{kq}-\sum_{k=1}^{n} b_l^k\frac{\partial g_{kq}}{\partial u_m}$$

الذي يسمح بكتابة المساواة (11) على الشكل:

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_i^k}{\partial u_j}g_{kq}-\sum_{p=1}^{n} b_i^p\Gamma_{pj,\,q}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_j^k}{\partial u_i}g_{kq}-\sum_{p=1}^{n} b_j^p\Gamma_{pi,\,q}$$

نضرب هذه المساواة في $-g^{sq}$ ونجمع على q فنصل الى المساواة (9).

لإثبات العلاقة (10) يكفي أن ننقل لها العبارات 13.5 (5) و (6):

$$b_i^p = -\sum_{k=1}^{n} b_{ik} g^{kp}, \quad \beta_{pj} = b_{pj}$$

فتأخذ هذه المساواة بعد ذلك الشكل:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} b_{ik} g^{kp} b_{pj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} b_{jk} g^{kp} b_{pi} \tag{12}$$

تعبّر العلاقة (12) بطبيعة الحال عن تناظر المصفوفة $BG^{-1}B$ ؛ وهذا ناتج مباشرة من تناظر المصفوفتين B و G.

33.5 . نشير الى ان الشكل التربيعي الثاني ليس معينا، في الحالة العامة، بطريقة وحيدة بدلالة الشكل التربيعي الاول: على سبيل نجد فيما يخص المستوى والاسطوانة ان الشكلين التربيعيين الاولين متطابقان (في جمل احداثيات معينة) اما الشكلان الثانيان فهما مختلفان (الشكل الثاني للمستوى منعدم، وهو ليس منعدما في الاسطوانة).

رغم ذلك، تسمح النظريات المثبتة بإستنتاج معلومات حول الشكل الثاني من الشكل الاول.

أ. نعتبر في البداية الحالة $n=2$ حيث ان الشكلين معطيان بمصفوفتين من الرتبة الثانية. طبقا لدستور غوس، نجد معين الشكل التربيعي الثاني انطلاقا من الشكل الاول:

$$\det B = B_{12,12} = \sum_{s=1}^{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial u_1} + \sum_{p=1}^{2} \left(\Gamma_{11}^p \Gamma_{2p}^s - \Gamma_{21}^p \Gamma_{1p}^s \right) \right] g_{s2} \tag{1}$$

نجد، عند معرفة $\det B$، الانحناء الكلي للسطح حسب 52.5 (3):

$$K = \frac{\det B}{\det G} = \frac{\sum_{s=1}^{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{11}^s}{\partial u_2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^s}{\partial u_1} + \sum_{p=1}^{2} \left(\Gamma_{11}^p \Gamma_{2p}^s - \Gamma_{21}^p \Gamma_{1p}^s \right) \right] g_{s2}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \tag{2}$$

وهكذا، فإن الانحناء الكلي لسطح ثنائي البعد يمكن ان يعين بطريقة وحيدة انطلاقا من الشكل التربيعي الاول وحده. ينتج عن ذلك ان الانحناء الكلي عند نقطة معطاة على سطح ثنائي البعد لا يتغير لدى القيام بتحويل ايزومتري للسطح (نظرية غوس).

ب. ينتج مباشرة من نظرية غوس انه يستحيل القيام بتحويل ايزو متري

لجزء من المستوى ($k=0$) الى جزء من الكرة ($0<k$) أو الى جزء من الكاتينويد ($K < 0$)

ج. إذا اعتبرنا سطحا ثنائي البعد $P = P_2$ مزوداً بمسافة غير مأخوذة عن الفضاء الاقليدي R_3 الذي يحوي هذا السطح، بل معطاة بشكل مستقل (مثلا، يمكن من اجل سطح P_2 يقع في R_n مع $3<n$، اختيار المسافة المستنتجة عن هذا الفضاء R_n) فإن كل النظرية

الخاصة بانحناء الخطوط على P_2 (2.5§) لا تقوم، إذ لا وجود للشكل التربيعي الثاني. على الرغم من ذلك فبمقدورنا حساب الكمية k حسب الدستور (2) نسمي هذه الكمية «**الانحناء الكلي الشكلي**»، انها تنتمي الى الهندسة المميزة للسطح. بطبيعة الحال فإن مسألة ايجاد تفسير هندسي للإنحناء الكلي الشكلي، مسألة مطروحة. بما ان الاعتبارات المتعلقة بالناظمات على السطح مستحيلة في هذه الحالة، فإننا لا نستطيع تفسير الكمية k بواسطة تطبيق كروي (82.5) ولا بواسطة جداء الانحناءات الكلية بسبب فقداننا لتلك الانحناءات الكلية. الا اننا نستطيع اعطاء معني هندسي للكمية k، سنكشف ذلك ضمن 36.5.

د. هب الآن أن $2<n$. نفرض ان احد الاصغريات ذات الرتبة الثانية للمصفوفة B، مثلا معين المصفوفة:

$$B_3 = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{matrix} \right\|,$$

غير منعدم. نؤكد في هذه الحالة، ان كل العناصر b_{11}، b_{12}، ...، b_{33} تعيّن بالشكل G بشكل وحيد بتقدير اشارة (مشتركة لكافة العناصر) بالفعل، نعلم بفضل نظرية غوس كل المتممات الجبرية B_{11}، B_{12}، ...، B_{33} للعناصر المتوالية b_{11}، b_{12}، ...، b_{33}. بما ان

هذه المتممات الجبرية تعطي عند قسمتها على معين B_3 ، عناصر المصفوفة المقلوبة B_3^{-1} ، يمكننا تطبيق النظرية الخاصة بجداء المعينات على المساواة:

$$B_3 B_3^{-1} = E_3$$

وايجاد:

$$\det B_3 \det \| B_{jk} \| (\det B_3)^{-3} = 1 \quad (j,\ k = 1,\ 2,\ 3),$$

ومنه يأتي:

$$(\det B_3)^2 = \det \| B_{jk} \|,$$

وبذلك نعلم $\det B_3$ بتقدير اشارة. غير أن $\det B_3$ والاعداد B_{jk} تعين المصفوفة B_3^{-1} ، وبالتالي المصفوفة B_3.

يمكن في الحالة المعتبرة، بدون المساس بعمومية المسألة، افتراض ان المصفوفة

$$B_2 = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}$$

غير منحلة أيضا وان $b_{11} \neq 0$ ، نثبّت اشارة العنصر b_{11} ، حينئذ تثبّت كل اشارات العناصر الاخرى للمصفوفة B_3 بصفة آلية. نعتبر المصفوفة:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2k} \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{jk} \end{Vmatrix}$$

حيث j و k دليلان كيفيان. إذا لم تكن المصفوفة منحلة، فإن هذه العناصر معينة أيضا بشكل وحيد (اختيار الاشارة هذه المرة مثبت باشارة b_{11}) وإذا كانت منحلة أي إن كان معينها منعدم، فإن سطرها الثالث يمثل عبارة خطية لسطريها الاول والثاني (لأن $\det B_2 \neq 0$)، وتكتب معاملات العبارة الخطية حسب دساتير كرامر (Cramer) بدلالة الاصغريات ذات الرتبة الثانية، إذن فإن هذه المعاملات، وبالتالي العنصرين الاولين من السطر الثالث، معلومة. عندما نطبق استدلالا مماثلا

على الاعمدة ونستعمل العناصر المعروفة من العمودين الاولين، نجد كل العناصر الثلاثة للعمود الثالث. نرى إذن إن كان هناك أصغري غير منعدم من الرتبة الثالثة، فإن المصفوفة B تتعين بطريقة وحيدة، بتقدير اشارة، انطلاقا من المصفوفة $G(u)$

ر. يمكن صياغة النتيجة د بطريقة اخرى وهي: يمكن استعادة المصفوفة B انطلاقا من المصفوفة $G(u)$ بكيفية وحيدة، بتقدير اشارة، وذلك عندما يكون هناك في النقطة المعطاة من السطح P ثلاثة انحناءات رئيسية غير منعدمة، على الاقل. عندئذ نلاحظ، باعتبار أساس قانوني مشكل من الاشعة الرئيسية $g_1, \ldots, g_n$ (42.5 ـ أ)، ان الاصغري الرئيسي (الموافق لذلك) من الرتبة الثالثة للمصفوفة B غير منعدم، وعليه تكون مرتبة المصفوفة مساوية لِ 3 على الاقل، يبقى فقط تطبيق النتيجة د.

43.5 . إنشاء سطح انطلاقا من شكليْة التربيعيين الاول والثاني.

نظرية (بوني Bonnet) ليكن $G=\| g_{ij}(u) \|, B=\| b_{ij}(u) \|$ تابعين مصفوفيين $(n\times n)$ معطيين في ساحة $V\subset R_n$، يقبلان فيها الاشتقاق باستمرار حتى الرتبة الثالثة. نفرض ان المصفوفة $G(u)$ معرفة موجبة وان المصفوفة $B(u)$ مرتبطة بـ$G(u)$ بدساتير غوس 23.5(8) وبيترسون ـ كودازي 23.5(6). عندئذ نستطيع من اجل كل نقطة $u^0\in V$، ايجاد جوار $U=U(u^0)\subset V$ نعرّف فيه تابعا شعاعيا $r=r(u)$ بحيث تمثل المصفوفتان $G(u)$ و$B(u)$، من اجل السطح الموافق $P=\{r\in R_{n+1}:\ r=r(u),\ u\in U\}$، مصفوفتي الشكلين التربيعيين الاول والثاني على التوالي (31.5 و22.5) إن السطح P معرف بتقدير الموقع في الفضاء وبعبارة اخرى يمكن جعل سطحين $r=r^{(1)}(u)$ و $r=r^{(2)}(u)$ يحققان فروض النظرية، متطابقين في جوار للنقطة u^0 على الاقل وذلك بواسطة تحويل متعامد في الفضاء R_{n+1} .

البرهان. نكتب جملة معادلات تفاضلية من اجل التوابع الشعاعية المجهولة $r_1(u), \ldots, r_n(u), m(u)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial r_i(u)}{\partial u_j} &= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u)\, r_k(u) + b_{ij}(u)\, m(u), \\ \frac{\partial m(u)}{\partial u_j} &= \sum_{k=1}^{n} b_j^k(u)\, r_k(u), \end{aligned} \right. \tag{1}$$

حيث تمثل المعاملات $b_{ij}(u)$ العناصر المعطاة من المصفوفة B وتستنتج $b_j^k(u)$ و $\Gamma_{ij}^k(u)$ من عناصر المصفوفتين G وB حسب القواعد المشار اليها في 13.5 .

نطبق على هذه الجملة نظرية فروبينيوس (55.2) إن الشروط التي تتطلبها هذه النظرية متوفرة هنا، إنها تطابق شروط غوس وبيترسون كودازي، مع الملاحظة اننا نحصل على هذه الاخيرة بجعل المشتقات المختلطة متساوية. تقبل الجملة (1) بفضل نظرية فروبينيوس، حلا وحيدا من اجل كل جملة معطيات أولية r_i^0 و m^0. نختار بشكل كيفي نقطة $u^0 \in V$ ونبحث عن n شعاعا $r_i^0 \in R_{n+1}$ تحقق الشروط:

$$(r_i^0, r_j^0) = g_{ij}(u^0) \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

يمكن ايجاد مثل هذه الاشعة r_i^0 $(i = 1,\ldots,n)$ على المستوي ذي البعد n نفسه $R_n = \{x \in R_{n+1}: x_{n+1} = 0\}$. بالفعل، فإن المصفوفة $\| g_{ij}(u^0) \|$ معرفة موجبة ومتناظرة؛ يمكننا إذن استخراج منها جذر مربع، أي مصفوفة $\| \xi_{ij} \|$ من النوع (n×n) بحيث يكون $\| \xi_{ij} \|^2 = \| g_{ij}(u^0) \|$ (*). نرى الآن انه بالامكان اختيار الاشعة المطلوبة r_i^0 (i=1, ..., n) سطور المصفوفة $\| \xi_{ij} \|$ المتممة بالصفر في الاحداثية ذات الرتبة (n+1) أي:

(*) ترد المصفوفة $\| g_{ij}(u^0) \|$ ضمن الاساس المتعامد المتجانس للأشعة الذاتية $e_1, \ldots, e_n$ الى الشكل القطري، اما عناصر القطر فهي الاعداد الموجبة $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. يمكن اختيار، كمصفوفة $\| \xi_{ij} \|$، المصفوفة التي لها ضمن نفس الاساس الشكل القطري بالعناصر القطرية: $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$.

$$r_i^0 = (\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}, 0).$$

بعد تعيين الاشعة الاولى $r_1^0, \ldots, r_n^0$ نضع

$m^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in R_{n+1}$ ليكـــن $r_i(u)$ ($i=1,\ldots,n$) ، $m(u)$

($u \in U \subset V$) حل الجملة (1)، من اجل الشروط الابتدائية المشار إليها

المعرف في جوار U_1 للنقطة u^0 ينتج عن تناظر المعاملات $\Gamma_{ij}^k(u)$

و $b_{ij}(u)$ بالنسبة للدليلين i و j ان $\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \frac{\partial r_j}{\partial u_i}$ ؛ يعني ذلك

بدوره، بفضل 65.2، انه يوجد في جوار $U \subset U_1$ للنقطة u^0 ، تابع

شعاعي $r = r(u) = r(u_1, \ldots, u_n)$ يكون من اجله:

$$\frac{\partial r(u)}{\partial u_i} = r_i(u_1, \ldots, u_n), \tag{3}$$

ويمكننا وضع $r(u^0) = 0$. نؤكد على أن السطح P المعرف بالمعادلة

$r=r(u)$ سطح من السطوح المطلوبة. لإثبات ذلك، يجب البرهان على ان

مصفوفتي الشكلين التربيعيين الاول والثاني للسطح P يطابقان المصفوفتين

$G(u)$ و $B(u)$ على التوالي. نستنتج من المعادلات (1):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial (r_i, r_s)}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j}, r_s\right) + \left(r_i, \frac{\partial r_s}{\partial u_j}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\Gamma_{ij}^k (r_k, r_s) + \Gamma_{sj}^k (r_i, r_k)] + b_{ij}(m, r_s) + b_{sj}(m, r_i), \\
&\frac{\partial (r_i, m)}{\partial u_j} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j}, m\right) + \left(r_i, \frac{\partial m}{\partial u_j}\right) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k (r_k, m) + b_{ij}(m, m) + \sum_{k=1}^{n} b_j^k (r_i, r_k), \\
&\frac{\partial (m, m)}{\partial u_j} = 2\left(\frac{\partial m}{\partial u_j}, m\right) = 2\sum_{k=1}^{n} b_j^k (m, r_k).
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

لنعتبر هذه العلاقات كجملة معـادلات تفـاضليـة بـالنسبـة للتـوابـع

$(r_i, r_s), (r_i, m), (m, m)$ ، (حيث $i, s = 1, \ldots, n$) تقبل الجملة

(4) الحل:

$$(r_i, r_s) \equiv g_{is}(u), \quad (r_i, m) \equiv 0, \quad (m, m) \equiv 1. \tag{5}$$

لدينا بالفعل حسب 13.5 (7) و 13.5 (8):

$$\sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{ij}^{k} g_{ks} + \Gamma_{sj}^{k} g_{ki}) = \Gamma_{ij,\,s} + \Gamma_{sj,\,i} = \frac{\partial g_{is}}{\partial u_j},$$

بحيث ان أولى المعادلات (4) محققة بالتوابع (5) ثم إن الامر كذلك فيما يخص المعادلة الثانية بفضل تعريف b_j^k (13.5(5))، ويتأكد ذلك بداهة من اجل المعادلة الثالثة. نلاحظ ان التوابع (5) تحقق الشروط الابتدائية $(r_i^0, r_j^0) = g_{is}(u^0), \; (r_i^0, m^0) = 0, \; (m^0, m^0) = 1 \; (m, m) \equiv 1$.

بالنظر الى نظرية الوحدانية 25.2، فإن ، $(r_i, r_s) \equiv g_{is}(u), \; (r_i, m) \equiv 0$ في كل النقاط u لجوار للنقطة u^0.

وهكذا، فإن (G(u)du,du) تمثل الشكل التربيعي الاول للسطح P ويمثل (m(u شعاعه الواحدي الناظمي ثم إن المعامل (r_{ij}, m) للشكل التربيعي الثاني يستنتج الآن من المعادلة الاولى (1):

$$(r_{ij}, m) = \left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j}, \; m\right) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u)\,(r_k, m) + b_{ij}(u)\,(m, m) = b_{ij}(u),$$

وبذلك نرى ان الشكل (Bdu,du) مطابق للشكل التربيعي الثاني للسطح P. وهكذا نكون قد أثبتنا وجود سطح من السطوح المطلوبة، بقي علينا البرهان على وحدانيته بتقدير موقعه في الفضاء.

سينتج ذلك من وحدانية حل الجملة (1) التي تحقق بواسطة الأشعة r_i و m (من اجل كل من السطحين (P(1 و(P(2) نفس المصفوفتين المعطاتين G وB وهذا إذا ثبتنا زيادة على المعاملات Γ_{ij}^{k}، b_{ij}، b_i^h القيم الابتدائية r_i^0 و m^0. نفرض ان الاشكال التربيعية للسطحين

$$P^{(1)} = \{r = r^{(1)}(u)\} \text{ et } P^{(2)} = \{r = r^{(2)}(u)\}$$

متساوية على التوالي، ونقوم بانسحاب وتحويل متعامد في الفضاء R_{n+1} بحيث تتطابق $r^{0(1)}$ و $r^{0(2)}$، من اجل u^0 معطى، وتتطابق أيضا الاشعة $r_i^{0(1)}, m^{0(1)}$ مع الاشعة $r_i^{0(2)}, m^{0(2)}$ على التوالي، عندئذ تتساوى المعطيات الابتدائية لحلول الجملة (3): $m^{(1)}$، $r_i^{(1)}$ و $m^{(2)}$، $r_i^{(2)}$، وهو ما يسمح بتطبيق نظرية الوحدانية. نرى إذن بأن الاشعة $r_i^{(1)}(u)$ و $r_i^{(2)}(u)$، كما هو الامر فيما يخص $m^{(1)}(u)$ و $m^{(2)}(u)$، متطابقة من اجل كل قيم u المنتمية لجوار النقطة u^0. يتطابق في هذه الحالة $r^{(1)}(u)$ و $r^{(2)}(u)$ في نفس الجوار، علما ان القيمة الابتدائية $r^{0(1)} = r^{0(2)}$ مثبتة. في الختام، نرى انه يمكن مطابقة جملتين من الاشعة $r_i^{(1)}$ و $r_i^{(2)}$ التي تشترك في قيم الجداءات السلمية $(r_i^{(1)}, r_j^{(1)}) = (r_i^{(2)}, r_j^{(2)})$، وذلك بواسطة تحويل متعامد(*). انتهى برهان النظرية.

53.5 . صلابة السطوح المتعددة البعد. إن من اهم نتائج نظرية بوني هي صلابة السطوح المتعددة البعد (التي تكشل صنفا واسعا من السطوح) أي استحالة العثور على تحويل ايزومتري لمثل هذه السطوح عدا التحويل المتعامد الذي قد يستكمل بإنسحاب يتعلق الامر هنا بصنف السطوح ذات البعد n في الفضاء ذي البعد (n+1) (من اجل 2<n) التي تقبل في نقطة معطاة ثلاثة انحناءات رئيسية غير منعدمة، على الاقل. إن الشكل التربيعي الثاني يتعين من اجل تلك السطوح حسب 33.5، انطلاقا من الشكل التربيعي الاول بتقدير اشارة، وبالتالي يتعين السطح نفسه، حسب 43.5، بطريقة وحيدة، بتقدير انسحاب وتحويل متعامد.

(*) إذا كانت $\{\mathfrak{q}^{(1)}\}$ و$\{\mathfrak{q}^{(2)}\}$ جملتين حصلنا عليهما بمعامدة ومجانسة الجملتين المعطاتين $\{\mathfrak{r}^{(1)}\}$ و$\{\mathfrak{r}^{(2)}\}$، فإن التحويل المتعامد المطلوب هو الذي يحوّل $\{\mathfrak{q}^{(1)}\}$ الى $\{\mathfrak{q}^{(2)}\}$. بالفعل، فإن عناصر المصفوفة المتعامدة والمتجانسة، وبالتالي عناصر المصفوفة المقلوبة معرفة بشكل وحيد ولا تتعلق إلاّ بالجداءات السلمية $(r_i^{(1)}, r_j^{(1)}) = (r_i^{(2)}, r_j^{(2)})$ (ل. 25.7). إن كل تطبيق خطي يحوّل كل $q^{(1)}$ الى $q^{(2)}$ $(i=1,\dots,n)$ يحوّل ايضا عبارة خطية للعناصر الاولى الى عبارة خطية للعناصر الثانية؛ بصفة خاصة فهو يحوّل الاشعة $r_i^{(1)}$ الى الاشعة $r_i^{(2)}$ على التوالي.

63.5 . تبين نظرية بوني أن المفهوم الهندسي للسطح ذي البعد n (المرن بكفاية) في الفضاء R_{n+1} يكافيء، من الناحية التحليلية، ثنائية توابع مصفوفية (من النوع n×n): $\| g_{ij}(u) \|$ و $\| b_{ij}(u) \|$ تربط بينها دساتير غوس وبيترسون.

هل يمكن تعاطي احدى هاتين المصفوفتين، مثلا $G = \| g_{ij}(u) \|$ بشكل كيفي (بطبيعة الحال فإن G متناظرة ومعرفة موجبة) ثم ايجاد الاخرى $B = \| b_{ij}(u) \|$ بحيث يكون فرض نظرية بوني محققا؟ بعبارة أخرى هل يمكن ان تكون كل مصفوفة $n \times n$ $G = \| g_{ij}(u) \|$ (متناظرة ومعرفة موجبة وقابلة للإشتقاق عددا كافيا من المرات) مصفوفة الشكل التربيعي الاول لسطح في الفضاء R_{n+1} ؟

توجد بهذا الصدد نظرية جانت Janet (1926) وكارتان Cartan (1927): عند افتراض ان معاملات $g_{ij}(u)$ تحليلية نبرهن على وجود سطح بعده n يتحقق من اجله ما سبق (معرف محليا اي في ساحة صغيرة بكفاية تنتمي اليها قيم $u = (u_1, \ldots, u_n)$) لكن، عموما في الفضاذ ذي البعد $\frac{n(n+1)}{2}$ بدل الفضاء ذي البعد $(n+1)$ ، ثم انه يستحيل عموما تخفيض هذا العدد $\frac{n(n+1)}{2}$. بصفة خاصة، من أجل شكل ذي متغيرين u_1, u_2، فإن السطح الثنائي البعد المطلوب يقع في الفضاء ذي البعد $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ ، وهو ما يطابق طرح المسألة، كما يوجد، إذن، الشكل التربيعي الثاني المطلوب؛ غير ان القضية المطروحة، من اجل شكل ذي ثلاثة متغيرات u_1, u_2, u_3، فقط، تضع السطح الثلاثي البعد المطلوب في الفضاء ذي البعد $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ ، وهناك اشكال يستحيل من اجلها، كما بيّن كارتان، وضع السطوح الموافقة لها في الفضاء ذي البعد 4 أو 5، وعليه فالشكل التربيعي الثاني المطلوب غير موجود. انظر بهذا الصدد كتاب أ. كارتان «الجمل التفاضلية الخارجية وتطبيقاتها الهندسية» باريس، هارمان، 1945، ومقالة م.ل. غروموف وف.أ. روخلين الغمس والغمر في الهندسة

الريمانية، ي.م.ن، 25، رقم 5 (1970) (بالروسية).

§ 4.5 . الخطوط الجيوديزية وجمل الاحداثيات المرتبطة بها.

14.5 . الخطوط الجيوديزية.

أ.ليكن $P_n \subset R_{n+1}$ سطحا معطى بنصف قطره الشعاعي $r = r(u)$، $u = (u_1, \ldots, u_n) \in V \subset R_n$ نعتبر المنحنى $L = \{r \in R_{n+1} : r = r(u(s)), a \leqslant s \leqslant b\}$ الذي وسيطه طول القوس s المحسوب انطلاقا من نقطة ثابتة. نشر شعاع الانحناء $\frac{d^2r}{ds^2}$ عند نقطة M من المنحنى L وفق الاساس $r_1, \ldots, r_n, m$ لدينا:

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dr}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{du_i}{ds} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial r}{\partial u_i}\frac{d^2u_i}{ds^2}.$$

عندما نعبر عن الكميات $\frac{\partial^2 r}{\partial u_i \partial u_j} \equiv r_{ij}$ ، حسب دستور غوس 13.5 (1)، نحصل على:

$$(1) \quad \frac{d^2r}{ds^2} = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k} r_k + b_{ij} m\right)\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} + \sum_{k=1}^{n}\frac{d^2u_k}{ds^2} r_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} + \frac{d^2u_k}{ds^2}\right) r_k + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds} m.$$

يقع الحد الاول على يمين (1) في المستوى الماس Π_n ويسمى **شعاع الانحناء الجيوديزي للمنحنى L عند النقطة M**؛ اما الحد الثاني وهو ناظمي على Π_n فيسمى **شعاع الانحناء القسري**. تضم مركبات شعاع الانحناء الجيوديزي، اضافة الى $\frac{du_i}{ds}$ و $\frac{d^2u_i}{ds^2}$ ، رموز كريستوفال ذات النمط الثاني Γ_{ij}^{k} التي تكتب بدورها بدلالة معاملات الشكل التربيعي الاول، وعليه فهي لا تتغير عند القيام بتحويل ايزومتري للسطح P_n . تكتب مركبات شعاع الانحناء الناظمي بدلالة معاملات الشكل

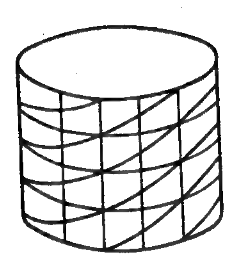
التربيعي الثاني، وعليه يمكن ان تتغير لدى القيام بتحويل ايزومتري للسطح P_n.

ب. يسمى المنحنى L خطا جيوديزيا على السطح P_n إذا انعدم الانحناء الجيوديزي عند كل نقطة من L. وهكذا فإن خاصية منحن بأنه خط جيوديزي تبقى قائمة عند تحويل السطح تحويلا ايزومتريا. بطبيعة الحال فإن التعريف المنصوص عليه يكافىء التعريف التالي: يكون المنحنى L خطا جيوديزيا إذا تطابق عند كل نقطة منه لا ينعدم فيها الانحناء الناظم الرئيسي والناظم على السطح.

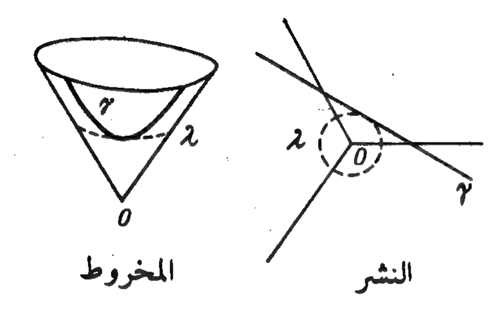
ج. إن الانحناء القسري لكل خط على مستو منعدم، وبالتالي فإن الانحناء الجيوديزي لكل خط من هذا النوع يساوي انحناءه الكلي. نلاحظ من اجل خط جيوديزي، ان ذلك يعني بأن الانحناء الكلي مطابق للصفر. إن المستقيمات هي وحدها المتمتعة بهذه الخاصية في المستوى.

د. من السهل العثور على الخطوط الجيوديزية على اسطوانة وعلى مخروط، حيث يتم ذلك بنشر كل من هذين السطحين على مستو بواسطة شبكة مستقيماته أي بواسطة خطوطه الجيوديزية، وباستعمال عدم تغيّر الجيوديزيات من جراء تحويل اليزومتري. إن الخطوط الجيوديزية للإسطوانة هي مولداتها وخطوط عرضها وخطوطها اللولبية التي تنشر بواسطة مستقيمات على المستوى (الرسم 45 ـ 1) اما الخطوط الجيوديزية للمخروط فهي مولداته (التي تصبح مستقيمات تمر بصورة رأس المخروط) وكذا بعض المنحنيات التي تنزل حتى تصل الى خط عرض ثم تصعد (الرسم 4.5 ـ 2).

ر. إن لأقواس الدوائر الكبرى، على سطح كرة، ناظما رئيسياً موجها نحو مركز سطح الكرة، وبالتالي فهو متسامت (متحد المستقيم) مع الناظم على سطح الكرة. إذن فإن اقواس الدوائر الكبرى جيوديزيات على سطح الكرة، ثم إننا سنرى بعد قليل (24.5 ـ ب) أن كل جيوديزية على سطح الكرة هي قوس دائرة كبرى. كما سنقدم ضمن 74.5 مثالا آخرا (الجيوديزيات على سطح دوراني).



الرسم 4.5 ـ 1



الرسم 4.5 ـ 2.

24.5 . المعادلات التفاضلية للخطوط الجيوديزية

أ . يتميز تعريف الخطوط الجيوديزية الوارد في 14.5 بأنه يمكن ان يعمم الى السطوح P_n ذات البعد n المزودة بمسافة ليست بالضرورة مأخوذة عن الفضاء الاقليدي R_{n+1} بل معطاة بمصفوفة متناظرة ومعرفة موجبة كيفية (وقابلة للاشتقاق):

$$G = \| g_{ik}(u) \|, \quad i, k = 1, \ldots, n.$$

نعرّف في هذه الحالة الخطوط الجيوديزية كخطوط على السطح P_n ، تعدم العبارات:

$$\sum_{i, j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} + \frac{d^2 u_k}{ds^2} \qquad (1)$$

المنتمية الى الهندسة المميزة للسطح.

وهكذا فإن المعادلات التالية محققة في كل الحالات، على خط جيوديزي:

$$\frac{d^2 u_k(s)}{ds^2} = - \sum_{i, j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}(u) \frac{du_i(s)}{ds} \frac{du_j(s)}{ds} \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

التي تصلح هي الأخرى ان تكون تعريفا لخط جيوديزي في حالة $P_n \subset R_{n+1}$ تمثل الجملة (2) جلة n معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية بالنسبة لِـ n تابعا $u_1(s), \ldots, u_n(s)$ ، مع العلم ان هذه الجملة يتم حلها بالنسبة للمشتقات الثانية، وأن اطرافها الثانية تمثل كثيرات حدود من الدرجة الثانية بالنسبة للمشتقات الاولى.

نظـــريـــة. إذا قبلـــت التـــوابـــع $g_{ij}(u)$ بجوار نقطـــة معطـــاة $M_0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ مشتقات مستمرة فإنه توجد جيوديزية واحدة تنطلق من النقطة M_0 في كل منحنى معطي $\{du_1, \ldots, du_n\}$.

البرهـان. نتنـاول، مـن اجـل النقطـة المعطـاة $M_0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ والمنحنى المثبت $\{du_1, \ldots, du_n\}$ ، بصفة شكلية الجملة (2) مستكملة بالشروط الابتدائية:

$$u_k(0) = u_k^0, \quad \frac{du_k(0)}{ds} = v_k^0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

حيث ان الاعداد v_k^0 متناسبة مع الاعداد du_k ، وموحدة بالشرط:

$$\sum_{i,\, j=1} g_{ij}(u^0)\, v_i^0 v_j^0 = 1.$$

لما كانت التـوابـع $\Gamma_{ij}^k(u) = \frac{1}{2} g^{ks}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s}\right)$ مستمـرة فرضا وكانت الاطراف الثانية للجملة (2)، التربيعية بالنسبة للمشتقات، تحقق شرط ليبشيتز بالنسبة للمتغيرات $\frac{du_i}{ds}$ ، فإننا نستطيع تطبيق نظرية وجود ووحدانية الحل (راجع ي 24.13 و ي 15.13) التي تنص على وجود ووحدانية الحل $u_i = u_i(s),\ 0 \leqslant s \leqslant s_0,\ i = 1, \ldots, n$ للجملة (2) مع الشروط الابتدائية (3). يوافق هذا الحل منحن L على السطح P_n يمر بالنقطة M في المنحنى $\{du_i\}$ إذا بينا أن الوسيط الشكل s على المنحنى L يمثل طول قوس فإننا نستنتج، بالنظر الى (2)، أن L خط جيوديزي. ينبغي إذن التأكد من المساواة:

$$I(s) \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} g_{ij}(u(s)) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} = 1.$$

لدينا على طول الخط L:

$$I'(s) = \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} \frac{du_k}{ds} +$$

$$+ \sum_{i,\, j=1}^{n} g_{ij}\left(\frac{d^2u_i}{ds^2} \frac{du_j}{ds} + \frac{du_i}{ds} \frac{d^2u_j}{ds^2}\right).$$

عندما نستبدل المشتقات الثانية بعبارتها الواردة في الجملة (2)، ونطبق

الدساتير 5 .13(7) و(8):

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}=\Gamma_{ik,j}+\Gamma_{jk,i} \text{ et } \Gamma_{ij,l}=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}g_{kl},$$

فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned} I'(s) &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}- \\ &-\sum_{k,l=1}^{n}g_{kl}\Big[\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\Gamma_{ij}^{k}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_l}{ds}+\Gamma_{ij}^{l}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}\Big)\Big]= \\ &=\sum_{i,j,k=1}^{n}\Gamma_{jk,i}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}+\sum_{i,j,k=1}^{n}\Gamma_{jk,i}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}- \\ &-\sum_{i,j,l=1}^{n}\Gamma_{ij,l}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_l}{ds}-\sum_{i,j,k=1}^{n}\Gamma_{ij,k}\frac{du_i}{ds}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}=0 \end{aligned}$$

لأن المجاميع لا تختلف إلا بالدليلات. وهكذا فإن $I'(s)\equiv 0$ و $I(s)\equiv I(0)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(u(0))\frac{du_i(0)}{ds}\frac{du_j(0)}{ds}=1$ وبذلك ينتهي البرهان.

ب. ينتج مما اثبتناه، بصفة خاصة، أن أقواس الدوائر الكبرى تستنفد كل الخطوط الجيوديزية على سطح كرة بالفعل، إذا ثبّتنا على خط جيوديزي L نقطة M ورسمنا قوسا Γ يمر بـM من دائرة كبرى في منحنى الخط L، عندئذ يتبين من نظرية الوحدانية المثبتة، أن القوس Γ مطابق بأكمله لـL.

ج. يمكن اثبات وجود جوار u للنقطة M، يمر عند كل نقطة منه A جيوديزية وحيدة منطلقة من M، اضافة الى ذلك فإن كل نقطتين A و B من U مرتبطتان بجيوديزية واحدة يقع كل قوسها الذي يصل A وB في U (راجع التمرينين 12 و13).

34.5 . خطوط العرض الجيوديزية.

أ. ليكن L خطا على سطح ثنائي البعد P_2 . نرسم على السطح P_2

انطلاقا من كل نقطة M من الخط L ، في المنحنى العمودي على L ، خطا جيوديزيا $\gamma(M)$. يتضح من النظرية 24.5 ـ أ أن مثل هذه الجيوديزية موجودة ووحيدة من اجل كل نقطة M. نرسم على كل من هذه الجيوديزيات، في منحنى مثبت، نفس القوس w نحسب ابتداء من النقطة M. يُمثل المحل الهندسي لأطراف الاقواس الجيوديزية المحصل عليها بهذه الطريقة خطا L_w يسمى **خط العرض الجيوديزي للخط L على مسافة w**. يتبين ان كل خطوط العرض الجيوديزية L_w ، $0 \leqslant w \leqslant \varepsilon$ **عمودية على الخطوط الجيوديزية** $\gamma(M)$. سنثبت هذه القضية في حالة البعد n.

ب. نفرض ان لدينا على سطح $P_n = \{r \in R_{n+1} : r = r(u), u \in U \in R_n\}$ سطحا بعده (n−1) مرنا بكفاية L_{n-1} ، نعرف عند كل نقطة $M \in L_{n-1}$ منحنى عموديا على السطح P_n . ليكن $\gamma(M)$ الخط الجيوديزي المنطلق من M والعمودي على L_{n-1} نرسم على $\gamma(M)$ ، في منحنى ثابت، قوسا ثابتا w−(*) يسمى المحل الهندسي للنقاط المحصل عليها **سطحا جيوديزيا موازيا لـ L_{n-1} على مسافة w**، ونرمز له بـ L_{n-1}^w .

نظرية. من اجل كل نقطة $M_0 \in L_{n-1}$ ، يوجد جوار $V(M_0)$ يقطع فيه كل سطح L_{n-1}^w عموديا كل الجيوديزيات $\gamma(M)$.

البرهان. إن السطح L_{n-1} معطى في الحالة العامة بجملة معادلات لها n−1 وسيطا $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$:

$$\begin{cases} u_1 = u_1(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = u_n(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}), \end{cases} \qquad (1)$$

(*) تضمن النظرية 16.1 وجود $\varepsilon > 0$ وجوار U للنقطة المعطاة M_0 على السطح P_n بحيث تكون الخطوط الجيوديزية $\gamma(M)$ المنطلقة من أية نقطة M في الجوار U عموديا على L_{n-1}، معرفة على الأقل، من اجل كم قيم w مع $|w| < \varepsilon$. (يتعلق الامر في النظرية 16.1 بمعادلة من الرتبة الاولى الا ان أية معادلة من رتبة اعلى ترد الى معادلة من الرتبة الاولى كما جاء ذلك في ي 15.13).

إن مرتبة المصفوفة اليعقوبية $\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})}$ تساوي (n−1) عند النقطة M_0، وبالتالي في جوار لهذه النقطة. نفرض ان الاصغري:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial \tau_{n-1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix}$$

غير منعدم عند النقطة M_0. حينئذ، يتبين من نظرية التابع العكسي (المقلوب) ان بالإمكان حل المعادلات الاخيرة، البالغ عددها n−1، في الجملة (1) بالنسبة للوسيطات $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ وذلك باعتبارها توابع لـ $u_2, \ldots, u_n$، ثم ننقلها للمعادلة الاولى؛ تكون معادلة السطح L_{n-1} المحصل عليها من الشكل:

$$u_1 = \varphi(u_2, \ldots, u_{n-1}). \tag{2}$$

يتضح من النظرية 63.2 ـ أ ان التوابع (2) تتزايد مرونتها بقدر ما تتزايد مرونة الاطراف الثانية للجملة (1). يمكن الآن اختيار كوسيطات تعيّن موقع أية نقطة $M \in L_{n-1}$ بجوار النقطة M_0، الكميات:

$$v_1 = u_1 - \varphi(u_2, \ldots, u_{n-1}), \quad v_2 = u_2, \ldots, v_n = u_n,$$

لأن المعين اليعقوبي للمصفوفة $\frac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)}$ يساوي الوحدة. إن الأشعة $\frac{\partial r(M_0)}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial r(M_0)}{\partial v_n}$ ماسة للخطوط الاحداثية $v_2, \ldots, v_n$ على التوالي، المارة على السطح $v_1 = 0$، وبالتالي على L_{n-1}، وهي تقع إذن في المستوى الماس لـ L_{n-1}.

نعالج الآن، من اجل $\varepsilon > 0$، كل المجموعات العددية w_n، ...، w_1، الخاضعة للشروط:

$$|w_1| < \varepsilon, \quad |w_2 - v_2^0| < \varepsilon, \ldots, |w_n - v_n^0| < \varepsilon$$

حيث $v_2^0 = u_2^0, \ldots, v_n^0 = u_n^0$. نصل كل مجموعة $w_1, \ldots, w_n$ بنقطة M من السطح P_n حسب القاعدة التالية: نضع $v_n = w_n$,..., w_2،

$v_1 = 0,\ v_2 =$ ونختار نقطة M' على السطح L_{n-1} ، ثم نبحث عن النقطة M على الخط الجيوديزي $\gamma(M')$ بحيث تكون المسافة التي تفصل M عن M′ تساوي w_1 (وفق القوس الموجه). إن الاحداثيات $v_1, \ldots, v_n$ للنقطة M توابع مستمرة وقابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير w_1 والوسيطات $w_2, \ldots, w_n$ ، وبالتالي فإن يعقوبي المصفوفة $\frac{\partial(v_1, \ldots, v_n)}{\partial(w_1, \ldots, w_n)}$ تابع مستمر لـ $w_1, \ldots, w_n$. لنثبت انه غير منعدم عن النقطة M_0 . لهذا الغرض، ينبغي ان نبين بان الاشعة $\frac{\partial r(v)}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial r(v)}{\partial w_n}$ مستقلة خطيا عند هذه النقطة. نلاحظ عند النقطة M_0 ، ان الاشعة $\frac{\partial r}{\partial w_n}$ ، $\frac{\partial r}{\partial w_2}, \ldots$ تطابق الاشعة المتوالية $\frac{\partial r}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial r}{\partial v_n}$ المستقلة خطيا والواقعة في المستوى الماس للسطح L_{n-1} ؛ اما الشعاع $\frac{\partial r(v)}{\partial w_1}$ فهو واحدي وعمودي على L_{n-1} ولذا فهو ايضا مستقل خطيا عن $\frac{\partial r}{\partial w_n}$ ، $\frac{\partial r}{\partial w_2}, \ldots,$. ينتج عن ذلك ان الكميات $w_1, \ldots, w_n$ يمكن اختيارها، هي الاخرى كوسيطات جديدة بجوار النقطة M_0 .

لدينا في جملة الاحداثيات هذه $g_{11}(w) = \left|\frac{\partial r}{\partial w_1}\right|^2 = 1$ ، لأن w_1 هو طول القوس. ثم إن المعادلة العامة للجيوديزيات 24.5 (2):

$$\frac{d^2 w_k}{ds^2} = -\sum_{i,\,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dw_i}{ds}\frac{dw_j}{ds}, \qquad (2)$$

محققة، في هذه الحالة، من طرف جملة التوابع $w_1 = s,\ w_2 = C_2, \ldots, w_n = C_n$ بنقل هذه التوابع الى المعادلات (3) نرى في جملة الوسيطات $w_1, \ldots, w_n$ أن الكميات Γ_{11}^{k} (k=1,...,n) منعدمة. حينئذ يكون لدينا أيضا:

$$\Gamma_{11,\,s} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{11}^{k} g_{ks} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n).$$

بما أن $\Gamma_{11,\,s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{1s}}{\partial w_1} + \frac{\partial g_{1s}}{\partial w_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial w_s}\right)$ و $\frac{\partial g_{11}}{\partial w_s} = 0$ يتبين ان التابع $g_{1s}(w)$ ثابت على كل خط تكون عليه الكماليات $w_2, \ldots, w_n$ ثابتة، أي على كل جيوديزية $\gamma(M')$. لما كان المنحنى $\gamma(M')$ عموديا، انشاء، على L_{n-1} عند النقطة M' ، بحيث ان $g_{1s}(0) = 0$ فإن $g_{1s}(w) = 0$

من اجل كل w_1 . يعني ذلك ان الجيوديزية $\gamma(M')$ عمودية على خط العرض الجيوديزي L_{n-1}^{w} . انتهى البرهان.

نقول عن جملة الاحداثيات $w_1, \ldots, w_n$ التي انشأناها آنفا على السطح P_n بجوار النقطة M_0 إنها **نصف جيوديزية اساسها** L_{n-1} .

44. 5 . لنستخدم جملة الاحداثيات نصف الجيوديزية لإثبات الخاصية التالية المتعلقة بالقيم القصوى:

أ . نظرية. نعتبر على السطح P_n خطا جيوديزيا لا يمر بنقطتين A وB متجاورتين بكفاية، ونعتبر كل المنحنيات الاخرى β (القابلة للتعديل) المارة على P_n بالنقطتين A وB في جوار صغير للخط γ . من بين كل هذه الخطوط فإن الخط الذي له أصغر طول هو الخط الجيوديوزي γ .

البرهان. نرسم انطلاقا من النقطة A سطحا L_{n-1} عموديا على الخط γ ونختار L_{n-1} كأساس لجملة نصف جيوديزية من الاحداثيات. بجوار النقطة A يصبح الخط γ خطا من الخطوط الاحداثية للجملة نصف الجيوديزية. بافتراض ان النقطة B والخط β يقعان في الساحة الصغيرة على السطح P_n ، التي تقوم فيها الجملة نصف الجيوديزية المنشأة، نكتب عبارة طول β :

$$s(\beta)=\int_A^B ds(\beta)=\int_A^B \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(w)\,dw_i\,dw_j}=$$

$$=\int_A^B \sqrt{dw_1^2+\sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}(w)\,dw_i\,dw_j}.$$

سبب قيام المساواة الاخيرة هو لكون $g_{11}=1,\ g_{1s}=0$ $(s=2,\ldots,n)$ نلاحظ ان المصفوفة $\|g_{ij}(w)\|$ من النوع $(n-1)\times(n-1)$ (حيث $(i, j=2,\ldots,n)$ معرفة موجبة. وبالتالي

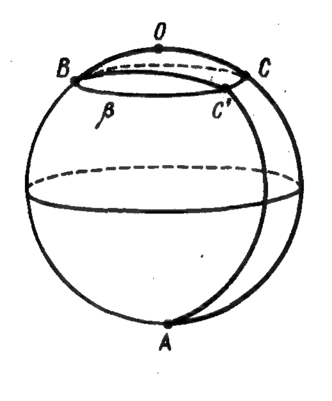
$$s(\beta)\geqslant\int_A^B dw_1=w_1(B)-w_1(A)=s(\gamma),$$

وهو المطلوب.

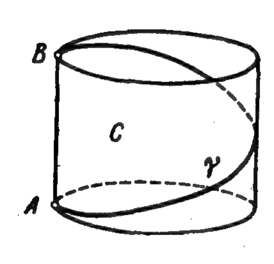
ب.ملاحظة. هناك على الاسطوانة C (الرسم 4.5 ـ 3)، اضافة الى الجيوديزية اللولبية التي تصل النقطتين Aو B، جيوديزيات أخرى أقصر منها (مثلا قطعة المستقيم AB) ليس هناك تناقض مع النظرية أ لأننا لا نقارن في هذه النظرية سوى طول الجيوديزية مع أطوال الخطوط المجاورة لها بكفاية.

ج. ملاحظة. نعتبر على سطح الكرة S (الرسم 4.5 ـ 4) جيوديزية طولية تذهب من القطب الجنوبي A الى القطب الشمالي O وتصل الى نقطةB. نرمز بـC لاول نقطة تقاطع خط الطول AoB مع خط العرض β الذي تنتمي اليه النقطة B يوجد في كل جوار لهذا الخط الجيوديزي خط يصل A وB اقصر من القوس AoB. على سبيل المثال فإن الخط $AC'B$ حيث تقع C' على خط العرض β بمقربة مثبتة مسبقا من النقطة C، ويمثل AC' قوس خط الطول كما يمثل $C'B$ قوس الدائرة الكبرى. بطبيعة الحال فإن للقوسين AC' و Ac نفس الطول، لكن القوس $C'B$ أقصر من CB حيث ان الوتر $C'B$ أقصر من الوتر CB الذي يمثل قطر خط العرض β .

يفسر التناقض الظاهر مع النظرية أ هنا بكون الجيوديزية AcB «اطول» مما يسمح لنا بضمها الى الجملة نصف الجيوديزية للإحداثيات التي لا تنشأ، كما رأينا، إلاّ محلياً بجوار النقطة المعطاة.



الرسم 4.5 ـ 4



الرسم 4.5 ـ 3

54.5 . حسال المميزات الرئيسية لسطح ثنائي البعد ضمن جملة نصف جيوديزية للوسيطات.

أ . كنا رأينا في 34.5 ـ ب أن الكميات Γ_{11}^{h} و $\Gamma_{11,s}$ منعدمة في جملة نصف جيوديزية للإحداثيات. لنحسب، من اجل سطح ثنائي البعد P_2 ، الكميات المتبقية وهي Γ_{ij}^{h} و $\Gamma_{ij,s}$. برهنا في 34.5 ـ ب على أن الشكل التربيعي الاول يمكن كتابته في جملة نصف جيوديزية الوسيطين w_1, w_2 كما يلي:

$$ds^2 = dw_1^2 + g_{22}(w_1, w_2)\, dw_2^2.$$

وبالتالي، لم يبق في عبارات رموز كريستوفال من النمط الاول:

$$\Gamma_{ij,s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial w_j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial w_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial w_s}\right)$$

سوى الحدود التي لها، من بين الدليلات i,j,s=1,2 ، اثنان على الاقل مساويان لـ2 . وهكذا عندما نرمز قصد الاختصار بـ$G = g_{22}(w_1, w_2)$، $w_1 = w, w_2 = u$ ، فإننا نجد:

$$\Gamma_{12,1} = \Gamma_{21,1} = 0, \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = \frac{1}{2} G_w,$$

$$\Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2} G_w, \quad \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2} G_u.$$

ثم، بمراعاة الدستور $\Gamma_{ij}^{h} = \sum_{s=1}^{2} \Gamma_{ij,s}\, g^{sh}$ وكون مقلوب المصفوفة $\| g_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{Vmatrix}$ هو المصفوفة $\| g^{sh} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G \end{Vmatrix}$ ، نجد أن:

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = 0, \quad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \Gamma_{12,2}\, g^{22} = \frac{1}{2}\frac{G_w}{G},$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{1}{2} G_w, \quad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}$$

ب . نحسب الآن، في الجملة نصف الجيوديزية، الانحناء الكلي للسطح P_2 . للقيام بذلك، نبحث في البداية عن المعين $B_{12,12}$ للشكل التربيعي الثاني حسب الدستور 33.5(1):

$$B_{12,12} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \sum_{s=1}^{2} \left[\frac{\partial \Gamma_{11}^{s}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma_{12}^{s}}{\partial w} + \sum_{p=1}^{2} (\Gamma_{11}^{p}\Gamma_{2p}^{s} - \Gamma_{21}^{p}\Gamma_{1p}^{s}) \right] g_{s2}.$$

تبقى هنا فقط الحدود التي لها s=2 وp=2. نحصل على:

$$B_{12,12} = -G\left(\frac{1}{2}\frac{G_w}{G}\right)_w - G\left(\frac{1}{2}\frac{G_w}{G}\right)^2 =$$
$$= -\frac{G}{2}\frac{GG_{ww}-G_w^2}{G^2} - \frac{G_w^2}{4G} = -\frac{G_{ww}}{2} + \frac{1}{4}\frac{G_w^2}{G}.$$

إن الانحناء الكلي K للسطح P_2 يساوي إذن:

$$K = \frac{B_{12,12}}{G_{12,12}} = -\frac{G_{ww}}{2G} + \frac{1}{4}\frac{G_w^2}{G^2}. \quad (1)$$

يمكن اختصار كتابة هذه العبارة عندما نلاحظ أن:

$$(\sqrt{G})_w = \frac{1}{2}G^{-1/2}G_w, \quad (\sqrt{G})_{ww} = -\frac{1}{4}G^{-3/2}G_w^2 + \frac{1}{2}G^{-1/2}G_{ww},$$
$$\frac{(\sqrt{G})_{ww}}{\sqrt{G}} = -\frac{1}{4}\frac{G_w^2}{G^2} + \frac{1}{2}\frac{G_{ww}}{G} = -K,$$

بحيث أن:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{ww}}{\sqrt{G}}. \quad (2)$$

وهكذا نرى في جملة نصف جيوديزية على سطح ثنائي البعد P_2 ان التابع $\sqrt{G}$ مرتبط بالانحناء بواسطة المعادلة التفاضلية:

$$(\sqrt{G})_{ww} + K\sqrt{G} = 0. \quad (3)$$

64.5 . استعادة الشكل التربيعي الاول انطلاقا من الانحناء الكلي.

نعتبر سطحا $P = P_2$ نعلم عند كل نقطة M منه الانحناء الكلي K=K(M). نثبّت على السطح نقطة M_0 وننشىء في جوارها جملة نصف جيوديزية خاصة من الاحداثيات، أساسها خط جيوديزي L، ووسيطها على هذا الخط طول القوس $w_2 = u$ المحسوب انطلاقا من نقطة ثابتة (النقطة M_0 مثلا). إن الشكل التربيعي الاول هو:

$$ds^2 = dw^2 + G(w, u)\,du^2,$$

حيث

$$G(0, u) = 1, \quad \sqrt{G(0, u)} = 1. \quad (1)$$

بنقل التابعين المعروفين $w_1 = 0,\ w_2 = s$ الى المعادلة العامة للجيوديزيات 24.5 (2):

$$\frac{d^2w_k}{ds^2} = -\sum_{i,\,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k} \frac{dw_i}{ds}\frac{dw_j}{ds}$$

نحصل على $\Gamma_{22}^1(0,u) = \Gamma_{22}^2(0,u) = 0$. ومنه يأتي

$$\Gamma_{22,\,1}(0,u) = g_{11}\Gamma_{22}^1(0,u) + g_{12}\Gamma_{22}^2(0,u) = 0.$$

بما أن $\Gamma_{22}^1(0,u) = -\frac{1}{2}G_w(0,u)$ (حسب 54.5 ـ أ)، فإن لدينا أيضا :

$$G_w(0,u) = 0, \quad (\sqrt{G(0,u)})_w = 0. \qquad (2)$$

نعتبر في المعادلة

$$(\sqrt{G})_{ww} + K\sqrt{G} = 0$$

التي يحققها الانحناء الكلي K (54.5(3))، K كتابع معروف (لِـ w وu)، ونعتبر $\sqrt{G}$ كتابع مجهول لنفس الوسيطين، لدينا فيما يخص المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية (3)، الشروط الابتدائية (1) و(2) التي تسمح بإستعادة التابع G(w,u) بشكل وحيد في جوار النقطة M_0 المشار اليه. نصل، بصفة خاصة، الى نظرية الوحدانية التالية:

نظرية. إذا كتب الانحناء الكلي K، من اجل سطحين P_2 و $\tilde{P}_2$ ضمن جملتين نصف جيوديزيتين خاصين، بدلالة تابع احداثيات مشتركة، فإن هذه السطحين ايزومتريان، هناك ايزومترية معطاة بالتطبيق الذي يحتفظ بالإحداثيات نصف الجيوديزية الخاصة.

إن القضة العكسية لنتيجة هذه النظرية قائمة أيضا: إذا كان سطحان P_2 و $\tilde{P}_2$ ايزومتريين فإن الانحناء الكلي للسطحين يمثل، ضمن جملتين نصف جيوديزيتين توافق احداهما الاخرى، نفس التابع 54.5(2) لمعاملات الشكل التربيعي الاول، إذن، نفس تابع احداثيات.

74.5 . نتناول في نهاية هذه الفقرة مثالا هاما.

الجيوديزيات على سطح دوراني. نعتبر سطحا دورانيا $\rho = \rho(z)$.
إن خطوط الطول على هذا السطح هي، بطبيعة الحال، الخطوط الجيوديزية

(51.5 ـ س) لأن الناظم الرئيسي على خط الطول يطابق الناظم على السطح. تمثل جماعة خطوط العرض وخطوط الطول للسطح الدوراني جملة نصف جيوديزية طبيعية تقبل كأساس أي خط عرض، يلعب دور الاحداثيات طول القوس على خط الطول والزاوية القطبية (الرسم 4.5 ـ 5).

يكتب الشكل التربيعي الاول ضمن هذه الاحداثيات على النحو (51.5 ـ س)

$$ds^2 = dw^2 + G\,d\varphi^2,$$

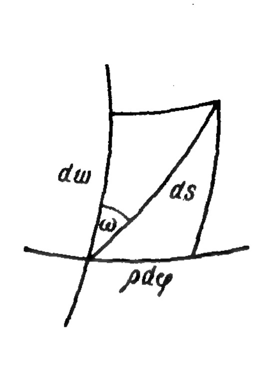
حيث $G = \rho^2$. اما معاملات الجيوديزيات:

$$\frac{d^2w_k}{ds^2} = -\sum_{i,\,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \frac{dw_i}{ds}\frac{dw_j}{ds},$$

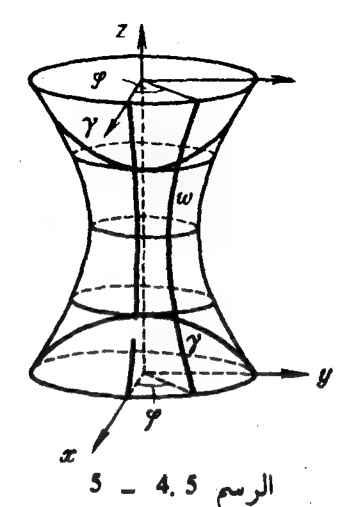
، بالنظر الى المعاملات Γ_{ij}^k (54.5 ـ أ) فإنها تكتب على الشكل:

$$w_{ss} = \frac{1}{2} G_w w_s^2, \tag{1}$$

$$\varphi_{ss} = -\frac{G_w}{G} w_s\varphi_s = -\frac{2\rho\rho_w}{\rho^2} w_s\varphi_s = -\frac{2\rho_s\varphi_s}{\rho}. \tag{2}$$



الرسم 4.5 ـ 6



الرسم 4.5 ـ 5

نرمز بـ ω للزاوية التي يشكلها الخط الجيوديزي مع خط الطول. باعتبار المثلث اللامتناهي الصغر المعرف بقطره ds وضلعيه dw و $\rho\, d\varphi$ (الرسم 4.5 ـ 6) نحصل مباشرة على:

$$\sin \omega = \rho \varphi_s .$$

نظرية. (كليرو Clairaut) لدينا على طول خط جيوديزي على السطح الدوراني المساواة: $\rho \sin \omega$ =ثابتا .

البرهان. لدينا على طول كل جيوديزية (بفضل المعادلات (2) و(3)):

$$(\rho \sin \omega)_s = (\rho^2 \varphi_s)_s = 2\rho\rho_s\varphi_s + \rho^2\varphi_{ss} = 0,$$

وهو ما يثبت النظرية.

يمكن تقديم الوصف التمييزي التالي للسلوك الهندسي للجيوديزيات وهذا استنادا لنظرية كليورو: كل جيوديزية γ ، مخالفة لخط الطول، تدور بتخفيض القيمة ρ بحيث تتزايد زاويتها مع خط الطول إذا أصبحت هذه الزاوية من اجل اصغر قيمة ρ_{min} لـ ρ، زاوية قائمة استناداً الى نظرية كليرو $\rho \sin \omega$ =ثابتا=c ، فإن الجيوديزية γ تصبح، عموما، ماسة لخط العرض الموافق لها، ثم تعود الى ساحة القيم الكبيرة لـ ρ (الرسم 5 .4 ـ 5). هناك رغم ذلك بعض الاستثناءات (راجع التمرينين 6 و7).

§ 5 .5 . السطوح الثنائية البعد ذات الانحناءات الثابتة.

15 .5 . تتمتع السطوح الثنائية البعد ذات الانحناء الكلي الثابت، K=ثابتا، بخاصيات شاذة متعددة. يمكن القول بفضل النظرية 5 .64 ، أن كل السطوح التي لها نفس الانحناء الكلي الثابت **K** هي سطوح ايزومترية محليا، فيما بينها. اضافة الى ذلك، بما أننا نستطيع اختيار النقطة الابتدائية M_0 اختيارا كيفيا وكذا منحنى جيوديزية الاساس، يمكننا تحقيق الايزومترية بتثبيت على السطحين **P** و $\widetilde{P}$ تثبيتا كيفيا ثنائية نقطتين M_0 و $\widetilde{M}_0$ متوافقتين فيما بينها وكذا ثنائية منحيين منطلقين من هاتين النقطتين. يمكن تطبيق كل جزء صغير بكفاية من سطح انحناؤه الكلي ثابت، تطبيقا ايزومتريا على جزء آخر من نفس السطح، وهذا عند تعاطي ثنائية نقطتين متوافقتين وثنائية منحيين متوافقين.

إن المعادلة 54.5(3) التي تربط الانحناء K والتابع G(w,u) في الجملة نصف الجيوديزية للإحداثيات:

$$(\sqrt{G})_{ww}+K\sqrt{G}=0,$$

مع الشروط الابتدائية على جيوديزية الاساس 54.5(1)، (2):

$$\sqrt{G(0,\ u)}=1,\quad (\sqrt{G(0,\ u)})_w=0,$$

تقبل، من اجل K=ثابتا، الحلول:

$$K=0:\ G(w,\ u)\equiv 1,\ ds^2=dw^2+du^2; \tag{1}$$

$$K>0:\ \sqrt{G(w,\ u)}=\cos\sqrt{K}w,\quad ds^2=dw^2+\cos^2\sqrt{K}w\,du^2; \tag{2}$$

$$K<0:\ \sqrt{G(w,\ u)}=\operatorname{ch}\sqrt{-K}\,w,\quad ds^2=dw^2+\operatorname{ch}^2\sqrt{-K}\,w\,du^2. \tag{3}$$

إن أبسط مثال لسطح انحناؤه الكلي منعدم هو المستوى، نرى الآن بأن كل سطح انحناؤه الكلي منعدم ايزومتري محليا للمستوى.

إن أبسط مثال لسطح انحناؤه الكلي ثابت وموجب هو سطح الكرة الثنائي البعد ذو نصف القطر R، لدينا $K=1/R^2$ (42.5 - ر). نرى إذن بأن كل سطح انحناؤه ثابت وموجب K سطح ايزومتري محلياً لسطح كرة (نصف قطرها $1/\sqrt{K}$) سنورد ضمن 25.5 مثالا لسطح ثنائي البعد ذي انحناء ثابت وسالب أي سطح ايزومتري محليا لكل سطح له نفس الانحناء.

25.5 . نقدم هنا مثال سطح انحناؤه ثابت وسالب يمثل سطحا دورانيا. كما رأينا في 62.5 - ب، فإن الانحناء الكلي لسطح دوراني مولدته $\rho=\rho(z)$ يكتب في الدستور:

$$K=-\frac{\rho_{zz}}{\rho(1+\rho_z^2)^2}.$$

بوضع $-K=Q>0$، علما أن Q ثابت، نجد بخصوص $\rho(z)$ المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية التالية

$$\rho_{zz} = Q\rho\,(1+\rho_z^2)^2. \qquad (1)$$

ليكن $\rho_z = u(\rho),\ \rho_{zz} = u_\rho \rho_z = u_\rho u$ ؛ تكتب عندئذ المعادلة (1) على الشكل:

$$u_\rho u = Q\rho\,(1+u^2)^2$$

أو

$$\frac{u\,du}{(1+u^2)^2} = Q\rho\,d\rho.$$

نحصل بالمكاملة على:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{2}\,Q\rho^2 - \frac{C}{2}$$

أو

$$\frac{1}{1+u^2} = C - Q\rho^2.$$

نواصل المكاملة في حالة C=1 . نجد عندئذ:

$$u^2 = \frac{Q\rho^2}{1-Q\rho^2},\quad u = \frac{d\rho}{dz} = \pm\frac{\sqrt{Q}\,\rho}{\sqrt{1-Q\rho^2}},\quad dz = \pm\frac{\sqrt{1-Q\rho^2}}{\sqrt{Q}\,\rho}\,d\rho.$$

نضع $\sqrt{Q}\rho = \sin\theta,\ \sqrt{Q}\,d\rho = \cos\theta\,d\theta$. نحصل عندئذ على:

$$dz = \pm\frac{1}{\sqrt{Q}}\,\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\,d\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{Q}}\left[\frac{d\theta}{\sin\theta} - \sin\theta\,d\theta\right],$$

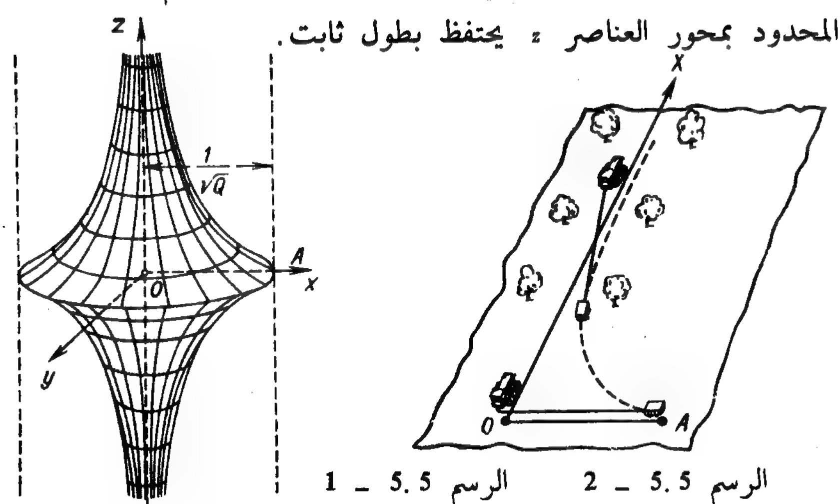
$$z - z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{Q}}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + \cos\theta\right).$$

بما أن اختيار الثابت z_0 لا يغيّر شكل السطح (يغيّر فقط موقعه بالنسبة لمحور العناصر z)، يمكننا اختياره منعدما. حينئذ تقدم لنا المعادلتان:

$$z = \pm\frac{1}{Q}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right| + \cos\theta\right),\quad \rho = \frac{1}{\sqrt{Q}}\sin\theta \qquad (2)$$

تمثيلا وسيطيا لخط طول السطح المطلوب. يقع هذا السطح نفسه (الرسم 5.5 ـ 1) داخل الاسطوانة $\rho \leqslant 1/\sqrt{Q}$ ، وهو لا يقترب من سطح الاسطوانة الآ من أجل $\sin\theta = 1$ ، بحيث يكون $\cos\theta = 0$ ، $\ln|\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}| = 0,\ z = 0$. من جهة أخرى إذا آل θ الى الصفر، يؤول ρ الى الصفر و z الى $\pm\infty$.

يسمى المنحنى (2) منحنى الجر(*) (أو الجارّة). نعلم ان جزء مماسه المحدود بمحور العناصر z يحتفظ بطول ثابت.



الرسم 5.5 ـ 1 الرسم 5.5 ـ 2

يسمى السطح الدوراني المحصل عليه بهذه الطريقة شبه سطح كرة. نلاحظ ان هندسة لوبتشفسكي تتحقق على هذا السطح (في اجزائها الصغيرة، على الاقل) [المستقيمات في هندسة لوبتشفسكي هي الجيوديزيات على شبه سطح الكرة]. إن لشبه سطح الكرة شواذا من اجل $z = 0$ يتبين (نظرية هيلبرت) انه لا يوجد في الفضاء الثلاثي البعد سطح انحناؤه ثابت $K<0$ بدون شواذ (ولا بدون حافة) إنه لا وجود لمثل هذا السطح حتى وإن فرضنا $K\leqslant$ثابت<0 بدل $K=$ثابت$\rightarrow 0$ (ن.ف إفيموف (Efimov) 1965، انظر مقالة أ.م.ن، 21، رقم 5 (1966)، 3 ـ 58).

35.5 . إذن، فإن جماعة السطوح المؤلفة من المستوى وسطوح الكرات مهما كان نصف قطرها R واشباه سطوح الكرات مهما كانت قيم Q تقدم السطوح «القانونية» ذات الانحناءات الكلية الثابتة، ثم إن كل سطح ذي انحناء كلي ثابت ايزومتري محليا مع السطح القانوني الموافق له (أي السطوح

(*) لنتصور ان محوري العناصر z وx في الرسم 5.5 ـ 1 مرسومان على سطح الارض وان جرارا يتحرك على طول محور العناصر I وقد انطلق من النقطة O. إذا كان هذا الجرّار يجرّ سيارة كانت زمن الانطلاق في النقطة A، فإن هذه السيارة ترسم منحنى جرّ (الرسم 5.5 ـ 2)

الذي له نفس الانحناء الكلي). يمكننا أيضا طرح مسألة الوصف التام للسطوح الثنائية البعد ذات الانحناءات الكلية الثابتة أي وصفها ليس بتقدير ايزومترية بل بتقدير موقعها في الفضاء. إن هذه المسألة معقدة جدا من اجل $K \neq 0$، وسوف لن نتعرض اليها هنا(*) أما في حالة k=0 فالمسألة أكثر بساطة، يمكن تقديم وصف تام للسطوح ذات الانحناءات الكلية المنعدمة في R_3 . نقول عن هذه السطوح إنها **قابلة للنشر** (والمراد بهذه الصفة «**قابلة للنشر على المستوى**»). إننا نعلم بأن الاسطوانة والمخروط الدائريين سطحان قابلان للنشر (62.5 ـ ج) زيادة على ذلك، فإن كل اسطوانة، مهما كان منحنيها الدائري $r=r(t)$ وشعاعها المولّد f هي سطح قابل للنشر، بالفعل يمكن اختيار الشعاع واحديا واختيار المنحنى عموديا على هذا الشعاع، ووسيطة طول القوس، عندئذ يكون الشكل التربيعي الاول للإسطوانة مطابقا للشكل التربيعي الاول للمستوى ضمن الاحداثيات الديكارتية. إن كل مخروط رأسه O ودليله (مولدته) كيفية هو ايضا سطح قابل للنشر، بالفعل يمكن اختيار الشعاع المولد f للمخروط الذي يقع منطلقه في رأس المخروط، واحديا كما يمكن اعتباره تابعا للقوس σ الذي يرسمه موصله على المخروط، حينئذ تكتب العبارة التحليلية للمخروط على النحو: $r = r(\sigma, t) = te(\sigma)$ مع $ds^2 = dt^2 + t^2 d\sigma^2$ بمثابة الشكل التربيع الاول. وهكذانرى ان كل السطوح المخروطية ايزومترية فيما بينها، وبصفة خاصة ايزومترية مع المستوى (الذي يمثل بطبيعة الحال سطحا مخروطياً).

ننشيء نمطا ثانيا من السطوح القابلة للنشر كما يلي. نعتبر تابعا ايسريا كيفيا L والسطح P_2 المؤلف من كل المماسات لِـL، ننص عندئذ على ان السطح P_2 له انحناء كلي منعدم. بالفعل، هب ان $r = r(\sigma)$ معادلة

(*) انظر فيما يتعلق بالطوح الدورانية ذات الانحناءات الثابتة في R_3: ف.ف. كاغان، أسس نظرية المساحات، ج 2، غ.إ.ت.ت.ل، 1948 (بالروسية).

للمنحنى L حيث يمثل σ الوسيط الطبيعي، حينئذ يعطى السطح P_2 بالتمثيل الوسيطي $\rho(\sigma, t) = r(\sigma) + tr_\sigma$. ننشىء الشكل التربيعي الاول للسطح P_2 . لدينا $\rho_\sigma = r_\sigma + tr_{\sigma\sigma} = \tau + tk(\sigma)\nu,\ \rho_t = r_\sigma = \tau$ ؛ ومنه $E = (r_\sigma, r_\sigma) = 1 + t^2k^2(\sigma),\ F = (\rho_\sigma, \rho_\tau) = 1,$ ، $G = 1$. نرى ان الشكل التربيعي لِـ P_2 لا يتعلق بالإنحناء $k(\sigma)$ للخط L غير انه يوجد منحن مستو $\tilde{L}$ بنفس الانحناء $k(\sigma)$ تابع للقوس σ (ي 24.16). يوافق هذا السطح السطح المؤلف من المماسات، وهو سطح مستو وفي نفس الوقت ايزومتري مع السطح P_2 لأن له نفس الشكل التربيعي الاول، وبالتالي فإن P_2 ايزومتري مع المستوى، إذن فإن انحناءه الكلي منعدم.

نشير الي أن هذا الاستدلال يبقى قائما إذا كان المنحنى L في أي فضاء اقليدي (وحتى هيلبرتي).

لنثبت ان الوصف المقدم يستنفد، في R_3 ، كل السطوح التي لها انحناءات كلية منعدم.

نظرية. يكون كل سطح P انحناؤه الكلي منعدم وواقع في R_3 ، اما اسطوانة واما مخروطا واما سطح المماسات لمنحن ايسري.

البرهان. بما ان السطح المعبر P يقع في R_3 ، يمكننا ادخال على اي جزء منه شبكة احداثيات مؤلفة من خطوط انحناء (92.5 ـ أ) إن الجداء k_1k_2 لإنحناءين رئيسيين k_1 و k_2 منعدم اينما كان على P فرضا إذا كان الانحناءان الرئيسيان k_1 و k_2 منعدمين على الجزء المعتبر فإن كل مقطع ناظمي له انحناء منعدم، وعليه تتكون كل شبكة عمودية من خطوط انحناء وإذا كان احد الانحناءات في نقطة منعدم فإن يبقى كذلك في جوار لهذه النقطة، وتتعين في هذه الحالة شبكة خطوط الانحناء بطريقة وحيدة (92.5 ـ أ).

نفرض ان الوسيط u يتغير على طول خطوط الانحناء الموافقة للمناحي الرئيسية بانحناء $k_1 = 0$ ويتغير الوسيط w على طول الخطوط المتعامدة. إن الشكل التربيعي الاول ضمن الاحداثيات u وv هو $E\,du^2 + G\,dv^2$ ، اما الشكل الثاني فهو $L\,du^2 + N\,dv^2$. بما ان الانحناءين الرئيسيين $k_1 = 0$ و k_2 جذران للمعادلة $(L - \mu E)(N - \mu G) = 0$ فإن $L = k_1 E = 0$ ، ومنه يأتي $(m_u, r_u) = -(m, r_{uu}) = -L = 0, (m_u, r_v) = -(m, r_{uv}) = -M = 0$ إذن $m_u = 0$ وهكذا يبقى الشعاع m ثابتا على كل خط v=ثابتا. حينئذ يكون للمستوى الماس للسطح P نفس التوجيه على طول الخط v=ثابتا،

وبالتالي فهو مثبت لأن العلاقة $(m, r)_u = (m, r_u) = 0$ تستلزم (m, r_0) =ثابتا=(m,r) (حيث r_0 شعاع ابتدائي مثبت)، وهذا يعني ان $r - r_0$ يقع في المستوى الماس Π_0 المار بالنقطة r_0 . إذن فإن كل خط v=ثابتا، أي $m_u = 0$ ، فإن,on a $(m_v)_u = (m_u)_v = 0$, والشعاع m_v هو أيضا ثابت على الخط w=ثابتا. يقع هذا الشعاع m_v في المستوى الماس، أي في المستوى Π_0 ، لأنه عمودي على الخط w=ثابتا نظرا لكون $(m_v, r_u) = (m, r_u)_v - (m, r_{uv}) = 0 - M = 0.$ نرى ان الناظم على الخط w=ثابتا يحتفظ بمنحاه في المستوى Π_0 ، لكن ذلك لا يكون ممكنا إلا إذا كان الخط v=ثابتا مستقيما.

نستخلص ان كل السطح P مؤلف من الخطوط المستقيمة التي تمثل الخطوط الاحداثية v=ثابتا. نقول عن مثل هذه السطوح إنها **مسواة**. لا نستطيع القول بأن كل سطح مسوّى له انحناء منعدم (مثلا، السطح اللولبي سطح مسوى لكن انحناءه سالب، 72.5 ـ ر). نستعمل مرة اخرى كون الخوط الاحداثية u=ثابتا و v=ثابتا تعين عند كل نقطة المناحي الرئيسية. لنثبت نقطة B على السطح P ولتكن $\rho = \rho(v) = r(u, v)$ معادلة خط الاحداثيات l (u=ثابتا) المار بـB عموديا على المستقيم ذي الاحداثيات v=ثابتا، ولكن e=e(v) الشعاع الواحدي الذي له عند كل نقطة من

الخط L اتجاه الشعاع $r_u = r_u(v)$. من الواضح ان $e(v) = \alpha(v) r_u(v)$. وبالتالي $e_v = \alpha r_{uv} + \alpha_v r_u$ ، $(e_v, m) = \alpha(r_{uv}, m) + \alpha_v(r_u, m) = 0$ ، ويقع الشعاع e_v في المستوى الماس للسطح P.

إذا كان $e_v \equiv 0$ فإن e(v)=e شعاع ثابت ويمثل السطح P باكمله الاسطوانة ذات الدليل $\rho = \rho(v)$ وذات الشعاع المولد f إن كان $e_v \neq 0$ ، يقع الشعاع e_v في المستوى الماس للسطح P ويقبل التفكيك:

$$e_v = \lambda(v) e(v) + \mu(v) \rho_u(v).$$

إن المعامل $\mu(v)$ ليس مطابقا للصفر هنا. ولولاه لكان الشعاعان e_v و e متسامتين، وبما ان مشتق شعاع واحدي عمودي على نفس الشعاع فإن ذلك يعني بأن $e_v = 0$ وهو ما يناقض الفرض. لدينا إذن $\mu(v) \neq 0$ لنثبت تابعا كيفيا g(v) (قابلا للإشتقاق) ونعتبر المنحنى $\beta = \{q(v) = \rho(v) + g(v) e(v)\}$. الواقع على السطح P. لدينا:

$$q_v = \rho_v + g_v e + g e_v = (1 + g\mu) \rho_v + (g_v + \lambda g) e. \quad (1)$$

نضع $g(v) = -\frac{1}{\mu(v)}$. حينئذ ينعدم الحد الاول في الطرف الثاني من (1) إن كان الامر كذلك فيما يخص الحد الثاني، فإن الشعاع q(v) ثابت، أي $q(v) = q_0$ تمر كل مولدة $p(v)+te(v)$ $(-\infty < t < \infty)$ في هذه الحالة بالنقطة الثابتة q_0 من اجل $t = g(v) = -\frac{1}{\mu(v)}$ ؛ نجد هنا مخروطا. تبقى الحالة التي يكون فيها $g_v + \lambda g \neq 0$ إن المنحنى β من اجل هذا الاختيار للتابع g(v)، ماس عند كل نقطة للمولدة المذكورة يعني ذلك ان كل مستقيم v=ثابتا على السطح P للخط β بعبارة اخرى أن P يمثل سطح المماسات للمنحنى β. انتهي البرهان على النظرية.

نلاحظ انه توجد حتى في R_4 ، سطوح ثنائية البعد ايزومترية للمستوى لكنها لا تنتمي الى الانماط المعتبرة هنا في R_3 ، (راجع التمرين 14).

45.5 . نورد هنا ايضا مثالا لسطح ثنائي البعد انحناؤه ثابت وسالب. خلافا لكل الامثلة الواردة سابقا، فإن المسافة على هذا السطح غير مأخوذة عن الفضاء الاقليدي الذي يحوي السطح.

أ . نتناول في الفضاء الثلاثي البعد الاقليدي R_3 الشكل التربيعي غير المحدد:

$$\langle r, r\rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad (r = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$$

الموافق للشكل الثنائي الخطية المتناظر:

$$\langle r^{(1)}, r^{(2)}\rangle = x_1^{(1)}x_1^{(2)} + x_2^{(1)}x_2^{(2)} - x_3^{(1)}x_3^{(2)}.$$

نقول عن شعاع r إنه **شبه حقيقي** إذا كان $\langle r,r\rangle>0$، وانه **شبه تخيلي** (أو شبه خيالي) إذا كان $\langle r,r\rangle<0$، وانه **متساوي الاتجاه** إذا كان $\langle r,r\rangle=0$ يبقى شعاع شبه حقيقي (شبه تخيلي، متساوي الاتجاه على التوالي) شبه حقيقي (شبه تخيلي، متساوي الاتجاه على التوالي) لدى ضربه في أي عدد حقيقي $(\neq 0)$ نقول عن شعاع شبه حقيقي r انه **موحد** إذا كان $\langle r,r\rangle=1$ كما نقول عن شعاع شبه تخيلي r إنه **موحد** إذا كان $\langle r,r\rangle=-1$. يمكن توحيد أي شعاع شبه حقيقي (شبه تخيلي) r وذلك بضربه في عدد موجب مناسب.

نقول عن شعاعين $r^{(1)}, r^{(2)}$ إنهما **شبه متعامدين** إذا كان $\langle r^{(1)}, r^{(2)}\rangle = 0$ ؛ بصفة خاصة فإن كل شعاع متساوي الاتجاه متعامد مع نفسه. إذا كان شعاع غير متساوي الاتجاه r شبه متعامد على بعض الاشعة p ، q ، ... فإنه لا يتعلق خطيا بتكل الاشعة لأن العلاقة $r = C_1p + C_2q + \dots$ تستلزم العلاقة $\langle r, r\rangle = C_1\langle r, p\rangle +$

$$+ C_2\langle r, q\rangle + \dots = 0.$$

إذا تعلق شعاع $r=r(t)$ (بكيفية قابلة للإشتقاق) بوسيط t فإن الشعاع $dr = r_t\, dt$ يقع على المستقيم الماس للمنحنى الموافق لذلك (في

نقطة الاشتقاق). إذا تعلق شعاع بوسيطين u وv وعيّن سطحاP، فإن الشعاع $dr = r_u\, du + r_v\, dv$ يقع في المستوى الماس للسطح P إذا كان شعاعان $r^{(1)}$ و $r^{(2)}$ تابعين قابلين للإشتقاق لبعض الوسيطات، فإن

$$d\langle r^{(1)}, r^{(2)}\rangle = \langle r^{(1)}, dr^{(2)}\rangle + \langle dr^{(1)}, r^{(2)}\rangle,$$

وبصفة خاصة:

$$d\langle r, r\rangle = 2\langle r, dr\rangle.$$

يمثل السطح:

$$\langle r, r\rangle \equiv x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -Q^2 \quad (Q>0) \qquad (1)$$

الذي ينبغي تسميته «**سطح كرة شبه تخيلي**» والذي نسمية باختصار «**شبه سطح كرة**» يمثل مجسما ناقصيا من جزءين، احدهما يقع في نصف الفضاء $x_3 \geqslant Q$ ويقع الآخر في نصف الفضاء $x_3 \leqslant -Q$. سوف لن نعتبر سوى الجزء العلوي منهما الذي نرمز له بـP باشتقاق المعادلة $\langle r, r\rangle = -Q^2$ نجد $\langle r, dr\rangle = 0$. يعني ذلك ان الشعاع r شبه متعامد عله المستوى الماس للسطح P المار بموصل r يمكن القول ان الشعاع r **شبه ناظمي** على P. إن الشعاع $m = r/Q$ شبه ناظمي موحد لأن $\langle m, m\rangle = \frac{1}{Q^2}\langle r, r\rangle = -1$.

نؤكد على ان الشعاع dr شبه حقيقي، أي ان $\langle dr,dr\rangle>0$. بالفعل، لدينا:

$x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 - x_3\, dx_3 = \langle r, dr\rangle = 0$ ؛ ثم إن:

$$(x_3\, dx_3)^2 = (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(dx_1^2 + dx_2^2) =$$
$$= (x_3^2 - Q^2)(dx_1^2 + dx_2^2) \leqslant x_3^2 (dx_1^2 + dx_2^2),$$

ومنه يأتي:

$$dx_3^2 \leqslant dx_1^2 + dx_2^2, \quad \langle dr, dr\rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \geqslant 0,$$

وهو المطلوب.

وهكذا، فإن الشكل التربيعي $\langle dr,dr\rangle$ على السطح P (على

وجه التحديد في المستوى الماس لِـP عند كل نقطة مثبتة) معرف موجب. نختار هذا الشكل كشكل متري للسطح P يعني ذلك ان ادخال الوسيطين u_1 و u_2 بشكل كيفي على السطح P يضع:

$$ds^2 = g_{11}\, du_1^2 + 2g_{12}\, du_1\, du_2 + g_{22}\, du_2^2,$$

حيث

$$g_{ij} = \langle r_i,\ r_j\rangle \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

ب. ليكن الآن P أي سطح يعرّف من اجلها الشكل <r,r> الشكل الموجب ds^2 . نعتبر عند كل نقطة من السطح P أشعة الاساس r_1, r_2 في المستوى الماس والشعاع الواحدي شبه الناظمي n. يمكن كما هو الحال في 13.5، كتابة دساتير الاشتقاق

$$\left\{\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} r_k + \widetilde{\beta}_{ij} m, \\ m_j &= \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\beta}_{j}^{k} r_k, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

حيث يبين الرمز ~ أن المعامل الموافق له محسوب من اجل السطح المعرفة مسافتة بالشكل <r,r>. نضرل، شبه ضرب، العلاقتين السابقتين في r_s وm فنجد:

$$\langle r_{ij},\ r_s\rangle = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} \langle r_k,\ r_s\rangle = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\Gamma}_{ij}^{k} g_{ks},$$

$$\langle r_{ij},\ m\rangle = -\widetilde{\beta}_{ij},$$

$$\langle m_j,\ r_s\rangle = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\beta}_{j}^{k} \langle r_k,\ r_s\rangle = \sum_{k=1}^{2} \widetilde{\beta}_{j}^{k} g_{ks} = -\langle m,\ r_{js}\rangle,$$

لأن الشعاع r_s يقع في المستوى الماس ولأن العلاقة $\langle m, r_s\rangle = 0$ تستلزم:

$$0 = \langle m,\ r_s\rangle_j = \langle m_j,\ r_s\rangle + \langle m,\ r_{js}\rangle.$$

تكتب الكميات $\langle r_{ij},\ r_s\rangle = \widetilde{\Gamma}_{ij,\ s}$ بدلالة معاملات الشكل التربيعي الاول g_{ij} كما ورد في 13.5(11):

$$\widetilde{\Gamma}_{ij,s}=\langle r_{ij},\ r_s\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{js}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s}\right).$$

ينتج عن ذلك ان المعاملات $\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ تكتب هي الاخرى بدلالة معاملات الشكل التربيعي الاول:

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\sum_{s=1}^{2}\widetilde{\Gamma}_{ij,s}g^{ks},\quad \|g^{ks}\|=\|g_{ij}\|^{-1}.$$

نلاحظ ان المعلومات Γ_{ij}^{k} في الدستور العام للانحناء الكلي «الشكلي» لسطح ثنائي البعد P (33.5(2)):

$$K=\frac{\sum_{s=1}^{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{11}^{s}}{\partial u_2}-\frac{\partial\Gamma_{12}^{s}}{\partial u_1}+\sum_{p=1}^{2}(\Gamma_{11}^{p}\Gamma_{2p}^{s}-\Gamma_{21}^{p}\Gamma_{1p}^{s})\right]g_{s2}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^{2}},$$

تُحسب بدلالة g_{ij} بواسطة الدساتير:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u_j}-\frac{\partial g_{js}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_s}\right)g^{ks}.$$

نرى، في حالتنا هذه انه يمكن وضع $\Gamma_{ij}^{k}=\widetilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ في الدستور (3) لحساب K. نذكر الآن من اجل سطح اقليدي، أن البسط في (3) نحصل عليه بكتابة المساواة بين العبارتين r_{ikj} و r_{jki}، وباستخدام دساتير الاشتقاق وبفصل المركبة وفق شعاعي الاساس الواقعين في المستوى الماس. تجرى كل هذه العمليات، بدون أي تغيير، في دساتير الاشتقاق (2)، وبعدها نحصل كما هو الحال في 23.5(7)، على:

$$\widetilde{\beta}_{jk}\widetilde{c}_{il}-\widetilde{\beta}_{ik}\widetilde{c}_{jl}=\sum_{s=1}^{2}\left[\frac{\partial\Gamma_{ik}^{s}}{\partial u_j}-\frac{\partial\Gamma_{jk}^{s}}{\partial u_i}+\sum_{p=1}^{2}(\Gamma_{ik}^{p}\Gamma_{jp}^{s}-\Gamma_{jk}^{p}\Gamma_{ip}^{s})\right]g_{ls},$$

حيث

$$\widetilde{\beta}_{ij}=-\langle r_{ij},\quad m\rangle,\quad \widetilde{c}_{ij}=\sum_{k=1}^{2}b_i^k g_{jk}.$$

نرمز أيضا بـ $\widetilde{b}_{ij}=\langle r_{ij},\ m\rangle.$ لدينا عندئذ:

$$K=\frac{\widetilde{b}_{12}^{2}-\widetilde{b}_{11}\widetilde{b}_{22}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^{2}}.$$

(نذكر في الحالة الاقليدية، ان لدينا: $\widetilde{\beta}_{ij}=\langle r_{ij},\ m\rangle$ مكان $\widetilde{\beta}_{ij}=-\langle r_{ij},\ m\rangle$ التي أدت الى العبارة $b_{11}b_{12}-b_{12}^{2}$ في بسط النتيجة).

جـ . لحد الآن فإن الحساب قائم من اجل أي سطح ثنائي البعد يعرف عليه الشكل <r,r> الشكل الموجب ds^2 .

نحسب الآن المعاملات $\tilde{b}_{ij}$ من اجل شبه سطح الكرة. لدينا في هذه الحالة $r = Qm$ و :

$$r_j = Qm_j = Q\sum \tilde{b}_j^k r_k,$$

بحيث أن:

$$\tilde{b}_j^k = \begin{cases} 1/Q & \text{pour} \quad j = k, \\ 0 & \text{pour} \quad j \neq k. \end{cases}$$

ينتج عن ذلك أن:

$$\tilde{b}_{ij} = \langle r_{ij}, \quad m\rangle = -\sum_{k=1}^{2} \tilde{b}_j^k g_{ik} = -\frac{1}{Q} g_{ij}.$$

(نذكّر، من اجل سطح كرة نصف قطرها R ، انه كان لدينا $b_{ij} = \frac{1}{R} g_{ij}$ (42.5 ـ د) ضمن كل جملة احداثيات).

اخيرا :

$$K = \frac{1}{Q^2} \frac{g_{12}^2 - g_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{1}{Q^2},$$

وبذلك نرى ان السطح P بالمسافة $\langle dr, dr\rangle$ هو بالفعل سطح انحناؤه الكلي ثابت وسالب.

§ 6.5 انسحاب الاشعة ونظرية لوفي ـ سيفيتا (Levi-Civita).

16.5 . انسحاب شعاع على سطح. عندما نسحب شعاع ماس لسطح في الفضاء، فإن هذا الشعاع لا يبقى ماسا للسطح عموما. نعرّف في الهندسة التفاضلية مفهوما جديدا للإنسحاب لا يتعلق في الفضاء الذي يحوي السطح بل يتعلق بالسطح ذاته.

نفرض ان لدينا على سطح $P_n \subset R_{n+1}$ خطا قابلا للإشتقاق:

$$L = \{r = r(u), \ u = (u_1, \ldots, u_n) = u(t), \ a \leqslant t \leqslant b\}$$

وعند كل نقطة من هذا الخط، شعاعا $a(t)$ في المستوى الماس Π_n، قابلا للإشتقاق بالنسبة لـ t بحيث ان $a(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, r_i(u(t))$ حيث تمثل $a_i(t)$ توابع قابلة للإشتقاق. نبحث عن تفاضلية الشعاع $a(t)$ الموافق للإنتقال الى النقطة $t+dt$. لدينا:

$da=\sum_{k=1}^{n} r_k\, da_k+\sum_{i,j=1}^{n} a_i r_{ij}\, du_j$، ومن دستور غوس 13.5 (1) يأتي:

$$(1)\quad da=\sum_{k=1}^{n} r_k\, da_k+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k} r_k+b_{ij} m\Big) a_i\, du_j=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}\big(\Gamma_{ij}^{k} a_i\, du_j+da_k\big) r_k+\Big(\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} a_i\, du_j\Big) m.$$

يسمى الحد الاول من هذا المجموع **التفاضلية الجيوديزية** للشعاع $a(t)$ ونرمز له بـ Da. اما الحد الثاني فيسمى **التفاضلية القسرية** للشعاع $a(t)$. نلاحظ ان مركبات التفاضلية الجيوديزية، ندرك ذلك من خلال بنياتها، تتعلق بـ a_i, du_i, da_i لكنها لم تعد تتعلق بالرموز Γ_{ij}^{k}، وعليه فهي لا تتغيّر من خلال ايزومترية للسطح P_n. اما المركبة وفق الناظم اي التفاضلية القسرية فهي تتعلق بمعاملات الشكل التربيعي الثاني، وتتغيّر عموما مع ايزومتريات السطح.

26.5 . أ . نقول اننا اجرينا **انسحابا** للشعاع $a(t)$، أو على وجه التحديد ان الشعاع $a(t)$ **انسحب جيوديزيا** على طول الخط L اذا انعدمت تفاضليته الجيوديزية عند كل نقطة من الخط L. بعبارة اخرى، ينسحب الشعاع $a(t)$ إذا تفاضليته الكلية الى تفاضلية القسرية. بعد هذا يتضح ان مفهوم إنسحاب شعاع على طول خط ينتمي الى الهندسة المميزة للسطح وهو لا يتعلق بالتحويلات الايزومترية. ان مركبات شعاع مسحوب يحقق، كما نرى ذلك بفضل المساواة (1) وتعريف الانسحاب، الجملة التالية من المعادلات التفاضلية:

$$da_k=-\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k} a_i\, du_j,\quad k=1,\ \ldots,\ n,$$

أي

$$\frac{da_k}{dt} = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k a_i(t) \frac{du_j}{dt}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

تمثل هذه الجملة جلة معادلات تفاضلية عادية بالنسبة للتوابع $a_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ بمعملات معروفة (على طول سبيل معطى). يتبين من النظرية الاساسية لوجود ووحدانية حل مثل هذه الجملة ان المعطيات الابتدائية $a_k(t_0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ تعيّن بطريقة وحيدة نتيجة الانسحاب على الاقل في جوار النقطة الابتدائية.

ب. قدمنا تعريف الانسحاب من اجل سطح P_n بعده n في الفضاء R_{n+1} ؛ اما الآن، وبما ان التعريف قد صيغ بلغة الهندسة المميزة (للسطح) فإنه يمكننا اعادة نفس التعريف من اجل سطح P_n مسافته معطاة بشكل كيفي ds^2 ؛ مثلا إذا كان السطح P_n . واقعا في فضاء اقليدي $R_q, q > n$ ، يمكن استعادة مسافة P_n من هذا الفضاء (كما ورد في 61.5) ويعرّف الانْسحاب بصفة طبيعية.

جـ. لكين $L \subset P_n$ خطا جيوديزيا و a شعاعا واحديا ماسا للخط L . إذا كان نصف القطر الشعاع r للخط L معطى بدلالة وسيط طبيعي s أي طول القوس $r = r(s)$ ، فإنه يمكننا ملاحظة ان $a = a(s) = \frac{dr}{ds} = \sum r_k \frac{du_k}{ds}$ بحيث ان $a_k(s) = \frac{du_k(s)}{ds}$. بنقل هذه العبارة الى معادلة الجيوديزية 24.5 (2):

$$\frac{da_k(s)}{ds} = \frac{d^2u_k(s)}{ds^2} = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds} = -\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k a_i \frac{du_j}{ds},$$

نرى ان الشعاع $a(s)$ يحقق شرط الانسحاب. إذن، فإن الشعاع الواحدي الماس لخط جيوديزي L مسحوب على طول هذا الخط.

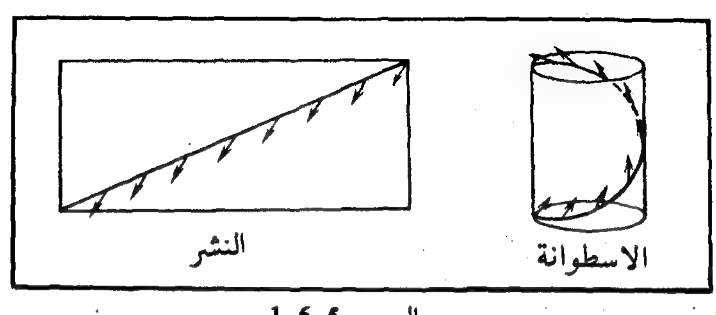
د. اذا انسحب شعاعان $a(t)$ و $b(t)$ على طول خط $L \subset P_n$ فإن جداءهما يبقى، عموما، ثابتا. ينتج ذلك من كوْن $d(a, b) = (da, b) + (a, db) = 0$ لأن تفاضليات الاشعة الخاضعة للإنسحاب ترد الى تفاضليات قسرية وهي ناظمية على السطح الماس.

يـأتي مــن ذلــك ان الانسحــاب يحتفــظ بطــول الشعــاع $|a(t)| = \sqrt{(a(t), a(t))}$ وبالزاوية التي يشكلهـا شعـاعـان، المسـاويـة لـ $\frac{(a(t), b(t))}{|a(t)||b(t)|}$

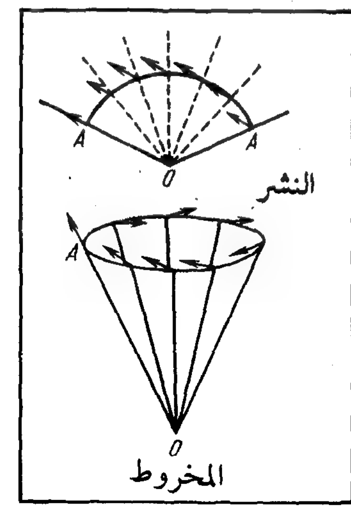
ر. نلاحظ انه لا وجود، على المستوى P_n ذي البعد n ، للتفاضليات القسرية، وترّد التفاضلية الكلية لشعاع $a(t)$ الى تفاضليته الجيوديزية؛ اذا انعدمت هذه الاخيرة، فإن الامر كذلك فيما يخص التفاضلية الكلية، وهذا يعني بأن الشعاع $a(t)$ لا يتغيّر لدى القيام بإنسحاب بمفهومه التقليدي.

س. يمكن انجاز الانسحاب على اسطوانة وعلى مخروط في R_3 بنشر هذين السطحين على المستوى وبالقيام بالانْسحاب على هذا المستوى. وهكذا فإن كل شعاع مسحوب $a(t)$ على اسطوانة يحتفظ بالزاوية التي يشكلها مع كل مولدة او خط عرض (الرسم 5 .6ـ1). اما على المخروط فتواجهنا صعوبة غير منتظرة: نفرض ان لدينا شعاعا موجها في البداية وفق مولدة ومسحوبا على طول الدائرة المديرة؛ إن هذا الشعاع يعود الى نقطة البدء بتشكيل زاوية مع المولدة، وهو ما نستطيع ادراكه مباشرة بمعالجة نشر المخروط على المستوى (الرسم 5 .6ـ2).

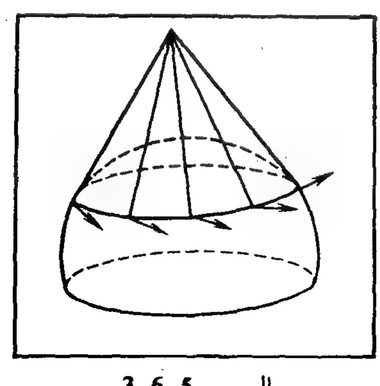
ص. تحدث ظاهرة مماثلة لدى. انسحاب شعاع على طول خط عرض على سطح الكرة على الرغم من انه يستحيل نشر سطح الكرة على المستوى فإن بمقدورنا إنشاء مخروط ماس لسطح الكرة على طوال خط العرض، لأن سطح الكرة وهذا المخروط يملك نفس المستويات الماسة عند نقاط خط العرض، ولان الانسحاب يتعين تماما بالمستويات الماسة على طول سبيل الانسحاب إذن فإن النتيجة هي نفسها سواء تعلق الامر بسطح الكرة او بالمخروط (الرسم 5 .6ـ3)



الرسم 5 .6ـ1



الرسم 5 .6ـ2


الرسم 5 .6ـ3

36. 5 . نظرية لوفي ـ سيفيتا . تبين الامثلة السابقة ان القيام بانسحاب لشعاع على طول محيط مغلق، لا يجعله يعود، عموما، الى موقعه الابتدائي، بل يصبح مدرارا بالنسبة لموقعه الابتدائي مقدار زاوية معينة. نريد هنا حساب قيمة هذه الزاوية في حالة السطح الثنائي البعد.

ندخل في الجزء المعتبر من سطح $P_2 \subset R_3$ جملة نصف جيوديزية احداثياتها w, u ، مع الشكل التربيعي الأول (5 .54 ـ أ):

$$ds^2 = dw^2 + G(w;\ u)\, du^2.$$

ليكن L محيطا مغلقا ومرنا بتقطع نقوم عليه بانسحاب للشعاع الواحدي ρ في الاتجاه الموجب اي من الشعاع $r_1 \equiv r_w$ الى الشعاع $r_2 \equiv r_u$ ، او، والقولان متكافئان، من الاتجاه الموجب للخط $u =$ ثابتا

نحو الاتجاه الموجب للخط $w=$ ثابتا). نرمز بـ S للساحة التي يحيط بها L على السطح P_2 ، وبـ ω للزاوية التي يشكلها الشعاعان ρ و r_w محسوبة ابتداء من الشعاع r_w في الاتجاه الموجب (الرسم 4-6.5). نهتم بالكمية:

$$\Delta\omega = \oint_L d\omega.$$

لما كان $(\rho, r_w) = \cos\omega$ فإن $-\sin\omega\, d\omega = (d\rho, r_w) +$ $+ (\rho, dr_w) = (\rho, Dr_w)$ لأن التفاضلية القسرية للشعاع المسحوب ρ هي الوحيدة التي قد تكون غير منعدمة، أما فيما يخص الشعاع r_w فإن التفاضلية الجيوديزية هي الوحيدة التي تؤخذ في الحسبان. يمكن حساب التفاضلية الاخيرة حسب الدستور (راجع 16.5).

$$Da = \sum_{k=1}^{2}\left(da_k + \sum_{i,\,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{k} a_i\, du_j\right) r_k.$$

لدينا في هذه الحالة $a = r_w$ ، بحيث ان $a_1 = 1,\ a_2 = 0$ ، إذن

$$Dr_w = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\Gamma_{1j}^{k}\, du_j \cdot r_k.$$

ثم لدينا، ضمن جملة نصف جيوديزية (54.5 ـ أ): $\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{11}^{2} = 0,\ \Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{2}\frac{G_w}{G}$ ؛ اخيرا:

وهكذا:

$$Dr_w = \frac{1}{2}\frac{G_w}{G}\, du \cdot r_u.$$

$$-\sin\omega\, d\omega = \left(\rho,\ \frac{1}{2}\frac{G_w}{G}\, du \cdot r_u\right) = \frac{1}{2}\frac{G_w}{G}\, du \cdot \sin\omega \cdot \sqrt{G},$$

ومنه يأتي:

$$d\omega = -\frac{1}{2}\frac{G_w}{\sqrt{G}}\, du$$

وَ:

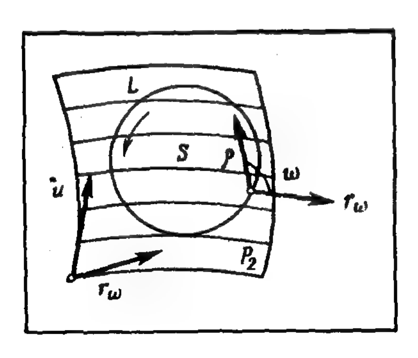
$$\Delta\omega = \oint_L d\omega = -\frac{1}{2}\oint_L \frac{G_w}{\sqrt{G}}\, du.$$

نحوّل العبارة المحصل عليها حسب دستور غرين 61.4(3)؛ عندما نتذكّر بعد ذلك ان العنصر dS من السطح P_2 . يحسب بفضل الدستور $dS = \sqrt{EG - F^2}\, dw\, du = \sqrt{G}\, dw\, du$ ، نحصل في الاخير على:

$$\Delta\omega = \oint_L d\omega = -\frac{1}{2}\oint_L \frac{G_w}{\sqrt{G}}\, du = -\frac{1}{2}\iint_S \left(\frac{G_w}{\sqrt{G}}\right)_w dw\, du =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_S \left(\frac{G_{ww}}{\sqrt{G}} - \frac{1}{2}\frac{G_w^2}{\sqrt{G^3}}\right)\frac{dS}{\sqrt{G}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_S \left(\frac{G_{ww}}{G} - \frac{1}{2}\frac{G_w^2}{G^2}\right) dS = \iint_S K\, dS,$$



الرسم 5 .6_4

وذلـك بفضـل دسـتـور الانحنـاء الكلي في جملـة نصـف جيـوديـزيـة للإحداثيات 5 .54(1). نصل إذن الى النظرية التالية:

نظرية (لوفى ـ سيفيتا). عند القيام بالحساب على طول محيط مغلق L (صغير بكفاية)، يخضع كل شعاع لدوران زاويته تساوي تكامل الانحناء الكلي للسطح على الساحة S المحاطة بـ L.

5 .46 . يمكن ان تكون للمحيط L نقاط زاويته لنعتبر محيطا L مشكلا من الخطوط الجيوديزية الثلاثة التي تشكل الزوايا α β γ في نقاط التقاطع المتوالية B ، A ، C (الرسم 5 .6_5). اضافة الى شعاع واحدي ρ مسحوب على طول المحيط L . نعتبر شعاعا واحديا ثانيا e يتحرك حسب القاعدة التالية: منطلق الشعاعين ρ و e في اللحظة الابتدائية في الرأس A. وهما

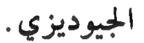
موجهان على طول الضلع AB ؛ ثم ينسحبان على طول AB حتى الرأس B ؛ يخضع هنا الشعاع e الى دوران في الاتجاه الموجب بزاوية $\pi - \beta$ ، ويصبح ماسا للضلع BC ؛ ينسحب بعدها الشعاعان e و ρ على طول الجيوديزية BC حتى الرأس C حيث يدور الشعاع e مقدار الزاوية $\pi - \gamma$ ويصبح ماسا للضلع CA ؛ اخيرا ينسحب الشعاعان ρ و e على طول الجيوديزية CA حتى الرأس A حيث يدور الشعاع e بمقدار الزاوية $\pi - \alpha$ فيجد موقعه الابتدائي. بما ان الانسحاب لا يغيّر زاوية شعاعين (26.5 ـ د) فإن الانحراف النهائي للشعاعين ρ و e سيكون راجعا فقط لدوران الشعاع e في الرؤوس A, B, C وهو يساوي الكمية $3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. يتبين في الاخير ان الدوران $\Delta\omega$ للشعاع ρ يجعل انحراف الشعاع e عن موقعه الابتدائي مساويا لـ$\Delta\omega + 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ لكننا رأينا بان الشعاع e يعود الى موقعه الابتدائي، وان دورانه الكلي هو 2π . نحصل إذن على المعادلة:

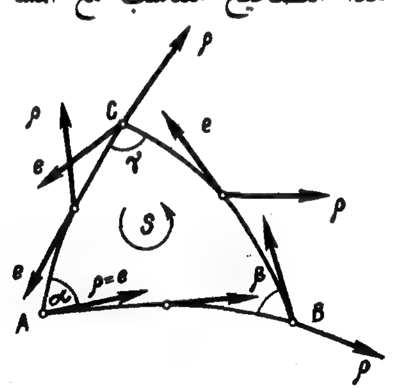
$$2\pi = \Delta\omega + 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma),$$

ومنه يأتي:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \Delta\omega = \pi + \iint_S K\, dS.$$

اثبتنا بذلك **نظرية غوس**: إن مجموع زوايا مثلث جيوديزي ABC يساوي زاويتين قائمتين بتقدير تصحيح، ويكون هذا الاخير موجبا على سطح انحناؤه موجب وسالب على سطح انحناؤه سالب؛ اما اذا على سطح انحناؤه ثابت فإن هذا التصحيح متناسب مع المساحة المحصورة بالمثلث الجيوديزي.





الرسم 5_6.5

تمارين

1 .اكتب عبارة المنحنى الكلي من اجل السطح $z = z(x, y)$.

2 .نفس السؤال فيما يخص السطح المعطى بمعادلة ضمنية $F(x, y, z) = 0$.

3 . نفس السؤال من اجل السطح ذي الشكل المتري $ds^2 = \varphi(u, v) \times (du^2 + dv^2)$.

4 .هناك جماعة سطوح دورانية نحصل عليها لدى انسحاب احدها على طول محور دورانه. ننشيء سطحا جديدا دورانيا له نفس المحور، عموديا على سطوح الجماعة المتعبرة. برهن على ان انحناء غوس K للسطح الجديد يحقق العلاقة $K = -\bar{K}$ حيث يمثل $\bar{K}$ انحناء غوس لسطح الجماعة المار بنفس النقطة.

5 . اوجد الانحناء الجيوديزي لخطوط الطول والعرض على سطح دوراني.

6 . إن خط الانقباض على الكاتينويد هو جيوديزية لهذا السطح. صف الجيوديزية γ المارة بنقطة $A(\rho, \varphi)$ لا تنتمي الى خط الانقباض وتشكل مع خط الطول زاوية ω بحيث يكون $\rho \sin \omega = \rho_0$ ، حيث يمثل ρ_0 نصف قطر خط الانقباض؟ المطلوب مراعاة كوْن الجيوديزية لا يمكن ان تكون ماسة لخط الانقباض استنادا الى نظرية الواحدانية الخاصة بالجيوديزيات، ولا عمودية على هذا الخط استنادا الى نظرية كليرو، تمنع النظرية الاخيرة حتى عن الجيوديزية ان تكون ماسة لخط عرض آخر للكاتينويد.

7 . صف خطوط العرض على سطح دوراني كيفي التي تسلك بجوارها الجيوديزيات سلوكا مماثلا للذي ورد في التمرين 6.

8 . ليكن L سطحا مسوّى $r(u, v) = R(u) + vl(u)$ (أو، والقولان متكافئان، جماعة وحيدة الوسيط من المستقينات $\lambda(u)$). نبحث من اجل مستقيمين $\lambda(u)$ و $\lambda(u + \Delta u)$ قريبين من بعضهما وينتميان الى الجماعة المعتبرة، عن نقطة $M(u, \Delta u)$ على $\lambda(u)$ تتحقق عندها القيمة الصغرى للمسافات

بين $\lambda(u)$ و $\lambda(u+\Delta u)$ (نفرض ان ليس هناك مستقيمات متوازية من بين المستقيمات $\gamma^{(n)}$). اثبت ان النقطة $M(u, \Delta u)$ تؤول، عند مآل Δu الى 0، الى موقع نهاية $M(u)$ («مركز» المستقيم $\lambda(u)$). يشكل المحل الهندسي للمراكز خط انقباض السطح L .

9 . يقطع خط انقباض مجسم ناقصي ذي جزء واحد مولداته ويشكل معها زاوية حادة. المطلوب، إن كان خط انقباض سطح مسوّى عموديا على المولدات، اثبات ان كل خط آخر عمودي على المولدات يقطع هذه الموالدات بشكل يجعل نقاط التقاطع تلك ونقاط تقاطع خط الانقباض مع المولدات تعرّف قطع مستقيمة (على المولدات) متساوية.

10 . (تتمة) اثبت ان السطح المسوّى الوحيد الذي له انحناء متوسط منعدم هو السطح اللولبي.

11 . برهن على انه اذا كان احد الانحناءات الرئيسية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots d$ لسطح S في R_n ثابت، فإن هذا السطح هو مغلف جماعة سطوح كروية لها نفس نصف القطر (او جماعة مستويات)؛ زيادة على ذلك فإنه لا يوجد اي سطح له انحناءان رئيسيان ثابتان وغير منعدمين ومختلفين (أ. كوستوتشنكو Kostutchenko).

12 . برهن، من اجل نقطة عادية M على سطح $S \subset R_n$ ، على انه يوجد جوار U لها بحيث تمر بكل نقطة A من U جيوديزية وحيدة تنطلق من النقطة M .

13 . برهن، من اجل نقطة عادية M على سطح $S \subset R_n$ ، على انه يوجد جوار U بحيث تمر جيوديزية وحيدة بكل نقطتين A و B من U، يكون قوسها الذي يصل A و B محتويا باكمله في U.

14 . ليكن السطح S في الفضاء $R_4 = R_2^{(1)} + R_2^{(2)}$ المعرف بـ:

$$R(u, v) = r(u) + \rho(v), \quad r(u) \in R_2^{(1)}, \quad \rho(v) \in R_2^{(2)},$$

حيث يرسم $r(u)$ و $\rho(v)$ بشكل مستقل الواحد عن الآخر

منحنيين مثبتين في المستويين $R_2^{(1)}$ و $R_2^{(2)}$ على التوالي اثبت ان السطح S ايزومتري مع المستوى، لكنه قد لا يحوي أية قطعة مستقيمة.

15 . ليكن السطح ذو البعد p في R_n :

$$\pi_p = \{ r = \{ x_1(u), \ldots, x_n(u) \} \quad u = (u_1, \ldots, u_p) \in G \subset R_p \} \subset R_n$$

المقطع الناظمي الاولي للسطح π_p عند النقطة $M \in \pi_p$ ، من اجل شعاع ماس $dr = \{ dx_1, \ldots, dx_n \}$ وشعاع ناظمي m ، هو تعريفاً منحنى تقاطع السطح π_p مع المستوى الثنائي البعد المولد عن الشعاعين dr و m . اثبت ان السطح: $\pi_2 = \{ r = \{ u_1, u_2, u_1^2, u_1^3 \} \} \in R_4$ لا يقبل اي مقطع ناظمي اولي عند النقطة (0, 0, 0, 0) من اجل الشعاع الماس $\{\widehat{10}, \widehat{00}\}$.

16 . باعتبار نفس السطح π_p والنقطة M والشعاع الماس dr ، نعرّف المقطع الناظمي التام على انه المحل الهندسي لنقاط تقاطع السطح π_p مع المستوى ذي البعد$(n - p + 1)$المولد عن الشعاع dr وكل الناظمات (البالغ عددها $n - p$) المستقلة خطيا، على السطح π_p عند النقطة M . برهن، عند نقطة عادية من السطح π_p (أي عند النقطة التي تكون فيها مرتبة $\left\| \frac{\partial x}{\partial u} \right\|$ مساويا لِـ p)، من اجل شعاع ماس dr ، على ان المقطع الناظمي التام منحنى مرن على السطح π_p .

17 . من اجل السطح π_p ، نرمز بِـ$m_{p+1}, \ldots, m_n$للجملة المتعامدة والمتجانسة المؤلفة من الناظمات عند النقطة M التي تتعلق بالوسيطات u لكيفية قابلية للإشتقاق. اثبت ان دساتير اشتقاق m_i و r_i يمكن وضعها على الشكل:

$$\frac{\partial r_i}{\partial u_j} = \sum_{s=1}^{p} \Gamma_{ij}^{s} r_s + \sum_{s=p+1}^{n} b_{ij}^{(s)} m_s, \quad i = 1, \ldots, p,$$

$$\frac{\partial m_i}{\partial u_j} = \sum_{s=1}^{p} b_j^{(i)s} r_s + \sum_{s=p+1}^{n} \gamma_j^{(i,s)} m_s, \quad i = p+1, \ldots, n,$$

حيث:

$$b_{ij}^{(s)} = (r_{ij}, m_s), \quad b_j^{(i)s} = -\sum_{q=1}^{n} b_{qj}^{(i)} g^{qs}.$$

18 . باعتبار نفس السطح π_p ، اثبت ان دستور غوس 23.5 (8) يبقى قائما إذا قصدنا بـ $R_{ij,kl}$ مجموع الاصغريات ذات الرتبة الثانية المنشأة على السطرين المعرفين بالدليلين i و j وعلى العمودين المعرفين بالدليلين k و l ، يشمل هذا المجموع كل المصفوفات $\| b_{jk}^{(s)} \|$ ، $s = p + 1, \ldots, n$.

19 .باعتبار نفس السطح π_p ، تأكد بمراعاة دساتير التمرين 17 ، من العلاقات التالية التي تعمم دساتير بيترسون 23.5 (6) وكذا 23.5 (9) و (10) :

$$\sum_{s=1}^{p} \Gamma_{ij}^{s} b_{sk}^{(\nu)} + \frac{\partial b_{ij}^{(\nu)}}{\partial u_k} + \sum_{s=p+1}^{n} b_{ij}^{(s)} \gamma_k^{(\nu,s)} = \sum_{s=1}^{p} \Gamma_{kj}^{s} b_{si}^{(\nu)} + \frac{\partial b_{kj}^{(\nu)}}{\partial u_i} + \sum_{s=p+1}^{n} b_{kj}^{(s)} \gamma_i^{(\nu,s)},$$

$$\frac{\partial b_j^{s(i)}}{\partial u_k} + \sum_{\nu=1}^{p} b_j^{\nu(i)} \Gamma_{\nu k}^{s} + \sum_{\nu=p+1}^{n} \gamma_j^{(\nu,i)} b_k^{s(\nu)} = \frac{\partial b_k^{s(i)}}{\partial u_j} + \sum_{\nu=1}^{p} b_k^{\nu(i)} \Gamma_{\nu j}^{s} + \sum_{\nu=p+1}^{n} \gamma_k^{(\nu,i)} b_j^{s(\nu)},$$

$$\frac{\partial \gamma_j^{(\nu,i)}}{\partial u_k} + \sum_{s=1}^{p} b_j^{s(i)} b_{sk}^{(\nu)} + \sum_{s=p+1}^{n} \gamma_j^{(s,i)} \gamma_k^{(\nu,s)} =$$

$$= \frac{\partial \gamma_k^{(\nu,i)}}{\partial u_j} + \sum_{s=1}^{p} b_k^{s(i)} b_{sj}^{(\nu)} + \sum_{s=p+1}^{n} \gamma_k^{(s,i)} \gamma_j^{(\nu,s)}.$$

20 . اثبت انه يمكن انشاء السطح $\pi_p \subset R_n$ ذي البعد p ، بتقدير ازاحة انطلاقا من المصفوفات $\| g_{ij} \|, \| b_{ij}^{(\nu)} \|, \| \gamma_i^{(\nu,s)} \|$ التي تحققها علاقات التمرينين 18 و19 ، وذلك بحيث يكون:

$$g_{ij} = (r_i, r_j), \quad b_{ij}^{(\nu)} = (r_{ij}, m_\nu) \quad (\nu = p + 1, \ldots, n),$$

حيث $r = r(u)$ هو نصف القطر الشعاع للسطح π_k, r_i، و $r_{ij} = \frac{\partial^2 r(u)}{\partial u_i \partial u_j}$ ، $= \frac{\partial r(u)}{\partial u_i}$ ، $m_\nu \ (\nu = p + 1, \ldots, n)$ هي الجملة المتعامدة والمتجانسة للنظامات.

21 . لدينا من اجل مخروط $K = 0$ ، فيتبين من 36.5 ان كل شعاع مسحوب على طول محيط مغلق يعود حتما الى موقعه الابتدائي. لكن هذا ليس قائما على طول محيط مغلق يعود حتما الى موقعه الابتدائي. لكن هذا ليس قائما هنا (16.5). لماذا ؟

نبذة تاريخية

طرح ج. بارنولي في رسالة الى ليبنيتز سنة 1797 ، مسألة يمكن اعتبارها أول مسألة في الهندسة التفاضلية: ما هي المنحنيات على سطح معطى، التي تنجز اصغر قيمة للمسافة (على السطح) بين نقطتين معلومتين؟ اطلق ج. بادنولي على هذه المنحنيات اسم الخطوط الجيوديزية. كانت معادلات الخطوط الجيوديزية على أي سطح قد كتبت من طرف اولر ولاغرانج خلال السنوات 1770 . وقدم اولى في نفس الوقت دستورا لتوزيع انحناء المقاطع الناظمية، كما عيّن كل السطوح الايزومترية للمستوى. ادخل مونج (1795) خطوط الانحناءات والخطوط المقاربة، وتجدد الملاحظة الى ان دوبين وموني اللذين يرتبط اسماهما بإنحناء الخطوط على السطح هما تلميذان لمونج. كان مؤلف غوس « Allgemeine Flachentheoire » (**Leipzig, 1921, Ac. Verl. Ges.**) قد لعب دور رئيسيا في تطوير النظرية الحديثة للسطوح. عرّف الكاتب فيه الشكلين التربيعيين الاساسيين والانحناء الكلي (مع التحويل الكروي) وبرهن على النظرية الخاصية بثبوت هذا الانحناء بالنسبة لرلايزومتريات. كان غوس على حق عندما اعتبر هذه النظرية من

الاهمية بمكان حتى اطلق عليها اسم « النظرية الخارقة للعادة » (Theorema egregium). إن مفهوم الهندسة المميزة للسطح الذي ادخله غوس، مفهوما قيما وهو يشير الى مجموعة الخاصيات التي يحتفظ بها السطح بالنسبة للإيزومتريات. قدم غوس ايضا وصفا مميزا للإنحناء بواسطة مجموع زوايا المثلث الجيوديزي. يشكل دستور غوس باشتقاق الاساس المؤلف من الاشعة الماسة، مع دستور الرياضي الروسي بيترسون (1853) الخاص باشتقاق الناظم(*) (كل ذلك في الشكل السلمي لأن الاشعة لم تكن قد اكتشفت بعد)، جملة المعادلات الاساسية لنظرية السطوح. اثبت بونى (1867) بفضل هذه المعادلات نظرية وحدانية السطح عندما يكون الشكلان التربيعيان الاساسيان لهذا السطح معلومين.

يبدو ان أول من لاحظ الايزومترية بين الكايتنويد والسطح اللولبي هو دينى (1865). انشأ بيلترامي (Beltrami) سنة 1872 شبه سطح الكرة. عُرّف إنسحاب شعاع على سطح محيط مغلق، عن انحناء السطح. تمثل نظرية لوفى - سيفيتا تعميا لنظرية بوني (1867)، حيث استبدل المثلث الجيوديزي لغوس بأي منحنى مغلق، واستبدل مجموع الزوايا بتكامل الانحناء الجيوديزي للمحيط.

يمكن ان نجد عرضا مسهبا للهندسة التفاضلية المتعددة الابعاد في الكتابين:

Eisenhart L., Riemannian geometry, princeton, Univ. Press, 1949

- Schovten J. und Struik D. J., Einfuhrung in die neveren Methoden der Differenlgeometrie, 2-e rollst. umgearb. Aufl., BD. 1, Groningen, Nootdhoff, 1935

(*) عثر الرياضيان الايطاليان كودازي وميناردي، فيما بعد، على نفس الدستور.

الفصل 6

الهندسة الريمانية

كنا رأينا في نهاية الفصل الخامس خلال مناقشتها للتمثيل الوسيطي لسطح ذي انحناء ثابت ان تزويد سطح بمسافة الفضاء الاقليدي الذي يحويه اصبح امرا مزعجا وأنه يستحسن إعتبار السطح، إن امكن، ككائن منعزل دون ربطه بالفضاء الذي يحويه، ثم تعريف مسافة عليه بكيفية مستقلة عما دون السطح. تلك هي فكرة الفضاء الريماني. نقدم تعريفه ضمن § 3.6 بعد تقديم المعلومات الضرورية عن الجبر الموتري (§ 1.6) ومفهوم المنوعة الاولية القابلة للمفاضلة (§ 2.6). ينبغي القول بأن المنوعة القابلة لمفاضلة تمثل كائنا من اهم كائنات التحليل الرياضي الحديث. رغم ذلك فسوف لن نعرض هنا التعريف العام لمنوعة قابلة للمفاضلة، سوف نتبنى وجة نظر محلية ونعرّف المنوعة الاولية القابلة للمفاضلة (المتشاكلة تفاضليا مع كرة). ثم استناداً الى ذلك، نعرّف الفضاء الاولي الريماني الذي تقوم بدراسته فيما بعد. سوف نقدم التعريف العام لمنوعة قابلة للمفاضلة ضمن القسم الثالث. هدفنا الرئيسي هنا هو إدخال ودراسة مؤثر الانحناء (§ 5.6) وعلاقاته بانحناء سطح تقليدي باعتباره فضاء ريمانيا اوليا، ثم تقديم وصف محلي للفضاءات الريمانية ذات الانحناء الثابت (§ 6.6) وهذا كتعميم لاعتبارات الفصل الخامس.

§ 1.6 النظرية الجبرية للموترات

11.6 . كنا تكلمنا، في ل. 6.5.، عن الموترات في الفضاء ذي البعد n . نذكّر بالتعاريف الاساسية:

يمكن تناول العديد من الجمل الاشعة الاساسي في الفضاء الشعاعي R_n ذي البعد n ؛ نرمز لهذه الاشعة التي تشكل كل جملة منها اساسا بـ: $e_1, \ldots, e_n ; e_{1'}, \ldots, e_{n'} ; e_{1''}, \ldots, e_{n''}$، الخ. يمكن نشر كل شعاع

x وفق اشعة الاساس

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi^{i}e_{i}=\sum_{i'=1}^{n}\xi^{i'}e_{i'}=\sum_{i''=1}^{n}\xi^{i''}e_{i''}=\dots \tag{1}$$

نزوّد احداثيات شعاع دوما بدليلات تكتب في اعلى السطر، اما وجود الفتحات « ′ » او غيابها فيشير للاساس الذي عرفنا من اجله الاحداثيات. نتفق ايضا على عدم كتابة رمز الجمع $\sum$ صراحة في الحالات التي يكون فيها دليل الجمع ظاهراً تحت رمز الجمع مرتين: في الأعلى والأسفل. وهكذا تأخذ المساواة (1) الشكل:

$$x=\xi^{i}e_{i}=\xi^{i'}e_{i'}=\xi^{i''}e_{i''}=\dots$$

نرمز لعناصر مصفوفة الانتقال من اساس $\{e_i\}$ الى اساس آخر $\{e_{i'}\}$ بـ $p^{i}_{i'}$، أي ان:

$$e_{i'}=p^{i}_{i'}e_{i}$$

(الجمع على الدليل i، أما الدليل i' فيأخذ اية قيمة ثابتة من 1 الى n). كما نرمز لعناصر مصفوفة الانتقال المقلوبة بـ $p^{i'}_{i}$، أي ان:

$$e_{i}=p^{i'}_{i}e_{i'}$$

الجمع على i'، أما الدليل i فمثبت). إن المصفوفة $\|p^{i'}_{i}\|$ فهي مقلوبة المصفوفة $\|p^{i}_{i'}\|$، وهو ما يمكن الاشارة اليه بـ:

$$p^{i}_{i'}p^{i'}_{h}=\begin{cases}1 & \text{pour } i=j,\\ 0 & \text{pour } i\neq j.\end{cases} \tag{2}$$

نرمز فيما يلي بـ δ^{i}_{i} لعناصر مصفوفة الوحدة($\delta^{i}_{i}=1(i=1,\dots,n)$، $\delta^{i}_{i}=0$ من اجل $i\neq j$ عندئذ تكتب المساواة (2) على الشكل:

$$p^{i}_{i'}p^{i'}_{j}=\delta^{i}_{j}.$$

يمثل جداء المصفوفتين $p^{i}_{i'}$ و $p^{i}_{i''}$:

$$p^{i}_{i''}=p^{i'}_{i''}p^{i}_{i'}$$

مصفوفة الانتقال من الاساس $\{e_i\}$ الى الاساس $\{e_{i''}\}$

21.6 . نقدم الآن تعريف الموتّر.

أ . ان كل موتر مجموعة اعداد تتعلق بجملة احداثيات، تتحوّل عند تغيير جملة الاحداثيات، وفق قاعدة نوردها فيما يلي. لنبدأ بمثال قبل التعريف العام.

يمثل موتّر T متغاير مرتين ومتغاير عكسيا (او ضدياً) مرة واحدة مجموعة تتألف من n^3 عدداً T^k_{ij} $(i, j, k = 1, \ldots, n)$ تتعلق باختيار الاساس وتتحول هذه الاعداد لدى الانتقال من اساس $e_1, \ldots, e_n$ الى اساس آخر $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ حسب القاعدة:

$$T^{k'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k T^k_{ij} \quad (1)$$

حيث نجمع في الطرف الايمن بالنسبة لِـ i, j, k. ترد العبارات ذات الشكل $p^l_{l'}$ ، أي عناصر مصفوفة الانتقال من الاساس $\{e_{l'}\}$ الى الاساس $\{e_l\}$ ، في الطرف الايمن مرتين، وترد العبارات $p^{k'}_k$ ، أي عناصر مصفوفة الانتقال من الاساس $\{e_k\}$ الى الاساس $\{e_{k'}\}$ مرة واحدة. وضعت الدليلات في رمز الموتر في مواقع تأخذ بعين الاعتبار قاعدة الجمع، نقول في هذه الحالة ان الدليلات السفلى l ، j، i، k متغايرة وان الدليلين العلويين k و k متغايران عكسيا.

يبقى التعريف (1) قائما مهما كان التحويل المقبول للإحداثيات. ليكن $e_{1''}, \ldots, e_{n''}$ اساسا ثالثا، يجب ان يكون لدينا حينئذ:

$$T^{k''}_{i''j''} = p^i_{i''} p^j_{j''} p^{k''}_k T^k_{ij}, \quad (2)$$

ومن جهة اخرى:

$$T^{k''}_{i''j''} = p^{i'}_{i''} p^{j'}_{j''} p^{k''}_{k'} T^{k'}_{i'j'}. \quad (3)$$

إلاّ اننا نرى بسهولة، بالنظر الى (1)، ان المساواة (3) تستلزم (2) والعكس بالعكس. بالفعل ينتج من (3) و(1):

$$T^{k''}_{i''j''} = p^{i'}_{i''} p^{j'}_{j''} p^{k''}_{k'} p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k T^k_{ij} = p^i_{i''} p^j_{j''} p^{k''}_k T^k_{ij}$$

وهذا بفضل المساواة $p_{i''}^{i'} p_{i'}^{i} = p_{i''}^{i}$ والعلاقتين المماثلتين لها. إذن فإن تعريف الموتر تعريف سليم.

لتقديم موتر T يمكننا، مثلا، اتباع الطريقة التالية: بتثبيت مركباته T_{ij}^{h} ضمن اساس $e_1, \ldots, e_n$ بشكل كيفي، نعرّفها في أي اساس آخر $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ حسب الدساتير (1). تبين الاستدلالات السابقة ان ذلك سليم.

ب. بطريقة مماثلة، ومن اجل كل عددين طبيعيين $0 \leqslant m$ و$0 \leqslant s$، نعرّف موتر $T_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s}$ (او بإختصار $T_{\ldots}^{\ldots}$) **متغايرا m مرة ومتغايرا عكسيا s مرة**. على وجه التحديد فإن هذه التسمية تطلق على جملة مؤلفة من n^{m+s} عددا معرفة ضمن كل اساس وتتحول عند الانتقال من اساس $\{e_i\}$ الى اساس $\{e_{i'}\}$ وفق الدستور:

$$T_{i'_1 \ldots i'_m}^{j'_1 \ldots j'_s} = p_{i'_1}^{i_1} \ldots p_{i'_m}^{i_m} p_{j_1}^{j'_1} \ldots p_{j_s}^{j'_s} T_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s}.$$

يسمى العدد $s + m$ مرتبة الموتر T. اذا كان $m = s = 0$ فإن الموتر T ذو مرتبة منعدمة، وهو يمثل عددا لا يتعلق بالاساس.

نقول عن موتر $T_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s}$ إنه مساو لموتر آخر له نفس البنية $Q_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s}$ إذا تطابقت، من اجل كل مجموعة مثبتة من الدليلات $i_1, \ldots, i_m$ و $j_1, \ldots, j_s$ المركبات المتوافقة لهذين المترين في كل جملة احداثيات: $T_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s} = Q_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_s}$. يكفي ان نثبت هذا التطابق في جملة احداثيات واحدة، علما ان ذلك التطابق يقوم مباشرة في اية جملة اخرى من قانون تحويل الموترات. نشير ايضا الى ان الترتيب المتبع في كتابة الدليلات له اهمية كبيرة اذ ان لدينا عموما:

$$T_{ij}^{h} \neq T_{ji}^{h} \neq T_{ih}^{j}.$$

إن معنى اللفظين «متغاير» و«متغاير عكسيا» بسيط للغاية: «متغاير» يعني يتحول، بتحول اشعة الاساس $\{e_i\}$، مع المعاملات $p_{i'}^{i}$؛ ويعني

«متغاير عكسيا» التحول عكسيا مع المعاملات $p_i^{i'}$.

جـ . نقول عن موتر $T_{ij}^{\cdots}$ إنه **متناظر** بالنسبة للدليلين i, j إذا كان $T_{ij}^{\cdots}=T_{ji}^{\cdots}$ وانه **متناظر ضديا** بالنسبة لِـ i, j اذا كان $T_{ij\ldots}^{\cdots}=-T_{ji\ldots}^{\cdots}$
يكفي ان نثبت خاصية التناظر (التناظر الضدي) لموتر ضمن جملة واحدة من الاحداثيات، حيث تقوم نفس الخاصية ضمن كل جملة اخرى حسب دساتير تحويل الموترات؛ على سبيل المثال لدينا في حالة التناظر:

$$T_{i'j'}^{\cdots}\ldots = p_{i'}^{i}p_{j'}^{j}\ldots T_{ij}^{\cdots}\ldots = p_{i'}^{i}p_{j'}^{j}T_{ji}^{\cdots}\ldots = T_{j'i'}^{\cdots}\ldots$$

يمكن صياغة تعريف مماثل للتناظر (التناظر الضدي) من اجل ثنائية دليلين علويين (متغايرين عكسيا). لكن التناظر بالنسبة لدليل علوي ودليل سفلي، $T_{i\cdots}^{j\cdots} = T_{j\cdots}^{i\cdots}$ ليس لهِ معنى مطلق، لأننا لا تحتفظ بهذا التناظر عند الانتقال الى جملة احداثيات اخرى.

د . كمثال لموتر متغاير عكسيا مرة واحدة، نعتبر مجموعة احداثيات شعاع x . لدينا بالفعل:

$$x = \xi^{i}e_{i} = \xi^{i}p_{i}^{i'}e_{i'} = \xi^{i'}e_{i'},$$

ومنه يأتي:

$$\xi^{i'} = p_{i}^{i'}\xi^{i},$$

وهي مساواة تمثل قانون تحويل موتر متغاير عكسيا مرة واحدة.

كما تمثل المعاملات l_i لشكل خطي $L(x) = l_i\xi^i$ موترا متغايرا عكسيا مرة واحدة وتمثل العناصر a_i^j لمصفوفة المؤشر خطي مؤشرا من المرتبة الثانية متغايرا مرة واحدة ومتغايرا عكسيا مرة واحدة (ل. 5 .36).

ر. يمثل الرمز δ_i^k ، هو الآخر، موترا متغايرا مرة واحدة ومتغايرا عكسيا مرة واحدة؛ بالفعل، فإن المساواة:

$$\delta_{i'}^{k'} = p_{i'}^{i}p_{k}^{k'}\delta_{i}^{k}$$

محققة حسب تعريف δ_i^k وبفضل خاصيات المصفوفات $p_{i'}^{i}$.

31.6 . عمليات على الموترات. نعرف العمليات التالية على الموترات:

أ. ضرب موتر في عدد وجمع موترين من نفس البنية. ليكن T^h_{ij} و Q^h_{ij} موترين متغايرين مرتين ومتغايرين عكسيا مرة واحدة، مثلا، وليكن α و β عددين. نشكل في كل جملة احداثيات الاعداد S^h_{ij} بجمع، مــن اجــل i, j, k مثبتــه، الكميتين الموافقتين لها: αT^h_{ij} و βQ^h_{ij}. تمثل القيم S^h_{ij} المعرفة هكذا في كل جملة احداثيات، موترا متغايرا مرتين ومتغايرا عكسيا مرة واحدة لأن:

$$S^{h'}_{i'j'} = \alpha T^{h'}_{i'j'} + \beta Q^{h'}_{i'j'} = \alpha p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h T^h_{ij} + \beta p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h Q^h_{ij} =$$
$$= p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h (\alpha T^h_{ij} + \beta Q^h_{ij}) = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h S^h_{ij}.$$

ب. بما ان جمع الموترات وضربها في الاعداد تردّ الى جمع مركباتها وضربها في الاعداد فإن هاتين العمليتين تخضعان لقوانين التبديل والتجميع والتوزيع.

بصفة خاصة، تشكل الموترات التي لها بنية معطاة فضاء شعاعيا. بما ان موتر من m دليلا له n^m مركبة فإن بعد فضاء الموترات التي لها m دليلا، يساوي n^m.

ج. ضرب موترين لهما بنيتان مختلفتان. نضرب مثلا موترا T_{ij} متغايرا مرتين في موتر S^l_k متغاير مرة واحدة ومتغاير عكسيا مرة واحدة. للقيام بذلك نضرب في أية جملة احداثيات من اجل i، j، k، l مثبتة، المركبات T_{ij} و S^l_k الموافقة لها. نحصل بذلك على الكميات $Q^l_{ijk} = T_{ij} S^l_k$ المتعلقة باربعة دليلات إن هذه الكميات المعرفة في كل جملة احداثيات، تشكل موتراً لأن:

$$Q^{l'}_{i'j'k'} = T_{i'j'} S^{l'}_{k'} = p^i_{i'} p^j_{j'} T_{ij} p^k_{k'} p^{l'}_l S^l_k = p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} p^{l'}_l T_{ij} S^l_k =$$
$$= p^i_{i'} p^j_{j'} p^k_{k'} p^{l'}_l Q^l_{ijk},$$

إذ ان هذا متغاير ثلاث مرات ومتغاير مرة واحدة. نعرف بطريقة

مماثلة ضرب اي موترين؛ يضم الموتر الجداء كل الدليلات المتغايرة والمتغايرة عكسيا الواردة في العاملين.

يجب القول ان ضرب الموترات ليست عموما قانونا تبديليا. على سبيل المثال فإن جداء الموترين S_i و T_j يمثل فيه العدد S_1T_2 المركبة ذات الدليلين $i = 1$ و$j = 2$، اما جداء الموترين T_i و S_j فمركبته تلك هي العدد S_2T_1 .

د . تقلص موتر بالنسبة لدليل علوي ودليل سفلي. تجري هذه العملية على موتر له على الاقل دليل متغاير عكسيا ودليل متغاير. ليكن، مثلا ، T_{ij}^{k} موترا تقليص هذا الموتر بالنسبة للدليلين i و k يعني: تكوين في كل جملة احداثيات من اجل j مثبت، الاعداد:

$$Q_j = T_{ij}^{i}.$$

نقصد هنا الجمع على الدليل i في الطرف الايمن. تشكل ايضا الكميات المحصل عليها Q_j ، باعتبارها في كل جملة احداثيات، موترا؛ بالفعل فإن المساواة:

$$T_{i'j'}^{k'} = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} p_{k}^{k'} T_{ij}^{k}$$

تستلزم:

$$Q_{j'} = T_{i'j'}^{i'} = p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} p_{k}^{i'} T_{ij}^{k} = \delta_{k}^{i} p_{j'}^{j} T_{ij}^{k} = p_{j'}^{j} T_{ij}^{i} = p_{j'}^{j} Q_j .$$

عماذا نحصل عند تقليص موتر T_i^j بالنسبة لدليليه؟ ليس للكمية T_i^i اي دليل، ولذا فهي تمثل عددا في كل جملة احداثيات لا تتغير عند الانتقال من جملة الى اخرى، اي ان T_i^i لا متغير، مما يؤكد ذلك بغض النظر عما سبق، هو الحساب المباشر التالي:

$$T_{i'}^{i'} = p_{i'}^{i} p_{k}^{i'} T_{i}^{k} = \delta_{k}^{i} T_{i}^{k} = T_{i}^{i}.$$

وهكذا فإن عملية تقلص موتر (بالنسبة لثنائية او اكثر من الدليلات) يمكن ان توفر لامتغيرات.

ر. منقالة المعاملات $p_i^{i'}$. نعتبر المساواة:

$$p_i^{i'}S^i = T^{i'}, \qquad (1)$$

حيث يكمن ان تكون للكميات S^i و $T^{i'}$ بعض الدليلات الاخرى. نفرض ان الدليل i' حر اي انه ليس دليل جمع. نؤكد على ان هذه المساواة تكافىء

$$S^i = p_{i'}^i T^{i'},$$

اي انه يمكن نقل المعاملات $p_i^{i'}$ من طرف الى الطرف الاخر وذلك بالقيام، في ان واحد، بمبادلة الدليلات. بالفعل، عند ضرب المساواة (1) في $p_{i'}^k$ والجمع على i'، نحصل على:

$$p_{i'}^k p_i^{i'} S^i = \delta_i^k S^i = S^k = p_{i'}^k T^{i'},$$

بدليل حر يمكن بطبيعة الحال استبداله بـ i.

س. اختصار المعاملات $p_i^{i'}$. ليكن:

$$p_i^{i'}S^i = p_i^{i'}Q^i, \qquad (2)$$

حيث يمكن ان تكون للكميات S^i و Q^i دليلات اخرى. نفرض ان الدليل i' حر.

لنثبت ان المساواة (2) تكافىء:

$$S^i = Q^i,$$

اي انه يمكن اختصار المعاملات $p_i^{i'}$. بالفعل، نحصل لدى ضرب (2) في $p_{i'}^k$ والجمع على k، على:

$$p_{i'}^k p_i^{i'} S^i = \delta_i^k S^i = S^k = p_{i'}^k p_i^{i'} Q^i = \delta_i^k Q^i = Q^k,$$

بدليل حر k نستطيع استبداله بـ i.

41.6. حل المعادلات الموترية.

أ. نتناول جملة خطية من المعاملات:

$$R_{ij}S^{j}_{\cdot\cdot\cdot} = T_{i\cdot\cdot\cdot}, \qquad (1)$$

حيث يمثل R_{ij} و $T_{i\cdot\cdot\cdot}$ موترين بنيتهما معلومة وحيث معين $\|R_{ij}\| \neq 0$. تسمح الجملة (1)، من اجل كل مجموعة دليلات، بتعيين الاعداد $S^{j}_{\cdot\cdot\cdot}$ بطريقة وحيدة إذن فإن الاعداد $S^{j}_{\cdot\cdot\cdot}$ معينة من اجل كل جملة احداثيات. لنثبت ان هذه الاعداد تشكل موتراً. نقتصر في حساباتنا على حالة الموتر T^{q}_{ir} ذى المجاهيل S^{jq}_{r} يتبين من (1) ان لدينا:

$$p^{i'}_{i} p^{j'}_{j} R_{i'j'} S^{iq}_{r} = p^{i'}_{i} p^{r'}_{r} p^{q}_{q'} T^{q'}_{i'r'},$$

حيث ان:

$$R_{i'j'} p^{r}_{r'} p^{j'}_{j} p^{q'}_{q} S^{jq}_{r} = T^{q'}_{i'r'};$$

وذلك طبقا لـ 31.6، د ـ س تؤدي وحدانية حل الجملة (1) ضمن الاساس $\{e_{i'}\}$ الى:

$$S^{j'q'}_{r'} = p^{r}_{r'} p^{j'}_{j} p^{q'}_{q} S^{jq}_{r},$$

وهذا يعني ان الكميات S^{jq}_{r} تشكل موتراً.

ب. يبين استدلالان شبيه بالسابق ان حلول المعادلتين:

$$R^{j}_{i} S^{k}_{j\cdot\cdot\cdot} = T^{k}_{i\cdot\cdot\cdot}, \quad R^{ij} S_{jk\cdot\cdot\cdot} = T^{i}_{k\cdot\cdot\cdot},$$

حيث يمثل R و T موترين لهما بنية معلومة مع العلم ان $\|R^{j}_{i}\| \neq 0$ و $\|R^{ij}\| \neq 0$ و $S_{\cdot\cdot\cdot}$ مجاهيل، هي الموترات $S_{\cdot\cdot\cdot}$ التي لها بنية معلومة.

ج. هناك مثال آخر تقدمه جملة المعادلات ذات الشكل:

$$T_{\cdot\cdot\cdot k} \underset{i}{\xi}^{k} = \underset{i}{S}_{\cdot\cdot\cdot}, \qquad (2)$$

حيث يمثل $\underset{n}{\xi}^{k}, \ldots, \underset{1}{\xi}^{k}$ موترا متغايرة عكسيا مرة واحدة، ومستقلة خطيا، بحيث ان $\|\underset{i}{\xi}^{k}\| \neq 0$ ، علما ان دليلات الموترات $S_{\cdot\cdot\cdot}$

مطابقة للدليلات الموافقة لها في الكميات $T_{\cdots k}^{\cdots}$ ، وهي الدليلات التي وضعنا نقاطا مكانها.

تسمح الجملة (2)، من اجل كل قيم الدليلات غير المصرح بها، بتعيين بطريقة وحيدة الكميات $T_{\cdots k}^{\cdots}$. لنثبت ان $T_{\cdots k}^{\cdots}$ موتر بنيته هي بنية $\underset{i}{S}_{\cdots}^{\cdots}$ بدليل متغاير اضافي k. لتثبيت الافكار، نقوم بالحساب من اجل الموترات $\underset{i}{S}_{rq}^{m}$ ومن اجل الكميات T_{rqh}^{m} . يمكن ان نكتب عند الانتقال الى الأساس. $\{e_{l'}\}$

$$p_{r}^{r'} p_{q}^{q'} p_{m'}^{m} \underset{i}{S}_{r'q'}^{m'} = \underset{i}{S}_{rq}^{m} = T_{rqk}^{m} \underset{i}{\xi}^{k} = T_{rqk}^{m} p_{k'}^{k} \underset{i}{\xi}^{k'},$$

$$\underset{i}{S}_{r'q'}^{m'} = p_{r'}^{r} p_{q'}^{q} p_{m}^{m'} p_{k'}^{k} \underset{i}{\xi}^{k'} T_{rqk}^{m},$$

ومنه يأتي بالنظر الى وحدانية حل الجملة (2) ضمن جملة الاحداثيات الجديدة:

$$T_{r'q'k'}^{m'} = p_{r'}^{r} p_{q'}^{q} p_{m}^{m'} p_{k'}^{k} T_{rqk}^{m},$$

وهو المطلوب.

د. نعتبر جملة اكثر تعقيداً:

$$T_{\cdots km}^{\cdots} \underset{i}{\xi}^{k} \underset{j}{\eta}^{m} = \underset{ij}{S}_{\cdots}^{\cdots},$$

حيث $\underset{i}{\xi}^{k}$ جماعة من الاشعة المستقلة خطيا، اما $\underset{j}{\eta}^{m}$ فهي جماعة اخرى من الاشعة المستقلة خطيا، واما الدليلات التي وضعنا مكانها نطاقا في الموترات $\underset{ij}{S}_{\cdots}^{\cdots}$ فهي نفس الدليلات (الموافقة لها) الورااردة في الموتر $T_{\cdots km}^{\cdots}$. في هذه الحالة يتبين ان $T_{\cdots km}^{\cdots}$ موتر بنيته $\underset{ij}{S}_{\cdots}^{\cdots}$ مع إضافة دليلين متغايرين k و m.

للبرهان على ذلك نضع:

$$T_{\cdots km}^{\cdots} \underset{i}{\xi}^{k} = \underset{i}{R}_{\cdots m}^{\cdots} ; \qquad (3)$$

لدينا $\underset{ij}{S}_{\cdots}^{\cdots} = \underset{i}{R}_{\cdots m}^{\cdots} \underset{j}{\eta}^{m}$، ثم يتضح، مما بيناه في ج، ان $\underset{i}{R}_{\cdots m}^{\cdots}$ موتر، مهما كان i ، بنيته هي بنيته $\underset{ij}{S}_{\cdots}^{\cdots}$ بدليل متغاير اضافي m. بتطبيق ج على المعادلة (3) نصل الآن الى القضية المتعلقة بـ $T_{\cdots km}^{\cdots}$. من البديهي ان لدينا

نتيجة مماثلة من اجل بعض الجمل الاكثر تعقيداً، مثل من الشكل

$T_{\cdots kmr}^{\cdots}\underset{i}{\xi^k}\underset{j}{\eta^m}\underset{l}{\zeta^r} = S_{ijl}^{\cdots}$ ، الخ.

51. 6 . الشعاع المكرر

أ. ليكن ξ و η شعاعين يسمى الموتر:

$$f = f^{ij}(\xi, \eta) = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i \equiv [\xi, \eta]^{ij} \tag{1}$$

الشعاع المكرر المولد عن الشعاعين ξ و η إن مركبات الشعاع المكرر، f^{ij} ، هي الاصغريات ذات الرتبة الثانية للمصفوفة:

$$\left\| \begin{matrix} \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^n \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^n \end{matrix} \right\| \tag{2}$$

المؤلفة من احداثيات الشعاعين ξ و η. من الواضح ان الشعاع المكرر f لا يتغيّر عندما نضيف للشعاع η جداء الشعاع ξ في عدد كيفي. وهكذا يستحيل تعيين الشعاعين ξ و η بكيفية وحيدة انطلاقا من الشعاع المكرر f ، اي امن اصغريات المصفوفة (2).

نطرح السؤال التالي: ما هي المعلومات الهندسية حول الشعاعين ξ و η التي يمكن استنتاجها من معرفتنا للشعاع المكرر f ؟

ب. بادىء ذي بدء، يمكن بمعرفة مركبات الشعاع المكرر f ، تعيين **مستوى الشعاعين** ξ و η بصفة وحيدة. بالفعل فرض انتماء شعاع $\tau = \tau^i e_i$ الى المستوى ξ ، η يكتب على الشكل $\tau = C_1\xi + C_2\eta$ اي ان سطور المصفوفة التالية غير مستقلة خطيا:

$$\left\| \begin{matrix} \xi^1 & \ldots & \xi^n \\ \eta^1 & \ldots & \eta^n \\ \tau^1 & \ldots & \tau^n \end{matrix} \right\|$$

بعبارة اخرى، فإن مرتبة المصفوفة (3) يجب ان تكون اصغر من 3 بحيث ان كل الاصغريات من الرتبة الثالثة لهذه المصفوفة، يجب ان تكون منعدمة بنشر الاصغريات ذات الرتبة الثالثة.

$$\begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j & \xi^k \\ \eta^i & \eta^j & \eta^k \\ \tau^i & \tau^j & \tau^k \end{vmatrix} .$$

وفق عناصر السطر الاخير، نصل الى سلسلة من شروط انتماء الشعاع τ الى المستوى ξ ; η تكتب بدلالة الاصغريات من الرتبة الثانية للمصفوفة (3)، اي بدلالة مركبات الشعاع المكرر f .

ج. لنعوض الشعاعين ξ و η بعبارتيهما الخطيتين:

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta, \\ q &= \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta \end{aligned} \right. \tag{4}$$

ولنبحث عن الشعاع المكرر المولد عن الشعاعين p و q:

$$[p,\, q]^{ij} = \begin{vmatrix} p^i & p^j \\ q^i & q^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\xi^i + \alpha_{12}\eta^i & \alpha_{11}\xi^j + \alpha_{12}\eta^j \\ \alpha_{21}\xi^i + \alpha_{22}\eta^i & \alpha_{21}\xi^j + \alpha_{22}\eta^j \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} = \det \| \alpha_{ij} \| \, [\xi,\, \eta]^{ij}.$$

وهكذا يُضرب الشعاع المكرر $[\xi, \eta]$ إثر التعويض (4) في العدد $\det \| \alpha_{ij} \|$. نقول عن الثنائيتين ξ, η و p, q (4) انهما **متكافئتان** اذا كان $\det \| \alpha_{ij} \| = 1$. من اجل ثنائيتين متكافئتين، فإن المركبات التي لها نفس الدليلين للشعاع المكرر f متساوية: $[p, q]^{ij} = [\xi, \eta]^{ij}$. يمكن تصنيف كل الثنائيات المؤلفة من شعاعين ξ, η منتميان لمستو ما γ ، ويتم ذلك بتشكيل صفوف الثنائيات المتكافئة غير المتقاطعة مثنى مثنى؛ نستطيع عندئذ القول بأن مركبات شعاع مكرر $[\xi, \eta]$ تعين بطريقة وحيدة المستوى γ والصف الذي تنتمي اليه الثنائية ξ, η ويمكن الحصول على اي صف آخر بضرب الشعاع المكرر $[\xi, \eta]$ في عدد لائق.

6 .61 . الموتر المتري. يمكن تعريف جداء سلمي (x, y) في الفضاء R_n كقيمة $G(x, y)$ لشكل ثنائي الخطية متناظرة $(G(x, y) = G(y, x))$ ومعرف موجب $(G(x, x) > 0$ من اجل $(x \neq 0)$. يكتب الشكل $G(x, y)$ بدلالة الاحداثيات على النحو:

$$G(x, y) = \sum_i \sum_j g_{ij}\xi^i\eta^j = g_{ij}\xi^i\eta^j, \qquad (1)$$

حيث $x = \xi^i e_i,\ y = \eta^j e_j,\ g_{ij}$ اعداد.

نستطيع القول ان تعاطي شكل $G(x, y)$ يكافىء تعاطي موتر g_{ij} متغاير مرتين، ومتناظر $(g_{ij} = g_{ji})$ ومعرف موجب ($g_{ij}\xi^i\xi^j > 0$ من اجل $\xi \neq 0$). بالفعل إذا وجد مثل هذا الموتر g_{ij} فإن العرارة (1) تمثل، من اجل كل ثنائية شعاعين (ثنائية موترين متغايرين عكسيا مرة واحدة)، عددا يحقق مسلمات الجداء السلمي. يسمى موتر يتمتع بتلك الخاصيات موترا متريا. يحوّل موتر متري g_{ij} الفضاء التآلفي R_n الى فضاء اقليدي حيث يمكن قياس اطوال الاشعة والزوايا التي تشكلها هذه الاشعة، وكذا مساحات الاشكال (الهندسية) واحجام الاجسام.

إن المصفوفة g_{ij} غير منحلة لأنها معرفة موجبة، ولها إذا مصفوفة مقلوبة g^{jk} :

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k,\ i,\ k = 1, \ldots, n. \qquad (2)$$

تشكل الاعداد g^{jk} ، بفضل 41.6 ، موترا متغايرا عكسيا مرتين. اذا اعتبرنا مثلا، موترا كيفيا T_{ij}^k (له البنية المشار اليها)، فإن الموترات:

$$T_{ijs} = T_{ij}^k g_{ks}, \quad T_i^{ks} = T_{ij}^k g^{js}, \quad T^{rks} = T_i^{ks} g^{ir}$$

موترات قرينة، تعريفاً، لِـ T_{ij}^k بالنسبة للموتر g_{ij} .

نشير، من اجل موتر g_{ij} ، الى انه اساس في الفضاء R_n . بحيث:

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ pour } i \neq j, \\ 1 \text{ pour } i = j, \end{cases}$$

أي اساس متعامد ومتجانس بالنسبة للجداء السلمي (1) نرمز لمركبات الموتر المتري ضمن مثل هذا الاساس بِـ δ_{ij} .

71ـ6 ا . يمكن كتابة مساحة متوازي الوجوه المنشأ على الشعاعين ξ و η في الفضاء الاقليدي R_n ، بدلالة مركبات الشعاع المكرر $[\xi, \eta]$ بالفعل، فان المساحة المذكورة S تحسب حسب الدتور 55.3 (2).

$$(1) \quad S^2 = \begin{vmatrix} (\xi, \xi) & (\xi, \eta) \\ (\eta, \xi) & (\eta, \eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{ik}\xi^i\xi^k & g_{jl}\xi^j\eta^l \\ g_{ik}\eta^i\xi^k & g_{jl}\eta^j\eta^l \end{vmatrix} = \\ = g_{ik}g_{jl}\xi^k\eta^l \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix}.$$

عند مبادلة الدليلين i و j وكذا l و k نحصل على:

$$(2) \qquad S^2 = g_{jl}g_{ik}\xi^l\eta^k \begin{vmatrix} \xi^j & \xi^i \\ \eta^j & \eta^i \end{vmatrix} = -g_{ik}g_{jl}\xi^l\eta^k \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix}.$$

ينتج من (1) و (2) ان:

$$(3) \qquad 2S^2 = g_{ik}g_{jl} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix}.$$

ثم عند مبادلة الدليلين l و k في (3)، نجد

$$(4) \qquad 2S^2 = g_{il}g_{jk} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^l & \xi^k \\ \eta^l & \eta^k \end{vmatrix} = -g_{jk}g_{il} \cdot \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix},$$

واذن:

$$(5) \qquad 4S^2 = \begin{vmatrix} g_{ik} & g_{il} \\ g_{jk} & g_{jl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^i & \xi^j \\ \eta^i & \eta^j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi^k & \xi^l \\ \eta^k & \eta^l \end{vmatrix}.$$

يُعطي الدستور (5) العبارة المطلوبة لِـ S بدلالة مركبات الشعاع المكرر $[\xi, \eta]$.

ب. تمثل الكمية $G_{ij,\,kl} = g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}$ اصغري المصفوفة $\| g_{ij} \|$ الواقع في الطرين i و j والعمودين k و l. انها موتر متغاير اربع مرات.

يسمى الموتر $G_{ij,\,kl}$ **موترا متريا مشتقا**. ندرك من خلال الدستور (5) ان مساحة متوازي الوجوه المنشأ على الشعاعين ξ و η معين بالشعاع المكرر $[\xi, \eta]$. يمكن اذن تعريف « مساحة الشعاع المكرر » التي نقصد بها مساحة اي متوازي وجوه من صف متوازيات الوجوه المعينة بالشعاع المكرر المعطي. اذا كانت مساحة الشعاع المكرر $[\xi, \eta]$ تساوي 1 فإننا نسميه **الشعاع المكرر الواحدي**؛ مع الملاحظة ان كل متوازيات الوجودة المعينة بالشعاع المكرر الواحدي لها مساحات متساوية تساوي 1 . ينشر ايضا الى ان كل شعاع مكرر $[\xi, \tau]$ من نفس المستوى مساحته S ، يُستنتج من الشعاع المكرر الواحدي بضربة في العدد S .

ج. إن الموتر $G_{ij,\,kl}$ متناظر ضديا بالنسبة للدليلين i و j ومتناظر ضديا بالنسبة للدليلين k و l ولا يتغيّر عند استبدال i و j بِـ k و l على التوالي، وذلك استناداً الى تعريف هذا الموتر. إنه يحقق العلاقة التالية المسماة متطابقة ريكسي (Ricci):

$$G_{ij,\,kl} + G_{jk,\,il} + G_{ki,\,jl} = 0. \qquad (6)$$

نحصل على حدود هذا المجموع بمبادلة الدليلات الثلاثة الاولى بشكل دوري، مع تثبيت الدليل الرابع. بما أنها متطابقة موترية، فإنه يكفي البرهان عليها في جملة احداثيات واحدة. نختار جملة بحيث تكون المركبات δ_{ij} للموتر g_{ij} مساوية لِـ0 من اجل $i \neq j$ و لِـ1 من اجل $i = j$.

نأخذ عندئذ المساواة (6) الشكل

$$\begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{jl} & \delta_{jl} \\ \delta_{ki} & \delta_{kl} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{kj} & \delta_{kl} \\ \delta_{ij} & \delta_{il} \end{vmatrix} = 0.$$

إذا كان $l \neq i,\ l \neq j,\ l \neq k$ فإن الاعمدة الثانية في المعينات السابقة منعدمة، وتتحقق بذلك المساواة. لنفرض ان l مطابق لأحد الدليلات i, j, k. نلاحظ بفضل التناظر بالنسبة لِـ $i, j, k,$ انه يكفي وضع $l = i,\ l \neq j,\ l \neq k$. حينئذ ينعدم العمود الثاني في المعين الثاني؛ ويصبح مجموع المعينين الاول والثالث مساوياً لِـ:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \delta_{jk} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta_{kj} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\delta_{jk} + \delta_{kj} = 0.$$

نفرض ان l مطابق لدليلين كيفيين من الدليلات الثلاثة ، i, j, k ، مثلا $l = i = j,\ l \neq k$. حينئذ يأخذ مجموع المعينات الثلاثة الشكل:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

اخيرا إذا كان $l = i = j = k$ فإن كل المعينات منعدمة لأن كل عناصرها ستكون مساوية لِـ 1. وهكذا نستخلص ان الموتر $G_{ij,\,kl}$ يحقق بالفعل متطابقة ريكسي.

81.6 . موترات نمط ريكسي.

أ. نقول عن موتر $T_{ij,\,kl}$ متغاير اربع مرات انه **موتر من نمط ريكسي** إذا تمتع بالخاصيات التالية:

$T_{ij,\,kl} = -T_{ji,\,kl}$ (التناظر الضدي بالنسبة لِـ i و j) (1)

$T_{ij,\,kl} = T_{kl,\,ij}$ (التناظر بالنسبة للثنائيتين i, j و k, l) (2)

$$T_{ij,\,kl} + T_{jk,\,il} + T_{ki,\,jl} = 0 \quad \text{(متطابقة ريكسي)} \tag{3}$$

نستنتج من (1) و(2) التناظر الضدي بالنسبة للدليلين k و l :

$$T_{ij,\,lk} = T_{lk,\,ij} = -T_{kl,\,ij} = -T_{ij,\,kl}. \tag{4}$$

يقدم الموتر المتري المشتق $G_{ij,\,kl}$ (71.6 ـ جـ) مثالا لموتر من نمط ريكسي. سنرى فيما بعد امثلة هامة اخرى.

من البديهي اننا نستطيع جمع موترات من نمط ريكسي وضربها في الاعداد، ونحصل دوما على موترات من نفس النمط.

ب. ليكن $z = [x, y],\ z^{ij} = \xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i$ ، شعاعا مكررا. نعتبر تقلص موتر من نمط ريكسي $T_{ij,\,kl}$ وتقلص شعاعين مكررين مساوين لـ :

$$T(z, z) = T_{ij,\,kl}z^{ij}z^{kl}. \tag{5}$$

إن هذا التقلص عدد يتعلق بالشعاع المكرر z ، مهما كانت جملة الاحداثيات المعتبرة.

يتبين ان كل مركبات موتر من نمط ريكسي معينة بصفة وحيدة بالتقلصات (5) مع كل الاشعة المكررة z الممكنة.

للبرهان على ذلك، يكفي اثبات ان المساواة $T(z, z) \equiv 0$ تستلزم $T_{ij,\,kl} \equiv 0$ من اجل كل i, j, k, l .

نفرض ان:

$$T(z, z) = T_{ij,\,kl}z^{ij}z^{kl} = T_{ij,\,kl}(\xi^i\eta^j - \xi^j\eta^i)z^{kl} = \\ = T_{ij,\,kl}\xi^i\eta^jz^{kl} - T_{ij,\,kl}\xi^j\eta^iz^{kl} \equiv 0.$$

عند مبادلة الدليلين j و i في الحد الثاني وتعويض $T_{ji,\,kl}$ بـ $-T_{ij,\,kl}$ نجد :

$$T_{ij,\,kl}\xi^i\eta^jz^{kl} + T_{ij,\,kl}\xi^i\eta^jz^{kl} \equiv 0,$$

بحيث ان:

$$T_{ij,kl}\xi^i\eta^j z^{kl} \equiv 0.$$

عندما نقوم بنفس العملية فيما يخص العامل: $z^{kl} = \xi^k\eta^l - \xi^l\eta^k$ فإننا نجد:

$$T_{ij,kl}\xi^i\eta^j\xi^k\eta^l \equiv 0.$$

يجب ان تقوم هذه العلاقة من اجل كل القيم $\xi^1, \ldots, \xi^n$ ، η^n ، $\eta^1, \ldots,$ ومن اجل قيم ، i, j, k, l ، من 1 الى n . نثبّت $i = k$، $j = l$ ونضع $x = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots 0)$؛ نحصل مهما كان $i, j,$ ، على

$$T_{ij,ij} = 0. \tag{6}$$

نثبّت $i = k,\ j \neq l$ ونضع $y = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, \underset{l}{1}, \ldots, 0)$ ،$x = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots 0)$ فنحصل على:

$$T_{ij,il} + T_{il,ij} = 0.$$

بفضل الخاصية (2)، فإن هذا يؤدي الى المساواة:

$$T_{ij,il} = 0, \tag{7}$$

وهذا من اجل كل i و $j \neq l$ نستنتج ايضا من (1) و(4):

$$T_{jl,il} = 0, \tag{8}$$

وهذا من اجل كل i و $l \neq j$ نثبّت $i \neq k,\ j \neq l$ ونضع:

$$x = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{k}{1}, \ldots 0),$$
$$y = (0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, \underset{l}{1}, \ldots, 0);$$

فنحصل على:

$$T_{ij,kl} + T_{kj,il} + T_{il,kj} + T_{kl,ij} = 0.$$

ترد هذه العلاقة بفضل (2) الى:

$$T_{ij,\,kl} + T_{kj,\,il} = 0. \tag{9}$$

بمبادلة i و j ثم استخدام (1) نصل الى:

$$T_{ij,\,kl} + T_{ik,\,jl} = 0. \tag{10}$$

نكتب ايضا مساواة تأتي من (1):

$$T_{ij,\,kl} + T_{jl,\,kl} = 0. \tag{11}$$

نجمع العلاقات الثلاث (9)، (10)، (11)؛ يتضح من متطابقة ريكسي (3) ان الحدود الثانية تزول، ثم بعد القسمة على 3 نرى، من اجل $i \neq k,\ j \neq l$:

$$T_{ij,\,kl} = 0. \tag{12}$$

يعني ذلك مع (6) و(7) ان كل مركبات الموتر $T_{ij,\,kl}$ منعدمة، وبهذا ينتهي البرهان.

§ 2.6 . المنوعات الاولية (او البسيطة) القابلةللمفاضلة

12.4 . أ . لتكن M مجموعة متساوية القوة مع كرة فل الفضاء R_n ذي البعد n . يمكننا إذن ان نعرف على M بعض الاحداثيات الحقيقية $x^1, \ldots, x^n$ بحيث تتجول النقطة $x = (x^1, \ldots, x^n)$ من R_n في كرة مفتوحة. نعتبر الى جانب الاحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ اية احداثيات اخرى $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ على M، شريطة ان تكون مرتبطة بالاحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ بواسطة صلة تقابلية من الشكل:

$$\left\{\begin{array}{l} x^{n'} = x^{n'}(x^1, \ldots, x^n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{1'} = x^{1'}(x^1, \ldots, x^n), \end{array}\right. \tag{1}$$

حيث تقبل التوابع $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ مشتقات مستمرة حتى الرتبة N، كما

نفرض ان المصفوفة $\frac{\partial(x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial(x^{1'}, \ldots x^{n})}$ غير منحلة. نقول عن مثل هذه الجمل الاحداثية انها **جمل مقبولة**. تسمى مجموعة $M = M_{n, N}$ مزودة بمجموعة جمل احداثية مقبولة **منوعة اولية قابلة للمفاضلة** بعدها n ومن الصنف D_N (أو N ، باختصار).

إذا لم نقبل سوى الاحداثية $x^1, \ldots, x^n$ التي تكون من اجلها التوابع (1) قابلة للإشتقاق لانهائيا فإن المنوعة M تنتمي، تعريفاً، الى الصنف D_∞.

ب. نقول عن منوعتين M_1 وM_2 قابلتين للمفاضلة بعداهما n_1 و n_2 تنتميان الى الصّنفين N_1 و N_2 على التوالي. انها متكافئتان اذا كان $n_1 = n_2 = n$ و$N_1 = N_2 = N$ عندئذ يكون من الممكن البرهان على وجود صلة تقابلية بين نقاطقهما بحيث تكون احداثيات نقطة من المنوعة M_2 توابع، من الصنف N، لإحداثيات النقطة المقابلة لها في المنوعة M_1. زيادة على ذلك، يمكننا اختيار هذا التقابل بحيث تكون تلك التوابع من الدرجة الاولى. بالفعل، فإن الاحداثيات على المنوعة M_1 تقيم صلة بين M_1 وكرة في R_n ، وكذا الامر فيا يخص الاحداثيات على المنوعة M_2؛ ثم اننا نعلم انه يمكن تحويل كرة الى اخرى في R_n بواسطة انسحاب وتحاك، اي بواسطة توابع من الدرجة الاولى.

22. 6 . امثلة.

أ. هل كل قرص مفتوح في المستوى منوعة قابلة للمفاضلة؟

الجواب. ليس لهذا السؤال معنى لأن جمل الاحداثيات المقبولة غير معطاة.

ب. نصف قرصا في المستوى بالاحداثيات القطبية $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ ، $\rho < 1$ ونختار كاحداثيات مقبولة الاحداثيات المرتبطة بـ ρ و φ بالعلاقات من النوع (1)، والمنتمية لصنف مثبت D_N . هل يمثل هذا القرص منوعة قابلة للمفاضلة؟

الجواب. لا . ان مجموعة الوسيطات $0 \leqslant \rho < 1, 0 < \varphi \leqslant 2\pi$ ليست قرصا مفتوحا في المستوى ρ, φ حيث يرمز ρ و φ للإحداثيات الديكارتية.

ج . نعين قرصاً في المستوى بالمتراجحة $x^2 + y^2 < 1$ وذلك ضمن الاحداثيات الديكارتية؛ نختار، كاحداثيات مقبولة، الاحداثيات المرتبطة بـ x, y بالعلاقات من النوع (1)، والمنتمية لصنف مثبت D_N. هل يمثل هذا القرص منوعة قابلة للمفاضلة؟

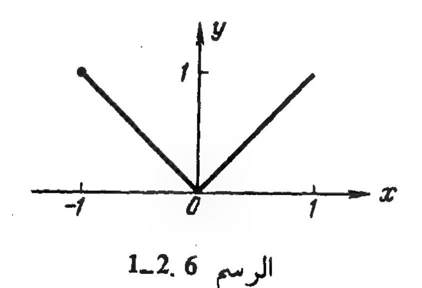
الجواب. نعم، إنه منوعة قابلة للمفاضلة.

د . نعرّف مجموعة من المستوى بالشروط (الرسم 2.6 ـ 1):

$$x \geqslant 0: \ y = x, \qquad 0 \leqslant x < 1,$$
$$x \leqslant 0: \ y = -x, \qquad -1 < x \leqslant 0$$

ونزودها بالإحداثية s (طول قوس) المحسوبة ابتداء من النقطة 0، حيث نسبقها باشارة + على يمين هذه النقطة وبالاشارة − على يسارها؛ نختار كاحداثيات مقبولة، كل التوابع $\sigma = \varphi(s)$ القابلة للإشتقاق باستمرار حتى الرتبة N، والمحققة لـ $\varphi'(s) \neq 0$. هل تمثل هذه المجموعة منوعة قابلة للمفاضلة؟

الجواب. نعم، انها تكافىء المنوعة $M_1 = \{-\sqrt{2} < s < \sqrt{2}\}$ وحتى المنوعة:
$M_2 = \{-1 < s < 1\}$ على المحور الحقيقي، بنفس الاحداثيات المقبولة.



الرسم 6 .2ـ1

32.6 . نقول عن خاصي مكتوبة بدلالة الاحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ انها خاصية مطلقة أو هندسية للمنوعة M، اذا كانت لها نفس العبارة في كل جملة احداثيات مقبولة اخرى.

أ . على سبيل المثال، فإن متتالية $\ldots, A_m, \ldots, A_1$ من نقاط منوعة M تكون متقاربة نحو نقطة A من هذه المنوعة (نكتب $A_m \to A$) إذا تحقق لدينا في جملة احداثيات $x^1, \ldots, x^n$، من اجل $m \to \infty$:

$$x^1(A_m) \to x^1(A), \ldots, x^n(A_m) \to x^n(A).$$

حينئذ يكون لدينا في كل جملة احداثيات مقبولة اخرى $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$:

$$x^{1'}(A_m) \to x^{1'}(A), \ldots\ x^{n'}(A_m) \to x^{n'}(A),$$

وهذا بفضل استمرار التوابع القابلة للإشتقاق $x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$.
وهكذا فإن الخاصية $A_m \to A$ خاصية مطلقة للمنوعة M .

ب . لتكن $x^i = x^i(t)\ (i = 1, \ldots, n; a \leqslant t \leqslant b)$ توابع قابلة للإشتقاق k مرة؛ يسمى المحل الهندسي L للنقاط الموافقة لها $(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \in M$ منحنيا قابلا للإشتقاق k مرة على المنوعة M .
عند الانتقال الى جملة احداثيات اخرى، نجد:

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1(t), \ldots, x^n(t)) \quad (i' = 1, \ldots, n);$$

إنها دوما توابع قابلة للإشتقاق k مرة بالنسبة t من اجل $k \leqslant N$.
وهكذا فإن مفهوم «المنحنى القابل للإشتقاق k مرة على المنوعة M» خاصية مطلقة من اجل $k \leqslant N$.

ج . نقول عن نقطة $A = \{x^1(t_0), \ldots, x^n(t_0)\} \in L \subset M$ على المنحنى L إنها عادية إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{dx^i(t_0)}{dt}\right]^2 > 0$، وشاذة إذا كان $\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{dx^i(t_0)}{dt}\right]^2 = 0$. بما ان لدينا في كل جملة احداثيات اخرى:

$$\frac{\partial x^{i'}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i(t)}{dt},$$

فإننا نرى أنه إذا كانت نقطة A على المنحنى L شاذة في جملة احداثيات على M فإنها تبقى كذلك على L من اجل كل جملة احداثيات اخرى.

وهكذا فإن مفهوم « النقطة الشاذة ». وبالتالي مفهوم « النقطة العادية » ايضا، مفهوم مطلق.

د . بطريقة مماثلة ندرك، من اجل $k \leqslant N$ ، أن مفهوم « السطح P ذي البعد s القابل للإشتقاق k مرة على المنوعة M » مفهوم مطلق؛ يطلق هذا المفهوم على المحل الهندسي للنقاط المعرفة ضمن الاحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ بجملة من الشكل التالي ذات s وسيطا $s \leqslant n$:

$$x^i = x^i (t_1, \ldots, t_s), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t = (t_1, \ldots, t_s) \in G \subset R_s,$$

حيث $x^i (t_1, \ldots, t_s)$ توابع قابلة للإشتقاق بإستمرار k مرة.

ر . تسمى نقطة $A \in P$ **نقطة عادية من السطح** $P \subset M$ إذا كانت مرتبة المصفوفة $\left\| \frac{\partial x^i (A)}{\partial t^j} \right\|$ تساوي s (وهو عدد الوسيطات) ونقطة شاذة إذا كانت مرتبة هذه المصفوفة اصغر من s. يتبين من المساواة 1 .33(7):

$$\left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial t^j} \right\| = \left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\| \left\| \frac{\partial x^i}{\partial t^j} \right\|$$

ومن العلاقة بين الاصغريات ذات الرتبة s من الطرف الاول والاصغريات ذات الرتبة s من العامل الثاني في الطرف الثاني، انه إذا كانت نقطة A شاذة على السطح P ضمن الاحداثيات $\{x^i\}$ فإنها تبقى شاذة ضمن الاحداثيات $\{x^{i'}\}$. وهكذا نرى ان مفهومي « النقطة الشاذة » و« النقطة العادية » على سطح مفهومان مطلقان.

42. 6 . الفضاء الماس. لتكن $A \in M_n$ نقطة مثبتة. نتناول منحنيا قابلا للاشتقاق $L = \{x \in M : x^i = x^i (t), \; a \leqslant t \leqslant b\}$ على المنوعة M_n المارة بهذه النقطة. تشكل المجموعة العددية $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ حيث

$$\xi^i = \frac{dx^i (A)}{dt}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

، حسب التعريف، شعاعا ماسا للمنحنى L عند النقطة A. تملأ مثل هذه الاشعة، بطبيعة الحال، كل الفضاء R_n ذي البعد n ، لأن كل شعاع $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in R_n$ هو بالضرورة مماس لمنحنى $L \subset M_n$ مثلا للمنحنى:

$$x^i(t) = x^i(A) + \xi^i t$$

المار بالنقطة A من اجل $t = 0$. بمراعاة هذه الصلة، نرمز للفضاء R_n بـ $T_n(A)$ ويسمى الفضاء الماس للمنوعة M_n عند النقطة A. يتألف اساس لهذا الفضاء من الاشعة الماسة للمنحنيات:

$$\underset{j}{x^i}(t) = x^i(A) + \delta^i_j t \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

(«خطوط الاحداثيات المرسومة انطلاقا من النقطة A»)

يؤدي كل تحويل مقبول للإحداثيات $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ الى تحويل خطي في الفضاء الماس عند النقطة A. على وجه التحديد، لدينا ضمن جملة الاحداثيات $x^{i'}$:

$$\xi^{i'} = \frac{dx^{i'}(A)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}(A)}{\partial x^i} \frac{dx^i(A)}{dt} = p^{i'}_i \xi^i,$$

حيث $p^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}(A)}{\partial x^i}$. لكي نرى ما إذا كانت هذه النتيجة مطابقة للقواعد الموترية، ينبغي ان نكتب دساتير تحويل اشعة الاساس. يمثل شعاع اساس جديد $e_{i'}$ شعاعا ماسا لخط الاحداثيات الجديد $x^{i'}$، اي الشعاع الماس للخط $x^{1'} = x^{1'}(A), \ldots, x^{i'} = x^{i'}(A) + t, \ldots,$ $x^{n'} = x^{n'}(A).$ زيادة على ذلك:

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{dx^i(A)}{dt} = 0, \ldots, \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i(A)}{dt} = 1, \ldots, \frac{\partial x^{n'}}{\partial x^i} \frac{dx^i(A)}{dt} = 0,$$

إذن، لدينا من اجل هذا الخط:

$$\frac{dx^i(A)}{dt} = p^i_{i'}(A), \qquad (1)$$

حيث $\| p^i_{i'}(A) \|$ المصفوفة المقلوبة للمصفوفة $\| p^{i'}_i(A) \|$؛ تتشكل هذه المصفوفة المقلوبة، كما ينتج ذلك من 33.1 ـ ب، من العناصر $p^i_{i'} = \frac{\partial x^i(A)}{\partial x^{i'}}$. بضرب (1) في e_i والجمع على i نحصل على:

$$e_{i'} = p^i_{i'} e_i.$$

وهكذا فإن الكميات ξ^i تشكل موترات متغايرة عكسيا مرة واحدة في الفضاء الماس عند النقطة A. من اجل $M = M_{n, N}$ فإن التوابع $p^{i'}_i$ $(p^i_{i'})$ تقبل الاشتقاق $N - 1$ مرة على الاقل.

يمكن بعد ذلك تعريف موتر بنيته كيفية في الفضاء الماس $T_n(A)$ على سبيل المثال فإن موترا $T^h_{ij}(A)$ جملة من n^3 عددا، يتعلق بجملة الاحداثيات على M_n وتتحول عند الانتقال من الاحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ الى الاحداثيات $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ حسب الدساتير:

$$T^{k'}_{i'j'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k T^k_{ij},$$

حيث، كما جاء اعلاه:

$$p^i_{i'} = \frac{\partial x^i(A)}{\partial x^{i'}}, \quad p^j_{j'} = \frac{\partial x^j(A)}{\partial x^{j'}}, \quad p^{k'}_k = \frac{\partial x^{k'}(A)}{\partial x^k}.$$

بهذه الطريقة يمكن في الفضاء الماس $T_n(A)$ انجاز كل الجبر الموتري الموصوف في §1.6 .

52.6 . الحقل الموتري.

أ. إذا كان موتر بنيته مثبتة، الموتر $T^h_{ij}(x)$ معطى عند كل نقطة $x \in M_n$ ، وكانت لمركباته مشتقات، بالنسبة للإحداثيات، حتى الرتبة m ، بما فيها m ، فإننا نقول ان لدينا حقلا موتريا $T^h_{ij}(x)$ يقبل الاشتقاق m مرة، معطى على المنوعة M_n . ينتج عن العلاقة الاساسية:

$$T^{k'}_{i'j'}(x) = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_k T^k_{ij}(x)$$

ومن قابلية الاشتقاق حتى الرتبة $(N-1)$ للتوابع $p^i_{i'}(x), p^j_{j'}(x)$، $p^{k'}_k(x)$ ، من اجل $m \leqslant N-1$ ان خاصية الحقل $T^h_{ij}(x)$ التي تنص على ان له مشتقات حتى الرتبة m خاصية مطلقة.

ب. ليكن $f(x)$ تابعا عدديا معطى على منوعة M_n من الصنف N ، وقابلة للإشتقاق $m < N$ مرة بالنسبة للإحداثيات $x^1, \ldots, x^n$ يمكن القول ان التابع $f(x)$ يعرف على المنوعة M_n حقلا موتريا مرتبته منعدمة. نعتبر عند كل نقطة $x \in M_n$ الكميات:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^n};$$

نأكد على انها تعيّن حقلا موتريا مرتبته 1 وهو حقل متغاير مرة اخرى رتبة قابلية اشتقاقه $m-1$.

بالفعل، لدينا في جملة احداثيات $x^{n'}$ ، . . . ، $x^{1'}$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f(x)}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = p^{i}_{i'} \frac{\partial f(x)}{\partial x^{i}},$$

وهو ما يمثل قانون تحويل مركبات موتر متغاير مرة واحدة. اما رتبة قابليته اشتقاقه فمن الواشح ان قابلية التابع $f(x)$ للإشتقاق m مرة تستلزم قابلية التابع $\frac{\partial f(x)}{\partial x^{i}}$ للإشتقاق $(m-1)$مرة.

•ج. يمكن إعتبار الحقول الموترية المعرفة ليس على المنوعة M_n بل على خط او على سطح في M_n ؛ ويبقى حينئذ تعريف رتبة قابلية اشتقاق الحقل قائم.

نستطيع جمع الحقول الموترية، من رتبة اشتقاق m، المعطاة على M_n بأكملها أو على نفس الخط أو السطح، كما يمكن ضربها فيما بينها وتقليصها (عند كل نقطة)؛ يؤدي ذلك الى حقول موترية اخرى من نفس رتبة الاشتقاق m .

62. 6 . رغم ذلك فإن اشتقاق موتر بالنسبة لإحداثيات (على طول الخط أو السطح المعطى عليه هذا الموتر) لم يعد يؤد الى كميات موترية.

ليكن $T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k}(x)$ حقلا موتريا قابلا للإشتقاق:
نبحث عن دستور تحويل الكميات $\frac{\partial T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{r}}$. نرمز بـ $p^{i}_{i'r'} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^{i'} \partial x^{r'}}$ (ونرمز للمشتقات الثانية الاخرى بطريقة مماثلة) فنحصل على:

(1)

$$\frac{\partial T^{j'_1 \ldots j'_m}_{i'_1 \ldots i'_k}}{\partial x^{r'}} = \frac{\partial}{\partial x^{r'}} (p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k} p^{j'_1}_{j_1} \ldots p^{j'_m}_{j_m} T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k}) =$$

$$= p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k} p^{j'_1}_{j_1} \ldots p^{j'_m}_{j_m} \frac{\partial T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{r}} p^{r}_{r'} + p^{i_1}_{i'_1 r'} p^{i_2}_{i'_2} \ldots p^{j'_m}_{j_m} T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k} + \ldots$$
$$\ldots + p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{j'_{m-1}}_{j_{m-1}} p^{j'_m}_{j_m r} T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k} p^{r}_{r'}.$$

لو كان في هذا المجموع الحد الاول فقط لأجري تحويل الكميات $\frac{\partial T^{j_1 \ldots j_m}_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^r}$ حسب القانون الموتري (بدليل متغاير r اضافي). لكن تواجد حدود تحوي المشتقات الثانية تعقد قانون التحويل. إن عدد تلك الحدود يساوي عدد دليلات الموتر الابتدائي. يعطى كل دليل متغاير حدا بعامل من الشكل $p^{i}_{i'r'}$ ، ويعطي كل دليل متغاير عكسيا حدا بعامل من الشكل $p^{j'}_{jr}p^{r}_{r'}$ ، على سبيل المثال، لدينا من اجل مشتقات موتر متغاير عكسيا مرة واحدة ξ^i :

$$\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{k'}} = p^{i'}_{i} p^{k}_{k'} \frac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{k}} + p^{i'}_{ik} p^{k}_{k'} \xi^{i} \tag{2}$$

او ، بمراعاة $dx^{k'} = p^{k'}_{k}\, dx^{k}$

$$d\xi^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^{k'}} dx^{k'} = p^{i'}_{i}\, d\xi^{i} + p^{i'}_{ik} \xi^{i}\, dx^{k}. \tag{3}$$

لدينا ، من اجل موتر متغاير مرتين $g_{ij}(x)$:

$$\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}} = p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{k}_{k'} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}} + p^{i}_{i'k'} p^{j}_{j'} g_{ij} + p^{i}_{i'} p^{j}_{j'k'} g_{ij}. \tag{4}$$

§ 3. 6 . الفضاءات الريمانية الاولية.

13. 6 . أ . تسمى منوعة اولية قابلة للمفاضلة M_n فضاء ريمانيا أوليا إذا عُرّف على M_n حقل موتري $g_{ij}(x)$ متغاير مرتين ومتناظر عند كل نقطة ($g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$) ومعرف موجب. تعني الخاصية الاخيرة ان المتراجحة التالية محققة من اجل كل موتر متغاير عكسيا مرة واحدة وغير منعدم $\xi^j(x)$:

$$g_{ij}(x)\, \xi^{i}(x)\, \xi^{j}(x) > 0.$$

ب . نقول ان فضاءين ريمانيين أوليين M_1 و M_2 متكافئان او ايزومتريان إذا تمكنا من ادخال احداثيات مقبولة عليهما بحيث تكتب الكميات $g_{ij}(x)$ بدلالة نفس التوابع الاحداثيات على M_1 وعلى M_2 . كنا رأينا هذا المفهوم في نظرية السطوح.

ج . يمكن تعريف، من اجل كل فضاء ريماني أولي M_n ، الجداء السلمي (61. 6) لشعاعين ماسين (موتريـن متغـايـريـن عكسيـا مـرة واحـدة)

$\xi = \{\xi^i(x)\}$ et $\eta = \{\eta^i(x)\}$ ، كما يلي:

$$(\xi, \eta) = g_{ij}(x)\, \xi^i(x)\, \eta^j(x);$$

يزوّد هذا الجداء السلمي فضاء ماسا $T_n(x)$ بمسافة، أي يعرّف اطوال الاشعة والزوايا التي تشكلها هذه الاشعة.

بصفة خاصة، لدينا من اجل اشعة اساس فضاء ماس $T_n(x)$:

$$(e_i, e_j) = g_{ij},$$

وهي مساواة استخدامناها اعلاه كتعريف للأعداد g_{ij} .

د . تسمح مسافة الفضاءات الماسة بتزويد المنوعة M_n بمسافة. بالفعل، فإن عنصر قوس منحنى $L = \{x \in M_n\} : x^i = x^i(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ عند نقطة $P \in L$ معرف بالدستور:

$$ds^2 = g_{ij}(P)\, dx^i\, dx^j = |\, dx^i e_i\,|^2.$$

حينئذ يكون طول كل منحن L بين نقطتين A و B توافقان قيمتي الوسيط $t = a$ و $t = b$ على التوالي يحسب وفق الدستور

$$s = \int_A^B \sqrt{g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j} = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t)\, \xi^i(x)\, \xi^j(x)}\, dt,$$

حيث $\xi^i(x) = \frac{dx^i(t)}{\partial t}$. إن هذه العبارة لا تتعلق الآن بسبب طابعها الموتري، بجملة الاحداثيات. إذا لم تكن للمنحنى L نقاط شاذة (لا ينعدم الموتر $\xi^i(t)$) فإن طول القوس s المحسوب ابتداء من النقطة A الى النقطة الجارية $p = P(t)$ بوصفه تابعا لـ t ، له مشتق غير منعدم؛ يوجد إذن تابع عكسي $t = t(s)$ ؛ وبالتالي يمكن ان نعيّن المنحنى، كما هو الحال في الهندسة التفاضلية التقليدية، بالوسيط الطبيعي s .

ر . نقوم بقياس المساحات والاحجام في فضاء ريماني بالطريقة التي يتم بها ذلك على سطح في الفضاء الاقليدي R_n .

ليكن، مثلا $Q = \{x \in M_n : x^i = x^i(u, v), (u, v) \in \Omega \subset R_2\}$ سطحا ثنائي البعد. عندئذ تعرف التفاضليتان du و dv في الفضاء الماس $T_n(x)$ متوازى اضلاع أوليا، اضلاعهُ:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du = \frac{\partial x^i}{\partial u} du \cdot e_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial x^i}{\partial v} dv \cdot e_i$$

ومساحته (6 .71 ـ أ):

$$(1) \quad dS^2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial x}{\partial u} du\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial u} du, \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial x}{\partial u} du\right) & \left(\frac{\partial x}{\partial v} dv, \frac{\partial x}{\partial v} dv\right) \end{vmatrix} = (EG - F^2)\, du^2\, dv^2,$$

حيث

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

بمكاملة dS على الساحة Ω، نحصل على مساحة هذه الساحة:

$$S(Q) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

6 .23 . الانسحاب. نعرّف الآن مفهوم انسحاب موتر متغاير عكسيا مرة واحدة ξ^i، وهذا على طول منحن $L = \{x \in M_n, x^i = x^i(t), a \leqslant t \leqslant b\}$. أُدخل الانسحاب في نظرية السطوح بواسطة انشاء هندسي نتيجته المعادلة التفاضلية 5 .26(1) ذات المعاملات Γ_{ij}^k التي تكتب بطريقة معينة بدلالة الكميات g_{ij}. نعرّف هنا الانسحاب كحل للمعادلة التفاضلية.

$$(1) \qquad d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k(x)\, \xi^i(x)\, dx^j,$$

حيث $\Gamma_{ij}^k(x)$ توابع بـ x. اختيرت هذه التوابع بشكل يجعل الجداء السلمي للموترين ξ^i و η^i (كما هو الحال فيما يخص انسحاب الاشعة على سطح) لا يتغير بانسحاب هذين الموترين على طول اي خط L، بعبارة اخرى فإنه ينبغي على الكمية:

$$(2) \qquad (\xi, \eta) = g_{ij} \xi^i \eta^j$$

ان تبقى ثابتة على طول كل خط L. لتعيين المعاملات $\Gamma_{ij}^k(x)$ نفاضل (2):

$$0 = d(g_{ij}\xi^i\eta^j) = dg_{ij}\xi^i\eta^j + g_{ij}\, d\xi^i\eta^j + g_{ij}\xi^i\, d\eta^j.$$

نجري تعويض dg_{ij} بـ $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} dx^r$ و $d\xi^i$ بما يساويها في العلاقة (1)، و $d\eta^j$ بما يساويها لدى كتابة علاقة مماثلة لـ(1)، ثم نغيّر الدليلات بحيث لا تبقى سوى الكميات dx^r, ξ^p, η^q ، فنجد:

$$0 = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} \xi^p \eta^q dx^r - g_{iq} \Gamma^i_{pr} \xi^p \eta^q dx^r - g_{pj} \Gamma^j_{qr} \xi^p \eta^q dx^r.$$

ينتج عن ذلك:

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} = g_{iq} \Gamma^i_{pr} + g_{pj} \Gamma^j_{qr}.$$

مع العلم ان الحقول ξ, η والسبيل L كيفية.

بكتابة، رمزاً:

$$\Gamma_{pr,q} = g_{iq} \Gamma^i_{pr},$$

يمكننا وضع نفس المساواة على الشكل:

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r} = \Gamma_{pr,q} + \Gamma_{qr,p}. \tag{3}$$

نفرض على الكميات Γ^k_{ij} (وبالتالي على الكميات $\Gamma_{ij,k}$) الشرط $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$ ، اي شرط التناظر بالنسبة للدليلين i, j ؛ حينئذ نستطيع عند تعاطي العلاقات:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i},$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji,k} + \Gamma_{ki,j},$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i},$$

جمع الاولى والثانية منها ثم وطرح الثالثة، نجد عندئذ:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right). \tag{4}$$

بذلك تتعين المعاملات $\Gamma_{ij,k}$ إن الامر كذلك فيما يخص المعاملات:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{ks} \Gamma_{ij,s}, \tag{5}$$

حيث يمثل $\| g^{ks} \|$ ، كالعادة، المصفوفة المقلوبة لـ $\| g_{ij} \|$. نختار فيما

يلي المعاملات $\Gamma_{ij,k}$ و Γ^{k}_{ij} حسب الدساتير (4) و(5). نشير، استناداً لهذه الدساتير، ان الكميات $\Gamma_{ij,k}$ و Γ^{k}_{ij} متناظرة بالنسبة لِـ i و j. يضمن ذلك إمكانية تعريف انسحاب على طول اي خط L حسب الدساتير (1). اي ازاحة لا تغيّر قيمة الجداء السلمي (2). بصفة خاصة فهو لا يغير اطوال الاشعة (الموترات المتغايرة عكسيا مرة واحدة) ولا الزوايا التي تشكلها تلك الاشعة.

اضافة الى ذلك، فإن المعادلة التفاضلية (1) الخاصة بالانسحاب معادلة خطية متجانسة، ويمكننا جمع حلولها وضربها في الاعداد فنحصل بذلك على حلول اخرى. يأتي إذن أنه إذا انسحب شعاع $\xi(t)$ على طول منحن L، فإن الامر كذلك فيما يخص الشعاع $C\xi(t)$ وهذا من اجل كل ثابت C؛ اما المجموع $\xi(t)+\eta(t)$ حيث $\xi(t)$ و $\eta(t)$ شعاعان، فيسحب على طول منحنى L.

33. 6. تكتب المعاملات $\Gamma_{ij,k}$ بدلالة مشتقات الموتر g_{ij}، ولذا فهي لا تتحول وفق القانون الموتري. يمكن ان نكتب، بفضل الدستور 62. 6(4):

$$\Gamma_{i'j',k'}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i'k'}}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial g_{j'k'}}{\partial x^{i'}}-\frac{\partial g_{i'j'}}{\partial x^{k'}}\right)=$$

$$=p^{i}_{i'}p^{j}_{j'}p^{k}_{k'}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{k}}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(p^{i}_{i'j'}p^{k}_{k'}g_{ik}+p^{i}_{i'}p^{k}_{k'j'}g_{ik}\right)+\frac{1}{2}\left(p^{j}_{j'i'}p^{k}_{k'}g_{jk}+p^{j}_{j'}p^{k}_{k'i'}g_{jk}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(p^{i}_{i'k'}p^{j}_{j'}g_{ij}+p^{i}_{i'}p^{j}_{j'k'}g_{ij}\right).$$

بتغيير دليلات الجمع بحيث تكون لدينا في كل مكان g_{ik} نجد:

$$\Gamma_{i'j',k'}=p^{i}_{i'}p^{j}_{j'}p^{k}_{k'}\Gamma_{ij,k}+p^{i}_{i'j'}p^{k}_{k'}g_{ik}.$$

نحصل الآن من اجل المعاملات Γ^{k}_{ij} على:

$$(1)\quad \Gamma^{k'}_{i'j'} = g^{h's'}\Gamma_{i'j',s'} = p^{k'}_{k} p^{s'}_{s} g^{ks} (p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{r}_{s'} \Gamma_{ij,r} + p^{i}_{i'j'} p^{m}_{s'} g_{im}) =$$
$$= \delta^{r}_{s} p^{k'}_{k} p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} g^{ks} \Gamma_{ij,r} + \delta^{m}_{s} p^{k'}_{k} g^{ks} g_{im} p^{i}_{i'j'} =$$
$$= p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{k'}_{k} \Gamma^{k}_{ij} + p^{k'}_{k} p^{k}_{i'j'}.$$

نرى إذن ان دستور التحويل ليس موتريا، والسبب في ذلك في احتواء الحد الاخير على المشتقات الثانية للإحداثيات غير المزودة بفتحة بالنسبة للاحداثيات المزودة بفتحة. فضلا عن ذلك فإن هذا الحد يزول في حالة تحويل من الدرجة الاولى؛ وبالتالي إذا تعلق الامر بتحويل من الدرجة الاولى فإن الكميات Γ^{k}_{ij} تتحول، وكذا مركبات موتر، بتحويل الدليلات الموافقة لها (متغايرة مرتان ومتغايرة عكسيا مرة واحدة). نستفيد بجانب الدستور العام (1) بالدستور الخاص بالمشتق الثاني:

$$(2)\qquad p^{k}_{i'j'} = p^{k}_{k'} \Gamma^{k'}_{i'j'} - p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} \Gamma^{k}_{ij}.$$

43.6 . التفاضلية المطلقة لموتر متغاير عكسيا مرة واحدة. ليكن $\xi^{i}(t)$ حقل موتر متغاير عكسيا مرة واحدة $\xi_{i}(t)$ معطى على طول خط $L \subset M_n$. نعرّف تفاضليته المطلقة $D\xi^{i}$ بالدستور:

$$D\xi^{k} = d\xi^{k} + \Gamma^{k}_{ij}\xi^{i}\, dx^{j}.$$

يتبين من 23.6 ان تساوى التفاضلية المطلقة مع الصفر تعني بأن الموتر ξ^{i} مسحوب على طول الخط L.

لنبحث عن دستور تحويل التفاضلية المطلقة يسمح بالإنتقال الى جملة احداثيات اخرى. لدينا، حسب 33.6.

$$D\xi^{k'} = d\xi^{k'} + \Gamma^{k'}_{i'j'}\xi^{i'}\, dx^{j'} = p^{k'}_{k}\, d\xi^{k} + p^{k'}_{km}\xi^{k}\, dx^{m} +$$
$$+ (p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} p^{k'}_{k} \Gamma^{k}_{ij} + p^{k'}_{k} p^{k}_{i'j'})\, p^{i'}_{r} \xi^{r} p^{j'}_{s}\, dx^{s} =$$
$$= p^{k'}_{k}\, d\xi^{k} + p^{k'}_{km}\xi^{k}\, dx^{m} + \delta^{i}_{r}\delta^{j}_{s} p^{k'}_{k} \Gamma^{k}_{ij}\xi^{r}\, dx^{s} +$$
$$+ p^{k'}_{k} p^{i'}_{r} p^{j'}_{s} p^{k}_{i'j'}\xi^{r}\, dx^{s} = p^{k'}_{k}\, (d\xi^{k} + \Gamma^{k}_{ij}\xi^{i}\, dx^{j}) +$$

$$+ (p^{k'}_{km} + p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} p^{k'}_{l} p^{l}_{i'j'})\, \xi^{k}\, dx^{m}.$$

يتحول القوس في الحد الثاني بتعويض المشتقات الثانية حسب الدستور 33.6(2):

$$p^{k'}_{km} + p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} p^{k'}_{l} p^{l}_{i'j'} = p^{k'}_{s} \Gamma^{s}_{km} - p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} \Gamma^{k'}_{i'j'} +$$
$$+ p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} p^{k'}_{l} (p^{l}_{s'} \Gamma^{s'}_{i'j'} - p^{i}_{i'} p^{j}_{j'} \Gamma^{l}_{ij}) = p^{k'}_{s} \Gamma^{s}_{km} - p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} \Gamma^{k'}_{i'j'} +$$
$$+ \delta^{k'}_{s'} p^{i'}_{k} p^{j'}_{m} \Gamma^{s'}_{i'j'} - \delta^{i}_{k} \delta^{j}_{m} p^{k'}_{l} \Gamma^{l}_{ij} = 0,$$

واخيرا:

$$D\xi^{k'} = p^{k'}_{k} D\xi^{k}.$$

تعني هذه المساواة ان التفاضلية المطلقة لموتر متغاير مرة واحدة (بخلاف التفاضلية العادية) هي ايضا موتر متغاير عكسيا مرة واحدة.

إذن، نحصل على القضية التالية: إذا انسحب موتر متغاير عكسيا مرة واحدة على طول منحن ضمن جملة احداثيات، فهو كذلك في كل جملة احداثيات اخرى.

53.6 . الخطوط الجيوديزية

أ . تعريف. نقول عن خط $L = \{x \in M_n : x^i = x^i(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ على منوعة M_n انه **جيوديزي** (او **جيوديزية**) إذا كان الشعاع الواحدي الماس $\frac{dx^i}{ds} = \tau^i(s)$ مسحوبا على طول هذا الخط.

يتضح مما قلناه اعلاه ان تعريف خط جيوديزي له طابع مميز لا يتعلق بجملة الاحداثيات.

ب. نقسم المعادلة 23.6(1) على ds ونعوض فيها $\xi^k = \tau^k = \frac{dx^k}{ds}$ فنصل الى المعادلة التفاضلية للخطوط الجيوديزية:

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} = -\Gamma^{k}_{ij}(x) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}.$$

تنتج عن ذلك، كما ورد في 24.5 ، النظرية الاساسية لوجود ووحدانية الخطوط الجيوديزية:

نظرية. إذا كانت المعاملات $\Gamma^h_{ij}(x)$ مستمرة عند نقطة $A \in M_n$ فإن هناك جيوديزية واحدة تمر بهذه النقطة في كل منحي (معينة مثلا بشعاع واحدي τ).

ج. ثم يمكن، كما جاء في 44.5 ، اعادة انشاء السطح ذي البعد (n–1) الموازي جيوديزياً لسطح $\Pi_{n-1} \subset M_{n-1}$ بعده (n–1)، والبرهان على انه عمودي على الجيوديزيات التي تقطع عموديا Π_{n-1} . تؤدي هذه النتيجة، بدورها، الى خاصية القيمة القصوى للخطوط الجيوديزية: من بين كل المنحنيات التي تربط نقطتين قريبتين بكفاية من بعضهما على المنوعة M_n ، فإن الجيوديزية هي المنحنى الذي له اصغر طول.

د. نستطيع، من اجل منوعة ريمانية ثنائية البعد M_2 ، اعادة تعريف الانحناء الشكل 33.5 ـ أ:

$$K = \frac{\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{\partial\Gamma^k_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial\Gamma^k_{12}}{\partial x^1} + \sum_{s=1}^{2}\left(\Gamma^s_{11}\Gamma^k_{s2} - \Gamma^s_{12}\Gamma^k_{s1}\right)\right]g_{k2}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

واثبات، كما جاء في 36.5 ، علاقته بانسحاب شعاع على طول محيث مغلق. ثم نستطيع، كما هو الحال في 15.5 ، اثبات الايزومترية المحلية لمنوعة M_2 ، انحناؤها ثابت، مع السطح القانوني الموافق لها (المستوى، سطح الكرة، شبه سطح الكرة). نريد فيما يلي (§§ 5.6 ، 6.6) تعميم التعاريف والإنشاءات الموافقة لذلك الى حالة البعد n. لكنه يستحسن باديء ذي بدء دراسة هندسة فضاء اكثر تجريدا وهو الفضاء ذو الترابط التآلفي.

§ 4.6 . الفضاء ذو الترابط التآلفي

14.6 أ. لتكن M_n منوعة اولية قابلة للمفاضلة بعدها n ، من الصنف N.

نريد تعريف، مرة اخرى، انسحاب موتر ξ متغاير عكسيا مرة واحدة على طول خط قابل للإشتقاق $L = \{x \in M_n: \ x^i = x^i(t), \ a \leqslant t \leqslant b\}$ كحل للمعادلة:

$$d\xi^h = -\Gamma^h_{ij}(x)\,\xi^i\,dx^j.$$

(1)

لكن الفضاء M_n ، هذه المرة، ليس مزوداً بموتر متري g_{ij}، ولذا يمكن اخضاع المعاملات $\Gamma^h_{ij}(x)$ لشرط واحد، وهو شرط استقلال نتيجة انسحاب جملة الاحداثيات. يجعلنا ذلك نفرض على قانون تحويل الكميات Γ^h_{ij} شروطا تضمن الطابع الموتري لنتيجة الانسحاب. فيما يتعلق بالمسافة الريمانية فإن لدينا دستور التحويل التالي (33.6) عندما تكون Γ^h_{ij} معرفة بصفة وحيدة بالشرط القائل ان الجداء السلمي لشعاعين في حالة انسحاب يبقى ثابتا والقائل بالتناظر بالنسبة لـ i و j :

$$\Gamma^{h'}_{i'j'} = p^i_{i'}p^j_{j'}p^{h'}_h\Gamma^h_{ij} + p^{h'}_h p^h_{i'j'} \qquad (2)$$

وهو الدستور الذي يضمن، بالدون اللجوء الآن الى المسافة، الطابع الموتري للإنسحاب. يمكن ان نتوقع بأن يكون الشرط (2) ليس كافيا فحسب بل ضروريا لقيام الطابع الموتري للإنسحاب. لنثبت ذلك مباشرة. نفرض ان حل المعادلة (1)، من اجل كل معطيات ابتدائية $\xi^i(A)$ ، ذو طابع موتري. حينئذ، نجد ضمن جملة احداثيات جديدة $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$:

$$d\xi^h = -\Gamma^h_{ij}\xi^i\,dx^j = -\Gamma^h_{ij}p^i_{i'}p^j_{j'}\xi^{i'}\,dx^{j'},$$

لكن:

$$d\xi^h = d(p^h_{h'}\xi^{h'}) = dp^h_{h'}\xi^{h'} + p^h_{h'}\,d\xi^{h'} = p^h_{h'm'}\,dx^{m'}\xi^{h'} - p^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'}\xi^{i'}\,dx^{j'} =$$
$$= (p^h_{i'j'} - p^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'})\,\xi^{i'}\,dx^{j'}$$

بمقارنة النتائج ومراعاة كونها قائمة من اجل كل $\xi^{i'}$ و $dx^{j'}$ ، نجد:

$$p^i_{i'}p^j_{j'}\Gamma^h_{ij} = p^h_{h'}\Gamma^{h'}_{i'j'} - p^h_{i'j'}, \qquad (1)$$

أو، والقولان متكافئان:

$$\Gamma^{h'}_{i'j'} = p^i_{i'}p^j_{j'}p^{h'}_h\Gamma^h_{ij} + p^{h'}_h p^h_{i'j'}, \qquad (4)$$

وهو المطلوب.

تسمى الاعداد $\Gamma^h_{ij}(x)$ المعطاة في اية جملة احداثيات والمتحولة طبقا للقاعدة (2) معاملات الترابط التآلفي للمنوعة M_n .

ب. نقول عن منوعتين M_n و$\bar{M}_n$، معاملات ترابطهما التآلفي Γ^h_{ij} و $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ على التوالي، انهما **متكافئتان تآلفيا** إذا أستطعنا تزويدهما بجمل احداثيات (مقبولة) بشكل يجعل المعاملات Γ^h_{ij} و $\bar{\Gamma}^h_{ij}$ توابع احداثية على M_n و $\bar{M}_n$ على التوالي، في آن واحد.

ج. يمكن تعريف المعاملات $\Gamma^h_{ij}(x)$ بشكل كيفي ضمن جملة احداثيات وكذا في اية جملة احداثيات اخرى استناداً الى الدساتير (2). تأتي سلامة هذا التعريف (اي قيام الدساتير (2) عند اجراء انتقالين متواليين الى احداثيات جديدة) من الطابع الموتري للإنسحاب ومن وحدانية المعاملات Γ^h_{ij} من اجل انسحاب معطى (وهي الخاصية التي سبق البرهان عليها).

د. نقول عن ترابط $\Gamma = \{\Gamma^h_{ij}(x)\}$ على منوعة M_n انه **متناظر** إذا كان:

$$\Gamma^h_{ij}(x) \equiv \Gamma^h_{ji}(x)$$

وهذا ضمن سجل جملة احداثية. يكفي ان تقوم هذه العلاقات في جملة احداثيات واحدة لأن الدساتير (2) تضمن قيامها حينئذ في كل جملة اخرى ليس من الضروري، عموما، ان يكون الترابط Γ متناظرا وهذا لعدة اسباب منها، مثلا، اننا نستطيع تعريف المعاملات $\Gamma^h_{ij}(x)$ بشكل كيفي في جملة احداثيات، بصفة خاصة، يمكن اختيارها غير متناظرة. يسمى الفرق (في الحالة العامة):

$$S^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) - \Gamma^h_{ji}(x)$$

التواء (او فتل) الترابط Γ^h_{ij} . تشكل الكميات S^h_{ij} موتراً لأن:

$$S^{h'}_{i'j'} = \Gamma^{h'}_{i'j'} - \Gamma^{h'}_{j'i'} = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h (\Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}) + \\ + p^{h'}_h (p^h_{i'j'} - p^h_{j'i'}) = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{h'}_h S^h_{ij}.$$

وإذا كان $S^h_{ij} \equiv 0$ ، أي إذا كان الترابط Γ متناظرا، فإننا نقول بأن ليس للترابط Γ التواء (او فتل). سنناقش التفسير الهندسي للإلتواء

ادناه ضمن 54.6 . من الواضح انه لا يمكن ان يكون هناك تكافؤ بين منوعة M_n ترابطها التآلفي بدون التواء ومنوعة $\tilde{M}_n$ يقبل ترابطها التآلفي التواء غير منعدم.

ر . إذا كانت لدينا مسافة ريمانية، $g_{ij}(x)$ (على منوعة M_n) ترابطها التآلفي منشأ حسب الدساتير 23.6(4)، (5):

$$\Gamma_{ij}^{k} = g^{ks}\Gamma_{ij,\,s} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{s}} \right),$$

فإننا نقول عن هذا الترابط إنه **ريماني**.

لكن بالامكان ان يكون ترابط تآلفي موجودا بدون أية مسافة ريمانية. مثلا، فإن كل ترابط ريماني متناظر بالنسبة للدليلين السفليين ($\Gamma_{ij}^{k}(x) = \Gamma_{ji}^{k}(x)$) وهي نتيجة لا تتحقق في حالة ترابط كيفي كما سبق ان رأينا ذلك.

24.6 . أ . لا يمكن القول الآن في فضاء ذي ترابط تآلفي، ان الجداء السلمي لشعاعين في حالة انسحاب، يبقى ثابتا. لكن الخاصيات الخطية لمثل هذه الاشعة تبقى على حالها: إذا تحققت المساواة:

$$\xi(A) = \alpha\eta(A) + \beta\zeta(A),$$

فإنها تظل قائمة بعد القيام بإنسحاب للأشعة الثلاثة ξ, η, ζ على طول اي منحن L يمر بالنقطة A:

$$\xi(t) = \alpha\eta(t) + \beta\zeta(t).$$

تأتي هذه النتيجة مباشرة من خطية معادلة انسحاب 23.6(1).

نستخلص من ذلك ما يلي: تبقى الاشعة ... ,ξ, η المستقلة خطيا مستقلة خطيا بعد القيام بإنسحاب.

ب. لا يمكن القول ايضا في فضاء ذي ترابط تآلفي ان الانسحاب يحتفظ بطول الشعاع. خلافا لما رأينا بخصوص الفضاءات الريمانية، فإن نقطة A في فضاء ذي ترابط تآلفي، يمكن ان تقبل جوارا صغيرا بشكل كيفي تكون

فيه مركبات شعاع ξ كبيرة بشكل كيفي إثر القيام بانسحاب (راجع التمرين 5). كل ما نستطيع تأكيده هو: إذا اخترنا كوسيط على منحن L كمية s بحيث $|ds| \geqslant C \max_j |dx^j|$ (مثلا «القوس الشكلي» المعرف بالشرط $ds^2 = \sum_{j=1}^{n} (dx^j)^2$)، فإننا نجد في حدود المجال $0 \leqslant s \leqslant h$ حيث h عدد مثبت، ان مركبات شعاع مسحوب ξ محدودة من الاعلى بكمية لا تتعلق باختيار القوس L بل تتعلق فقط بـ h.

نتناول البرهان ونبدأ بوضع $\sigma = \sum_{k=1}^{n} (\xi^k)^2$ بحيث ان:

$$d\sigma = 2 \sum_{k=1}^{n} \xi^k d\xi^k = -2 \sum_{i,\, j,\, k=1}^{n} \xi^k \Gamma_{ij}^k \xi^i \frac{dx^j}{ds} ds.$$

عندئذ، إذا كانت الكميات $|\Gamma_{ij}^k(x)|$ محدودة من الاعلى بثابت C_1، نحصل على:

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(x) \frac{dx^j}{ds} \right| \leqslant C^{-1} \sum_{j=1}^{n} |\Gamma_{ij}^k(x)| \leqslant nC_1C^{-1} = C_2,$$

$$\sum_{i,\, k=1}^{n} |\xi^i \xi^k| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,\, k=1}^{n} [(\xi^i)^2 + (\xi^k)^2] \leqslant n\sigma,$$

إذن:

$$|d\sigma| \leqslant C_3 \sigma\, ds, \quad C_3 = nC_2,$$

أو:

$$\left| \frac{d \ln \sigma}{ds} \right| \leqslant C_3.$$

ينتج عن ذلك:

$$\sigma \leqslant \sigma_0 e^{C_3 s} \leqslant \sigma_0 e^{C_3 h}, \quad \sigma_0 = \sum_{j=1}^{n} [\xi^j(A)]^2 \tag{1}$$

ومنه يأتي ما ذهبنا اليه.

34. 6 . نعتبر الترابط الريماني للفضاء الشعاعي الاقليدي $M_n = R_n$ توجد في هذا الفضاء جملة احداثيات يكتب ضمنها الشكل المتري على النحو:

$(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$، بحيث ان كافة المعاملات $g_{ij}(x)$ ثابتة (تساو 0 أو 1)، وبالتـالي فـإن كـل معـاملات الترابـط $\Gamma_{ij}^{h}(x)$ منعـدمـة. إن المعاملات $\Gamma_{ij}^{h}(x)$ ، في جل الاحداثيات الاخرى، غير منعدمة عموما (نذكّر ان قانون تحويل Γ_{ij}^{h} غير موتري). رغم ذلك يوجد في جل الاحداثيات الاخرى للفضاء الاقليدي R_n شيء خاص غير محقق في المنوعات التي لا تكافيء هذا الفضاء. **أولاً**: المعاملات $\Gamma_{ij}^{h}(x)$ متناظرة بالنسبة للدليلين السفليين، كما هو الحال فيما يخص كل ترابط ريماني. ثانياً: تقوم خاصة تدعى **بالتوازي المطلق** وهي تنص على ان نتيجة انسحاب شعاع ξ لا تتعلق بالسبيل المتبع بل تتعلق فقط بنقطة انطلاقه ونقطة وصوله، بعبارة اخرى يأخذ الشعاع ξ موقعه الاصلي لدى القيام بانسحاب على طول محيط مغلق. بالفعل، فإن ذلك ينتج في جملة احداثيات حيث $\Gamma_{ij}^{h}(x) \equiv 0$، من تعريف انسحاب كحل لجملة المعادلات:

$$d\xi^h = -\Gamma_{ij}^{h}(x)\,\xi^i\,dx^j,$$

التي ترد، في جملة الاحداثيات المذكورة، الى الشكل:

$$d\xi^h \equiv 0$$

وهي معادلة حلها هو ξ^h =ثابتا؛ يعني ذلك ان مركبات شعاع تبقى ثابتة عند القيام بانسحاب. يظل ما قلناه قائما ضمن اية جملة احداثيات اخرى بفضل الطابع المطلق للإنسحاب. إذا عاد شعاع الى موقعه الاصلي بعد إنسحابه على طول محيط مغلق في جملة احداثيات، فإن الامر كذلك فيما يخص اية جملة احداثيات اخرى.

لنثبت ان الفضاء الاقليدي هو الوحيد المتمتع بالخاصيات المذكورة حول الترابط:

نظرية. إذا كان الترابط التآلفي $\Gamma_{ij}^{h}(x)$ ، من اجل منوعة M_n بعدها n وصنفها N ، متناظرا وقابلا للإشتقاق N-2 مرة ومؤديا للتوازي المطلق

فإن المنوعة M_n مكافئة تآلفيا للفضاء الاقليدي R_n .

البرهان. سوف نجد جملة إحداثيات جديدة $x^{n'}$,. . . ,$x^{1'}$ من الفضاء M_n تتحقق فيها $\Gamma^{k'}_{i'j'}(x) \equiv 0$.

نختار أساسا $e_1, \ldots, e_n$ من الفضاء الماس عند نقطة مثبتة $A \in M_n$ ونجري انسحابا لكل هذه الاسعة الى نقطة اخرى $B \in M_n$. تتعين الاشعة الجديدة بصفة وحيدة بفضل فرض التوازي المطلق، وهي تشكل اساس للمستوى الماس عند النقطة B ، لأن الانسحاب لا يمس الاستقلال الخطي (24.6). نرمز لمركبات الاشعة المحصل عليها (ضمن جملة الاحداثيات الاولى) بـ $\xi^k_m(x^1, \ldots, x^n)$ حيث $m = 1, \ldots, n$ لدينا:

$$d\underset{m}{\xi}^h = -\Gamma^h_{ij}(x) u^i(x)\, dx^j,$$

أو: (1)

$$\frac{\partial \underset{m}{\xi}^k}{\partial x^j} = -\Gamma^k_{ij}(x)\, \underset{m}{\xi}^i(x).$$

لإنشاء الاحداثيات الجديدة $x^{n'}$,. . . ,$x^{1'}$ نعتبر في البداية جملة المعادلات التفاضلية:

$$\frac{\partial x^h}{\partial x^{s'}} = \underset{s}{\xi}^h(x^1, \ldots, x^n) \quad (k, s' = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

حيث تمثل $x^{n'}$,. . . ,$x^{1'}$ الآن، المتغيرات الشكلية المستقلة. سنثبت ان هذه الجملة، مع المعطيات الابتدائية؛

$$x^k(0, \ldots, 0) = x^k(A) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

تقبل حلا وحيدا، بحيث تُعرَّف بجوار مصدر الاحداثيات في الفضاء $(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ التوابع:

$$x^1 = \varphi^1(x^{1'}, \ldots, x^{n'}), \ldots, x^n = \varphi^n(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \tag{4}$$

المحققة للجملة (2) والشروط (3). سنرى بأن معين $\left\|\frac{\partial x^k(0)}{\partial x^{i'}}\right\| \neq 0$ يخالف الصفر، ومنه سنتمكن من قلب المعادلات (4) بجوار النقطة A :

$$x^{1'} = \psi^1(x^1, \ldots, x^n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{n'} = \psi^n(x^1, \ldots, x^n),$$

وبهذه الطريقة نصل كل نقطة $(x^1, \ldots, x^n)$ في جوار A بالاعداد $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ بعد ذلك يتضح انه بالامكان إستخدام هذه الاعداد كاحداثيات جديدة.

لإنجاز مخططا هذا، نبدأ باثبات وجود ووحدانية الحل للمسألة (2) - (3). يكفي ان نتأكد من فرض نظرية فروبينيوس 55.2 الذي يكتب في هذه الحالة على الشكل:

$$\frac{\partial \underset{s}{\xi}^k}{\partial x^p} \underset{r}{\xi}^p = \frac{\partial \underset{r}{\xi}^k}{\partial x^p} \underset{s}{\xi}^p \qquad (k, r, s = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

لكن، لدينا بفضل (1):

$$\frac{\partial \underset{s}{\xi}^k}{\partial x^p} \underset{r}{\xi}^p = -\Gamma^k_{ip} \underset{s}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^p, \qquad \frac{\partial \underset{r}{\xi}^k}{\partial x^p} \underset{s}{\xi}^p = -\Gamma^k_{ip} \underset{r}{\xi}^i \underset{s}{\xi}^p,$$

ولما كان $\Gamma^k_{ip} = \Gamma^k_{pi}$ فإن:

$$\Gamma^k_{ip} \underset{s}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^p = \Gamma^k_{pi} \underset{s}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^p = \Gamma^k_{ip} \underset{s}{\xi}^p \underset{r}{\xi}^i,$$

وهكذا يتحقق الشرط (5)

توجد إذن جملة توابع $x^k = x^k (x_k^{1'}, .., x_k^{n'})$ تحقق المعادلات (2) والشروط الابتدائية (3). إن لهذه التوابع مشتقا اضافيا بالمقارنة مع التوابع $\underset{s}{\xi}^k (x^1, \ldots, x^n)$ وبالتالي لها مشتقين اضافيين بالمقارنة مع التوابع $\Gamma^k_{ij} (x)$ ؛ بعبارة اخرى، فإن التوابع $x^k (x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ تقبل الاشتقاق N مرة على الاقل. زيادة على ذلك لدينا: $\det \left\| \frac{\partial x^k}{\partial x^{s'}} \right\| = \det \| \underset{s}{\xi}^k (x) \| \neq 0$، وهو ما يثبت ان الكميات $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ يمكن استخدامها، محليا على الاقل، كاحداثيات جديدة على المنوعة M. لدينا ضمن هذه الاحداثيات الجديدة:

$$\underset{s}{\xi}^{k'} = p^{k'}_k \underset{s}{\xi}^k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \underset{s}{\xi}^k = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{s'}} = \delta^{k'}_{s'},$$

اي ان الاشعة التي اجرينا عليها انسحابا اشعة من الاساس. يكتب شرط الانسحاب على النحو:

$$d\underset{s}{\xi}^{k'} = -\Gamma^{k'}_{i'j'} \underset{s}{\xi}^{i'} dx^{j'}.$$

لما كان $\underset{s}{\xi}^{k'} = \delta^{k'}_{s'}$، نحصل على:

$$\Gamma^{h'}_{s'j'}\, dx^{j'} = 0,$$

ومنه يأتي، حيث $dx^{j'}$ كيفية:

$$\Gamma^{h'}_{s'j'} = 0,$$

وهو المطلوب.

44.6 . الخطوط الجيوديزية لمنوعة ذات ترابط تآلفي.

أ . يأخذ تعريف خط جيوديزي الذي تبنيناه في الفضاء الريماني الشكل الموالي في الفضاء ذي الترابط التآلفي: نقول عن منحن إنه خط جيوديزي إذا ظل شعاع ماس له، ماسا بعد إجراء إنسحاب لهذا الشعاع الى اية نقطة من المنحنى.

واضح ان هذا التعريف مميز ومستقل عما دون المنحنى.

ليكن $L = \{x \in M_n :\ x^i = x^i(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ خطا جيوديزيا منطلقا من النقطة A . وليكن $a^i = \frac{dx^i(a)}{dt}$ و ξ^i مسحوب a^i على طول المنحنى L عند النقطة الموافقة لـ t حينئذ:

$$\xi^i(t) = \lambda(t)\,\frac{dx^i(t)}{dt},$$

حيث $\lambda(t)$ عامل عددي. ندخل وسيطا جديدا τ على الخط L بحيث يكون $dt = \lambda(t)\, d\tau,\ \tau(A) = 0$ ؛ نجد لدى الانتقال الى τ :

$$\xi^i(\tau) = \frac{dx^i(\tau)}{d\tau},$$

إي ان الشعاع الماس $\frac{dx^i(\tau)}{d\tau}$ للمنحنى L الذي وسيطه τ قد تم انسحابه. سمي τ الوسيط القانوني على الجيوديزية L . بنقل $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ الى معادلة الانسحاب والتقسيم على $d\tau$ نصل الى المعادلة القانونية لخط جيوديزي

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} = -\Gamma^k_{ij}(x)\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^j}{d\tau} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{1}$$

ب . بإمكاننا الآن تعميم نظرية الوجود والوحدانية للخطوط الجيوديزية الى الفضاءات ذات الترابط التآلفي:

نظرية. تمر بكل نقطة A ووفق كل منحى جيوديزية واحدة في فضاء M_n ذي ترابط تآلفي معاملاته $\Gamma^h_{ij}(x)$ مستمرة.

البرهان. نثبّت نقطة A ومنحى معين، ضمن جملة احداثيات معطاة، بشعاع b^i . نحل الجملة (1) بالشروط الابتدائية $x^i(0) = x^i(A), \frac{dx^i(0)}{d\tau} = b^i$ نؤكد على انه يمكن وصل كل توابع $x^i = x^i(\tau)$ نحصل عليها بحل (1)، بخط جيوديزي على M_n . بالفعل، فإن الشعاع $\frac{dx^i}{d\tau}$ الماس لهذا الخط مسحوب على طول الخط المذكور بسبب المعادلات (1)، وهذا يعني ان الخط جيوديزي.

نفرض ان لدينا خطا جيوديزيا ثانيا $\tilde{L}$ يمر بالنقطة A وفق نفس المنحى ومزودا بوسيطه القانوني τ . تحقق هذه الجيوديزية المعادلة (1) بالشروط الابتدائية:

$$\tilde{x}^i(0) = \tilde{x}^i(A), \qquad \frac{d\tilde{x}^i(0)}{d\tau} = \lambda b^i. \tag{2}$$

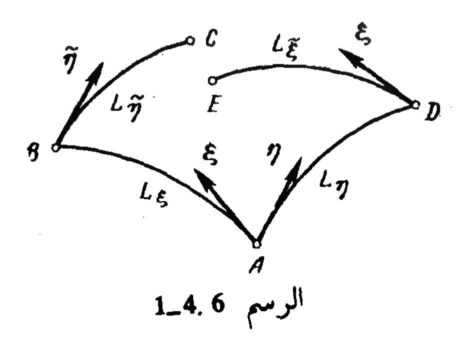
غير ان الانطلاق من الحل $x^i(\tau)$ الذي في حوزتنا يجعلنا نحصل بطريقة بديهية على حل $\tilde{\tilde{x}}^i(\tau)$ يحقق الشروط (2)؛ يتم ذلك حسب الدستور $\tilde{\tilde{x}}^i(\tau) = x^i(\lambda\tau)$يتبين، بفضل نظرية الوحدانية ان: $\tilde{x}^i(\tau) \equiv \tilde{\tilde{x}}^i(\tau) \equiv x^i(\lambda\tau)$ ؛ وهكذا فإن المنحنى الموافق للمعادلة $x^i = \tilde{x}^i(\tau)$ هو نفس المنحنى L .

6 .54 . التفسير الهندسي لإلتواء ترابط تآلفي. ليكن M_n فضاء ترابطه $\Gamma^h_{ij}(x)$ تآلفي ويقبل، عموما، التواء غير منعدم $S^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}$ نعتبر جيوديزيتين L_ξ و L_η تنطلقان من نقطة مثبتة في المناحي المعينة بالاشعة المستقلة خطيا: $\xi = \{\xi^i\}$ و $\eta = \{\eta^i\}$ (الرسم 14.6)

ليكن τ وسيطا قانونيا على الجيوديزية L_ξ بحيث $\frac{dx^i(A)}{d\tau} = \xi^i$ ، و θ وسيطا قانونيا على الجيوديزية L_η بحيث $\frac{dx^i(A)}{d\theta} = \eta^i$ نقوم بانسحاب للشعاع η على طول الجيوديزية L_ξ من النقطة A الى نقطة B معينة بقيمة

للوسيط $\tau = \rho > 0$ نقوم بطريقة مماثلة بانسحاب للشعاع ξ على طول الجيوديزية L_η من النقطة A الى النقطة D المعينة بنفس القيمة للوسيط ونعتبر الجيوديزية $L_{\tilde{\xi}}$ المادة بـD في منحى الشعاع المحصل عليه $\tilde{\xi}$. ندخل على الجيوديزية $L_{\tilde{\eta}}$ وسيطا قانونيا $\tilde{\theta}$ ، وعلى الجيوديزية $L_{\tilde{\xi}}$ وسيطا قانونيا $\tilde{\tau}$ بحيث يكون لدينا:

$$\frac{dx^i(D)}{d\tilde{\tau}} = \tilde{\xi}, \quad \frac{dx^i(B)}{d\tilde{\theta}} = \tilde{\eta}.$$



الرسم 1_4. 6

اخيرا، نبحث على الجيوديزية $L_{\tilde{\eta}}$ عن نقطة C معينة بالقيمة $\tilde{\theta} = \rho$ ، وعلى الجيوديزية $L_{\tilde{\xi}}$ عن نقطة E معينة بالقيمة $\tilde{\tau} = \rho$.

إذا قمنا بهذا الانشاء في الفضاء الشعاعي R_n (ذي الترابط المنعدم) فإننا نصل الى متوازي اضلاع وتتطابق النقطتان و . يتبين في الحالة العامة $(\Gamma_{ij}^k \neq 0)$ ان هاتين النقطتين غير متطابقتين؛ لنقيم انحرافهما.

يمكن كتابة تزايد الاحداثية x^k على طول كل خط جيوديزي على النحو التالي:

$$(1) \quad \Delta x^k = \frac{\partial x^k}{d\tau}\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x^k}{\partial \tau^2}\tau^2 + o(\tau^2) =$$
$$= \frac{\partial x^k}{\partial \tau}\tau - \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \tau}\frac{\partial x^j}{\partial \tau}\tau^2 + o(\tau^2),$$

حيث τ وسيط قانوني، اما قيم المشتقات والمعاملات Γ^k_{ij} فهي محسوبة عند نقطة البدء.

بصفة خاصة، لدينا فيما يخص الانتقال من النقطة **A** الى النقطة **B**:

$$\Delta_{AB}(x^k) = \xi^k\rho - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}(A)\xi^i\xi^j\rho^2 + o(\rho^2), \tag{2}$$

وفيما يخص الانتقال من **B** الى **C**:

$$\Delta_{BC}(x^k) = \tilde{\eta}^k\rho - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}(B)\tilde{\eta}^i\tilde{\eta}^j\rho^2 + o(\rho^2). \tag{3}$$

يمثل $\tilde{\eta}$ انسحاب الشعاع η:

$$\tilde{\eta}^k = \eta^k - \Gamma^k_{ij}(A)\eta^i dx^j + o(dx^j). \tag{4}$$

بما ان الحسابات اجريت بتقدير لا متناهيات في الصغر من الرتبة الثانية وأن علينا القيام بضرب في dx^j لدى نقل (4) الى (3)،فإنه يمكننا الاقتصار على اللامتناهيات في الصغر من الرتبة الاولى في (4)، وبصفة خاصة تعويض $\xi^j\rho$ بالكمية المساوية، بسبب (2)، $\Delta_{AB}x^j$ بتقدير لا متناهيات في الصفر من الرتبة الثانية. زيادة على ذلك، يمكننا تعويض في الدستور (3) $\Gamma^k_{ij}(B)$ et $\tilde{\eta}^i$ par $\Gamma^k_{ij}(A)$ et η^i على التوالي. نحصل حينئذ على:

$$\Delta_{BC}x^k = \eta^k\rho - \Gamma^k_{ij}\eta^i\xi^j\rho^2 - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\eta^i\eta^j\rho^2 + o(\rho^2). \tag{5}$$

اما فيما يخص التزايد الكلي للإحداثية x^k على طول السبيل ABC فهو من الشكل:

$$\Delta_{ABC}x^k = \Delta_{AB}x^k + \Delta_{BC}x^k = (\xi^k + \eta^k)\rho - \Gamma^k_{ij}\eta^i\xi^j\rho^2 - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\xi^i\xi^j\rho^2 - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\eta^i\eta^j\rho^2 + o(\rho^2). \tag{6}$$

نحصل على نتيجة مماثلة، من اجل تزايد الإحداثية x^k على طول السبيل ADE ، بتعويض احداثيات ξ بإحداثيات η :

$$\Delta_{ADE}x^k = \Delta_{AD}x^k + \Delta_{DE}x^k = (\eta^k + \xi^k)\rho - \Gamma^k_{ij}\xi^i\eta^j\rho^2 - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\eta^i\eta^j\rho^2 - \frac{1}{2}\Gamma^k_{ij}\xi^i\xi^j\rho^2 + o(\rho^2). \tag{7}$$

نرى إذن بأن فرق الاحداثيات x^k عند النقطتين C و E يساوي:

$$x^k(E) - x^k(C) = \Gamma^k_{ij}(\xi^j\eta^i - \xi^i\eta^j)\rho^2 + o(\rho^2) =$$
$$= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\xi^j\eta^i\rho^2 + o(\rho^2) = S^k_{ij}\xi^j\eta^i\rho^2 + o(\rho^2)$$

وهو معين، في جزئه الرئيسي، بموتر الالتواء $S^k_{ij}(A)$

64.6 . انسحاب موتر كيفي.

أ. إن انسحلاب موتر متغاير عكسيا مرة واحدة $\{\xi^i\}$ من نقطة A على طول منحن $L = \{x \in M_n : x^i = x^i(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ معرف، كما رأينا، بالمعادلة:

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}(x)\xi^k dx^j, \tag{1}$$

حيث $\xi^i(A)$ قيم معلومة.

ليكن $\{\eta_i(A)\}$ موترا متغايرا مرة واحدة. لنعرّف انسحابه على طول نفس المنحنى L انطلاقا من الشرط القائل أن اللا متغير $\xi^k(x)\eta_k(x)$ يبقى ثابتا، مهما كان $\{\xi^k\}$. يعني ذلك أن $d(\xi^k\eta_k) = 0$ ، أو:

$$\xi^k d\eta_k + d\xi^k\eta_k = 0. \tag{2}$$

نجد عند تعويض $d\xi^k$ بقيمته الواردة في المعادلة (1) (نعويض في الحد الاول دليل الجمع k بـ i).

$$\xi^i d\eta_i - \Gamma^k_{ij}\xi^i dx^j\eta_k = 0,$$

وبما أن المساواة محققة من اجل كل شعاع ξ^i ، لدينا:

$$d\eta_i = \Gamma^k_{ij}\eta_k dx^j. \tag{3}$$

تسمح هذه المعادلة، مع الشرط الابتدائي $\eta_i = \eta_i(A)$ ، بايجاد $\eta_i(x)$ عند كل نقطة من الخط L (بجوار النقطةA).

وبالعكس، إذا عُثرت التوابع $\eta_i(x)$ انطلاقا من المعادلة (3) فإن المعادلة (2) محققة ايضا، ومنه يأتي الاحتفاظ بالكمية $\xi^k(x)\eta_k(x)$ ومنه يأتي ان شرط الانسحاب الذي صغناه محقق.

نثبت اخيرا انه مجموعة الكميات $\eta_i(x)$ المعينة ضمن كل جملة احداثية ذات طابع موتري. تشكل الكميات $\eta_i(A)$ ، حسب الفرض، موترا وبالتالي فإن القيمة $\xi^k(A)\eta_k(A)$ لا تتغير بتغير جملة الاحداثيات. يتبين مما اثبتناه انها تبقى ثابتة على طول المنحنى L ، وعليه لا تتعلق القيمة $\xi^k(x)\eta_k(x)$ بجملة الاحداثيات عند نقاط المنحنى L . عند حل جملة المعادلات الخطية.

$$\underset{1}{\xi}^k(x)\eta_k(x)=\underset{1}{\xi}^k(A)\eta_k(A),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\underset{n}{\xi}^k(x)\eta_k(x)=\underset{n}{\xi}^k(A)\eta_k(A),$$

التي يدخل فيها n موترا مستقلة خطية $\underset{1}{\xi}^k(x),\ldots,\underset{n}{\xi}^k(x)$ نصل، في حالتنا هذه، الى موتر متغاير مرة واحدة $\{\eta_1(x),\ldots\eta_n(x)\}$ (41.6 - ج)، وهو المطلوب.

ب. كان بالإمكان البدء بتعريف انسحاب موتر η_i متغاير مرة واحدة حسب الدستور (3) ثم تعريف انسحاب موتر متغاير عكسيا مرة واحدة بالإنطلاق من شرط الإحتفاظ باللامتغير $\xi^i\eta_i$. سوف نصل عندئذ بطبيعة الحال، الى الدستور (1) من اجل انسحاب الموتر ξ^i .

ج. نعرّف بطريقة مماثلة الانسحاب على طول المنحنى L لأي موتر T. نفرض، لتوضيح الرؤية، بأن الموتر T معرف بالمركبات T^k_{ij} ، اي ان له دليلين متغايرين ودليلا متغايرا عكسياً. حينئذ، عندما يكون لدينا موتران ξ^i,η^j متغايران عكسيا مرة واحدة وموتر ζ_k متغاير مرة واحدة، نشكل اللامتغير $T^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k$. نعرف انسحاب الموتر T^k_{ij} بشرط انسحاب هذا اللامتغير، وهو ما يؤدي الى المساواة $d(T^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k)=0$ اي:

$$dT^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k+T^k_{ij}\cdot d\xi^i\cdot\eta^j\zeta_k+T^k_{ij}\xi^i\cdot d\eta^j\cdot\zeta_k+T^k_{ij}\xi^i\eta^j\,d\zeta_k=0.$$

نعوض التفاضليات $d\xi^i, d\eta^j, d\zeta_k$ بعباراتها الواردة في الدساتير الموافقة لإنسحاب الموترات المتغيارة عكسيا مرة واحدة والمتغايرة مرة واحدة (1) و(3) فنحصل على:

$$dT^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k - T^k_{ij}\Gamma^i_{pq}\xi^p\, dx^q\eta^j\zeta_k - T^k_{ij}\xi^i\Gamma^j_{pq}\eta^p\, dx^q\zeta_k + T^k_{ij}\xi^i\eta^j\Gamma^r_{kq}\zeta_r\, dx^q = 0.$$

نجرى تغييراً لدليلات الجمع بحيث نحصل اينما كان على الكميات $\xi^i\eta^j\zeta_k$؛ بما انها كيفية فإننا نجد العلاقات:

$$dT^k_{ij} = (\Gamma^s_{iq}T^k_{sj} + \Gamma^s_{jq}T^k_{is} - \Gamma^k_{sq}T^s_{ij})\, dx^q. \qquad (4)$$

بطريقة مماثلة، لدينا من اجل موتر بنيته كيفية $T^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_r}$:

$$dT^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_r} = (\Gamma^s_{i_1q}T^{k_1\ldots k_p}_{si_2\ldots i_r} + \ldots + \Gamma^s_{i_rq}T^{k_1\ldots k_p}_{i_1\ldots i_{r-1}s} - \qquad (5)$$
$$- \Gamma^{k_1}_{sq}T^{sk_2\ldots k_p}_{i_1\ldots i_r} - \ldots - \Gamma^{k_p}_{sq}T^{k_1\ldots k_{p-1}s}_{i_1\ldots i_r})\, dx^q.$$

إن بنية حدود العبارة المحصل عليها هي التالية « نلاحظ أن عدد الحدود يساوى العدد الكلي لدليلات الموتر T. كما نلاحظ ان الدليل الثاني الاسفل لِـ Γ هو نفس الدليل q في كل حد، إنه مطابق لدليل العامل dx^q . من جهة اخرى فإن كل دليلات الموتر T في الطرف الثاني هي نفس دليلاته الواردة في الطرف الاول، على التوالي، باستثناء واحد عُوض بدليل الجمع s؛ وقد زود Γ بنفس دليل الجمع، مع العلم انه يقع في الاعلى إن وقع في اسفل T، ويحتل المكان الاول في الاسفل إن وقع في اعلى T. ثم إن الدليل الحر الذي أستبدل بِـ s يحتل الموقع الوحيد المتبقى في الرمز Γ .

وبالعكس، إذا كان انسحاب موتر $T^k_{ij}(A)$ معرفا بالدستور (4) فإن المساواة $d(T^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k) = 0$ والكمية $T^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k$ لا تتغير على المنحنى L عند القيام بانسحاب لِـ ξ^i, η^j, ζ_k .

يؤدي ذلك الى حقل الكمية $T^k_{ij}(x)$ التي يثبت طابعها الموتري كما يلي مثلا: لما كانت الكمية $T^k_{ij}\xi^i\eta^j\zeta_k$ ثابتة على طول المنحنى L في كل جملة احداثيات فإن:

$$T^{h'}_{i'j'}(x)\,\xi^{i'}\eta^{j'}\zeta_{h'} = T^{h'}_{i'j'}(x)\,p^{i'}_{i}p^{j'}_{j}p^{k}_{h'}\xi^{i}\eta^{j}\zeta_{k} =$$

$$= T^{h'}_{i'j'}(A)\,\xi^{i'}\eta^{j'}\zeta_{h'} = T^{h}_{ij}(A)\,\xi^{i}\eta^{j}\zeta_{h} = T^{h}_{ij}(x)\,\xi^{i}\eta^{j}\zeta_{h},$$

حيث $\xi^i,\ \eta^j,\ \zeta_k$ كيفية، فنحصل عندئذ:

$$T^{h'}_{i'j'}(x)\,p^{i}_{i'}p^{j'}_{j}p^{k}_{h'} = T^{h}_{ij}(x),$$

وهو المطلوب.

د . إن التعريف السابق لا يقوم من اجل موتر ذي مرتبة منعدمة اي من اجل عدد T معطي عند نقطة A ولا يتعلق بجملة الاحداثيات. نعرف مسحوب T عند أية نقطة $B \in M_n$ على انه نفس العدد T معطي عند النقطة B في اية جملة احداثيات.

ر . نقول عن حقل موتري $T(x)$ معطى على خط $L \subset M_n$ انه لا متغير بالنسبة للإنسحاب على طول هذا الخط إذا تطابق مسحوب الموتر $T(A)$ عند كل نقطة $x \in L$ مع $T(x)$ وذلك مهما كانت النقطة $A \in L$. إذا كان حقل $T(x)$ معطي على كل المنوعة M_n وكان لا متغيرا بالنسبة للإنسحاب على كل خط L فإننا نقول بان الحقل $T(x)$ لا متغير بالنسبة للإنسحاب على M_n .

يمثل حقل ثابت T ، اي موتر مرتبه منعدمة ابسط مثال لحقل لا متغير بالنسبة للإنسحاب على M_n .

هناك مثال آخر يقدمه حقل موتر مختلط $\delta^j_i(x)$ مركباته، ضمن كل جملة احداثيات وعند كل نقطة $x \in M_n$ ، تساوي 0 لما $i \neq j$ و1 لما $i = j$. بالفعل، لدينا حسب ج:

$$d\delta^j_i(x) = (\Gamma^s_{iq}\delta^j_s - \Gamma^j_{sq}\delta^s_i)\,dx^q = (\Gamma^j_{iq} - \Gamma^j_{iq})\,dx^q = 0,$$

ومنه تأتي النتيجة المطلوبة.

س. نبين الآن ان الموتر المتري g_{ij} لا متغير بالنسبة للإنسحاب على كل

M_n وهذا في الفضاء الريماني M_n . نرمز بـ $\tilde{g}_{ij}(x)$ لمسحوب الموتر $g_{ij}(A)$ على طول خط L . يتبين من التعريف ج، من اجل ثنائية شعاعين مسحوبين $\xi(x)$ et $\eta(x)$ انه يجب ان يكون لدينا:

$$\tilde{g}_{ij}(x)\,\xi^i(x)\,\eta^j(x) = \text{ثابتا}$$

لكن تعريف الانسحاب في فضاء ريماني يبين ان الموتر $g_{ij}(x)$ هو الذي يتمتع بهذه الخاصية (23.6)، وبالتالي $\tilde{g}_{ij}(x) \equiv g_{ij}(x)$. نستطيع التأكد من ذلك بواسطة حساب مباشرة. لدينا، استنادا الى الدستور (4):

$$d\tilde{g}_{ij} = (\Gamma^s_{iq} g_{sj} + \Gamma^s_{jq} g_{is})\, dx^q =$$
$$= (\Gamma_{iq,\,j} + \Gamma_{jq,\,i})\, dx^q = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^q}\, dx^q = dg_{ij}\,;$$

ينتج عن ذلك ان الكميات $\tilde{g}_{ij}(x)$ المطابقة لـ $g_{ij}(x)$ من اجل $x = A$ تطابق ايضا $g_{ij}(x)$ من اجل كل $x \in M_n$.

ص إن حقل الموتر المتري $g^{jk}(x)$ المتغاير عكسيا مرتين والمعرف بجملة المعلات. 6 .61(2):

$$g_{ij}(x)\, g^{jk}(x) = \delta^k_i, \qquad (6)$$

هو ايضا لا متغير بالنسبة للإنسحاب على M_n ، ذلك ما ينتج مباشرة من لا تغاير الحقلين $g_{ij}(x)$ و δ^k_i ومن وحدانية حل الجملة (6).

6 .74 . التفاضل المطلق. ليكن $T(x)$ حقلا موتريا (قابلا للإشتقاق) معطى على منوعة M_n ذات ترابط تآلفي $\Gamma^k_{ij}(x)$. نفرض، مثلا، ان المتوتر $T(x)$ متغاير عكسيا مرة واحدة ومتغاير مرة واحدة ذلك ان المزيد من الدليلات يجعل الحسابات اكثر تعقيدا بدون فائدة تذكر.

أ. نعرف التفاضلية المطلقة للموتر $T^k_i(x)$ بطرح من تفاضليته العادية على السبيل dx^q مسحوبه على طول هذا السبيل:

$$DT^k_i(x) = dT^k_i - (\Gamma^s_{iq} T^k_s - \Gamma^k_{sq} T^s_i)\, dx^q.$$

وهكذا فإن المساواة $DT^k_i(x) = 0$ على طول منحن L تكافيء شرط

انسحاب الموتر $T_i^k(x)$ على طول هذا المنحنى.

إذا تعلق الامر بموتر $T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_p}$ بنيته كيفية، فإن التفاضلية المطلقة تُعرّف بطريقة ممثالة:

$$DT_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_p} = dT_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_p} - (\Gamma_{i_1 q}^{s} T_{s i_2 \dots i_r}^{k_1 \dots k_p} + \dots + \Gamma_{i_r q}^{s} T_{i_1 \dots i_{r-1} s}^{k_1 \dots k_p} - \\ - \Gamma_{sq}^{k_1} T_{i_1 \dots i_r}^{s k_2 \dots k_p} - \dots - \Gamma_{sq}^{k_p} T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_{p-1} s})\, dx^q.$$

نظرية. إن التفاضلية المطلقة لموتر $T_{i_1 \dots i_r}^{k_1 \dots k_p}$ موتر من نفس البنية.

نقوم، قصد الاختصار، بالبرهان في حالة موتر من الشكل T_i^k. نحوّل العبارة $DT_{i'}^{k'}$ بواسطة الدستور 41.6(3):

$$p_{i'q'}^{k} - \Gamma_{i'q'}^{k'} p_{k'}^{k} = - p_{i'}^{i} p_{j'}^{j} \Gamma_{ij}^{k}$$

والدستور الذي نحصل عليه من الدستور السابق الذكر عندما نعوض فيه الدليلات ذات الفتحة بالدليلات التي ليست فيها فتحة والعكس بالعكس:

$$p_{iq}^{k'} + p_i^{i'} p_j^{j'} \Gamma_{i'j'}^{k'} = \Gamma_{iq}^{k} p_k^{k'}.$$

لدينا:

$$DT_{i'}^{k'} = dT_{i'}^{k'} - (\Gamma_{i'q'}^{s'} T_{s'}^{k'} - \Gamma_{s'q'}^{k'} T_{i'}^{s'})\, dx^{q'} = \\ = d(p_{i'}^{i} p_k^{k'} T_i^k) - (\Gamma_{i'q'}^{s'} T_{s'}^{k'} - \Gamma_{s'q'}^{k'} T_{i'}^{s'})\, dx^{q'} = p_{i'}^{i} p_k^{k'}\, dT_i^k + \\ + p_{i'q'}^{i} p_q^{q'}\, dx^q p_k^{k'} T_i^k + p_{i'}^{i} p_{kq}^{k'}\, dx^q T_i^k - (\Gamma_{i'q'}^{s'} p_{s'}^{s} p_k^{k'} T_s^k - \\ - \Gamma_{s'q'}^{k'} p_{i'}^{i} p_s^{s'} T_i^s)\, p_q^{q'}\, dx^q = p_{i'}^{i} p_k^{k'}\, dT_i^k + (p_{i'q'}^{i} - \\ - \Gamma_{i'q'}^{s'} p_{s'}^{i})\, p_q^{q'} p_k^{k'} T_i^k\, dx^q + (p_{sq}^{k'} + \Gamma_{s'q'}^{k'} p_s^{s'} p_q^{q'}) p_{i'}^{i} T_i^s\, dx^q = \\ = p_{i'}^{i} p_k^{k'} (dT_i^k - \Gamma_{iq}^{s} T_s^k\, dx^q + \Gamma_{sq}^{k} T_i^s\, dx^q) = p_{i'}^{i} p_k^{k'} DT_i^k$$

وهو المطلوب.

ب. يمكن كتابة التفاضلية المطلقة T_i^k على الشكل:

$$DT^h_i = \nabla_q T^h_i \, dx^q, \qquad (1)$$

حيث تسمى العبارة.

$$\nabla_q T^h_i = \frac{\partial T^h_i}{\partial x^q} - (\Gamma^s_{iq} T^h_s - \Gamma^h_{sq} T^s_i) \qquad (2)$$

المشتق المطلق أو متغايرة الحقل الموتري $T^h_i(x)$ بالنسبة للإحداثية x^q . تشكل الكميات $\nabla_q T^h_i$ ، بوصفها حلا للمعادلة الموترية (1)، ايضا موترا له دليل متغاير (q) زيادة على الموتر T^h_i . يجدر بنا التذكير هنا ان المشتقات العادية للحقل الموتري اي الكميات $\frac{\partial T^h_i}{\partial x^q}$ ، لا تشكل موترا .(62. 6).

ج . نعتبر في فضاء ريماني الى جانب المشتق المتغاير المشتق المتغاير عكسيا:

$$\nabla^q T^h_i = (\nabla_r T^h_i)\, g^{rq}. \qquad (3)$$

يمثل g^{rq} هنا الموتر المتري المتغاير عكسيا مرتين (61.6). إن المشتق المتغيار عكسيا لموتر T موتر له دليل متغاير عكسيا زيادة على الموتر T نفسه.

§ 6 .5 . الانحناء

15. 6 . مبدل تفاضليين . نفرض في فضاء M_n ذي ترابط تآلفي Γ^h_{ij} ان لدينا سطحا ثنائي البعد $P = \{x \in M_n : x^i = x^i(u, v), (u, v) \in G \subset R_2\}$ يحوي نقطة $A = A\ (u_0, v_0)$ نرمز بـ d للتفاضلية (العادية) لحقل موتري كيفي $T(x)$ في منحى خط u (حيث الاحداثية v ثابتة):

$$dT = \frac{\partial T}{\partial u} du = \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial u} du,$$

وبـ $\tilde{d}$ للتفاضلية المماثلة لها على طول الخط v :

$$\tilde{d}T = \frac{\partial T}{\partial v} dv = \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial v} dv.$$

إن التفاضليتين d و $\tilde{d}$ يتبادلان فيما بينهما لأن:

$$\tilde{d}(dT) = \tilde{d}\left(\frac{\partial T}{\partial u} du\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial u\, \partial v} dv\, du,$$

$$d(\tilde{d}T) = d\left(\frac{\partial T}{\partial v} dv\right) = \frac{\partial^2 T}{\partial v\, \partial u} du\, dv.$$

نرمز بـ D و $\tilde{D}$ للتفاضليتين المطلقتين على التوالي. انهما لا تتبادلان عموما؛ لنحسب مبدلهما $\tilde{D}D - \tilde{D}D$ بالنسبة للحقل الشعاعي $\{\xi^l(x)\} = \xi$.

لدينا طبقا للتعريف 43.6 :

$$\tilde{D}(D\xi^l) = \tilde{D}(d\xi^l + \Gamma^l_{ki}\xi^k\, dx^i) =$$
$$= \tilde{d}(d\xi^l + \Gamma^l_{ki}\xi^k\, dx^i) + \Gamma^l_{pj}(d\xi^p + \Gamma^p_{ki}\xi^k\, dx^i)\,\tilde{d}x^j =$$
$$= \tilde{d}(d\xi^l) + \frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j}\tilde{d}x^j\xi^k\, dx^i + \Gamma^l_{ki}\tilde{d}\xi^k\, dx^i + \Gamma^l_{ki}\xi^k\,\tilde{d}(dx^i) +$$
$$+ \Gamma^l_{pj}\tilde{d}\xi^p\, dx^j + \Gamma^l_{pj}\Gamma^p_{ki}\xi^k\, dx^i\tilde{d}x^j.$$

نحصل على العبارة $D(\tilde{D}\xi^l)$ بتعويض d بـ $\tilde{d}$ والعكس بالعكس. إذا طرحنا $D(\tilde{D}\xi^l)$ من $\tilde{D}(D\xi^l)$ واستعملنا تبادلية الرمزين d و $\tilde{d}$ نحصل على:

$$(1)\quad (\tilde{D}D - D\tilde{D})\,\xi^l =$$
$$= \left(\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}\right)\xi^k\, dx^i\,\tilde{d}x^j + (\Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^l_{pi})\,\xi^k\, dx^i\,\tilde{d}x^j =$$
$$= \left(\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^l_{pi}\right)\xi^k\, dx^i\,\tilde{d}x^j.$$

بوضع:

$$(2)\qquad R^l_{ij,k} = \frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^l_{pi},$$

نجد ان المساواة (1) تكتب على الشكل:

$$(3)\qquad (\tilde{D}D - D\tilde{D})\,\xi^l = R^l_{ij,k}\xi^k\, dx^i\,\tilde{d}x^j.$$

لدينا في الطرف الاول من (3) موتر متغاير عكسيا مرة واحدة (كنتيجة تفاضل مطلق لموتر متغاير عكسيا مرة واحدة). اما في الطرف الثاني فإن العبارات $\xi^k, dx^i, \tilde{d}x^j$ ذات طابع موتري (موترات متغايرة عكسياً مرة واحدة). إنها كيفية لأن اختيار الشعاع $\xi^k \in T_n(x)$ والاحداثيتين u, v يتم وفق رغبتنا، وبالتالي تمثل الكمية $R^l_{ij,k}$ ، حسب 41.6 ـ د، موترا متغايرا ثلاث مرات ومتغايرا عكسيا مرة واحدة. نرى من الدساتير (2) ان هذا الموتر ضد تناظري بالنسبة للدليلين i و j :

$$R^l_{ij,k} = -R^l_{ji,k}.$$

يسمى الموتر $R = R^l_{ij,k}$ موتر انحناء الفضاء M_n ذي الترابط التآلفي Γ^k_{ij} .

25.6 . الانحناء والتوازي المطلق. نفرض، في الفضاء M_n ، ان الترابط Γ يولد التوازي المطلق (34.6). حينئذ، عندما يكون لدينا شعاع ξ عند نقطة معطاة A يمكننا إنشاء بجوار النقطة الحقل الشعاعي $\xi(x)$ المعين بطريقة وحيدة بانسحاب الشعاع ξ . إذا اخترنا، لدى انشاء الموتر R ، بمثابة الحقل $\xi(x)$ الحقل نفسه المحصل عليه بانسحاب الشعاع ξ فإن التفاضلية المطلقة لشعاع مسحوب منعدمة وبالتالي $D\xi = 0, \tilde{D}\xi = 0,$ ، إذن فإن الطرف الاول للمساواة 15.6(3) منعدم:

$$R^l_{ij,k}\xi^k dx^i \tilde{d}x^j = 0. \tag{1}$$

بما ان $\xi^k, dx^i, \tilde{d}x^j$ كيفية فهذا يعني:

$$R^l_{ij,k}(x) \equiv 0.$$

اخيراً فإن انحناء فضاء M_n ذي تواز مطلق انحناء منعدم.

لنثبت الآن القضية العكسية. نفرض ان انحناء فضاء M_n ذي ترابط تآلفي Γ^k_{ij} مطباق للصفر. لتكن جماعة منحنيات مرنة تصل نقطتين معلومتين A وB ؛ إن كل منحن من الجماعة معين بقيمة ثابتة لوسيط τ يتغير من 0 الى 1 ، اما نقاطه فتوافق قيم t التي تتغير بين 0 و1 :

$$x^i = x^i(t, \tau),$$
$$x(0, \tau) = A, \ x(1, \tau) = B.$$

نعتبر عند النقطة A شعاع ξ ونبين أن مسحوبه عند النقطة B على طول منحن $x = x(t, \tau)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ لا يتعلق بالقيمة $\tau \in [0, 1]$. نرمز بـD للتفاضلية المطلقة على طول منحنيات الجماعة (أي بالنسبة لِـ t ، من اجل τ مثبت)، وبـ $\tilde{D}$ للتفاضلية المطلقة بالنسبة τ ، من اجل t

مثبت. بما ان الشعاع ξ مسحوب فرضا، فإن $D\xi = 0$. ينتج عندئذ من $R \equiv 0$ ان:

$$D\tilde{D}\xi = 0,$$

إذن فإن الشعاع $\tilde{D}\xi$ مسحوب هو ايضا على طول كل منحن من الجماعة المعتبرة. الواقع ان الشعاع $\xi = \xi(0, \tau)$ والنقطة $A = x(0,\tau) = x$ من اجل $t = 0$، لا يتعلقان بـ τ؛ وبالتالي لدينا، من اجل $t = 0$:

$$\tilde{D}\xi^k = d\xi^k - \Gamma^k_{ij}\xi^i(0, \tau)\frac{dx^j}{d\tau}d\tau = 0.$$

وعليه فإن الشعاع $\tilde{D}\xi(1, \tau)$ هو ايضا منعدم بوصفه مسحوبا. من جهة اخرى:

$$\tilde{D}\xi^k(1, \tau) = \tilde{d}\xi^k(1, \tau) + \Gamma^k_{ij}(1, \tau)\xi^i dx^j(1, \tau),$$

ولما كان $\tilde{d}x^j = 0$ في حالتنا هذه، فإنه ينتج من $\tilde{D}\xi^k(1, \tau) = 0$ ان $\tilde{d}\xi(1, \tau) = 0$ اي ان الشعاع $\xi(1, \tau)$ ليس تابعا لـ τ. اثبتنا بذلك النظرية التالية:

نظرية. يكون لفضاء M_n ذي ترابط تآلفي تواز مطلق إذا وفقط إذا كان انحناؤه منعدما.

باستخدام 34.6 يمكننا ايضا صياغة مقياس تكافؤ بين الترابط التآلفي لفضاء M_n والترابط الريماني للفضاء الاقليدي:

نظرية. يكون فضاء M_n ذو ترابط تآلفي مكافئا تآلفيا للفضاء الاقليدي ذي البعد n إذا وفقط إذا كان انحناؤه والتواؤه مطابقين للصفر.

نلاحظ ان هناك فضاءات ذات ترابط تآلفي لها التواء منعدم وانحناء غير منعدم والعكس بالعكس.

يمكن اعتبار أي فضاء (او سطح) ريماني غير ايزومتري للفضاء الاقليدي كمثال لقضاء التؤاوه غير منعدم فهو اصعب من ذلك (راجع التمرين 4).

35.6 تغير احداثيات شعاع في حالة انسحاب على طول محيط مغلق.

أ. نفرض ان لدينا، في فضاء M_n ذي ترابط تآلفي قابل للإشتقاق مرتين $\Gamma(x)$ ، سطحا ثنائي البعد P بدون نقطة شاذة:

$$x = x(u, v) \in M_n, \qquad (u, v) \in G \subset R_2.$$

نقوم بسحب شعاع ξ على طول المنحنيات L المارة على السطح P بنقطة ثابتة A ، والتي يبقى من اجلها الطول الشكلي s المحصل عليه بمكاملة العبارة $ds = \sqrt{du^2 + dv^2}$ على طول L اصغر من ثابت مثبت h (ليس للطول الشكلي اتجاه مطلق، لكننا نعمل مؤقتا ضمن جملة ثابتة من الاحداثيات). تقع كل هذه المنحنيات على السطح S الجوار U للنقطة A المعين بالمتراجحتين $|u - u(A)| < h, |v - v(A)| < h$ اتحقق الاحداثيات $x^i(s)$ على مثل كل سبيل L من هذا النوع العلاقات:

$$|dx^i| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial u}du + \frac{\partial x^i}{\partial v}dv\right| \leqslant 2C_1\,ds, \qquad (1)$$

حيث $C = \max\limits_{U}\left(\left|\frac{\partial x^i}{\partial u}\right|, \left|\frac{\partial x^i}{\partial v}\right|\right)$ نستنتج المتراجحات التالية بخصوص تزايدات الاحداثيات x^i (المحسوبة ابتداء من النقطة A حيث $s = 0$):

$$|\Delta x^i(s)| = |x^i(s) - x^i(0)| \leqslant 2C_1 s \leqslant 2C_1 h. \qquad (2)$$

تحقق المعاملات $\Gamma^h_{ij}(x)$ على نفس السبيل L العلاقات:

$$|\Gamma^h_{ij}(x)| \leqslant C_2, \qquad (3)$$

او العلاقات الاكثر دقة:

$$|\Gamma^h_{ij}(s) - \Gamma^h_{ij}(0)| \leqslant C_3 s \leqslant C_3 h, \qquad (4)$$

او العلاقات الاكثر دقة مما سبق:

$$\left|\Gamma^h_{ij}(s) - \Gamma^h_{ij}(0) - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}(0)}{\partial x^m}\Delta x^m\right| \leqslant C_4 s^2, \qquad (5)$$

حيث يمكن تقدير الثابت C_3 بواسطة المشتقات الاولى و C_4 بواسطة المشتقات الثانية للتوابع $\Gamma^h_{ij}(x)$ في الجوار U. إن مركبات الشعاع $\xi(s)$ الذي هو انسحاب للشعاع ξ تحقق المتراجحة الآتية من 24.6(1):

$$|\xi^i(s)| \leqslant C_5 |\xi| \equiv C_5 \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\xi^j|^2}, \tag{6}$$

ومنه ياتي باستخدام (3) ان:

$$|d\xi^k| = |\Gamma^k_{ij}\xi^i dx^j| \leqslant C_6 |\xi| ds, \tag{7}$$

وبالتالي ايضا:

$$|\nabla\xi^k| = |\xi^k(s) - \xi^k| \leqslant C_6 |\xi| s \leqslant C_6 |\xi| h. \tag{8}$$

اخيرا نؤكد على قيام المتراجحة:

$$I(s) \equiv \left| \int_0^s \Gamma^k_{ij}(x)\,\xi^i(x) \frac{dx^j}{ds} ds - \Gamma^k_{ij}(0)\,\xi^i \Delta x^j \right| \leqslant C_7 s^2 |\xi|. \tag{9}$$

بالفعل فإن $\Delta x^j = \int_0^s dx^j$ ، وبالتالي:

$$I(s) \equiv \left| \int_0^s \Gamma^k_{ij}(x)\,\xi^i(x)\,dx^j - \int_0^s \Gamma^k_{ij}(0)\,\xi^i\,dx^j \right| =$$

$$= \left| \int_0^s [\Gamma^k_{ij}(x)\,\xi^i(x) - \Gamma^k_{ij}(0)\,\xi^i]\,dx^j \right| =$$

$$= \left| \int_0^s \{[\Gamma^k_{ij}(x) - \Gamma^k_{ij}(0)]\,\xi^i(x) + \Gamma^k_{ij}(0)\,[\xi^i(x) - \xi^i]\}\,dx^j \right|.$$

لدينا بفضل التقديرات (4)، (6)، (3)، (8) العلاقة المطلوبة:

$$I(s) \leqslant \int_0^s (C_3 s C_5 |\xi| + C_2 C_6 |\xi| s)\,|dx^j| \leqslant C |\xi| s^2.$$

ب. نعتبر الآن سبيلا مغلقا $L \in P$ طوله الشكلي $\leqslant h$ ، يعود الى النقطة A. نقوم بسحب شعاع $\{\xi^l\} = \xi$ نختاره بشكل كيفي عند نقطة A على طول L. يكون للشعاع M_n في فضاء ξ بدون تواز مطلق، تزايد $\Delta\xi$ علينا ان نعينه. يُعطي التزايد الكلي للإحداثية ξ^l بالدستور:

$$\Delta\xi^l = \oint_L d\xi^l = -\oint_L \Gamma^l_{pj}(x)\,\xi^p(x)\,dx^j. \tag{10}$$

يتبين من (5) أن:

$$\Gamma^l_{pj}(x) = \Gamma^l_{pj}(0) + \frac{\partial\Gamma^l_{pj}(0)}{\partial x^i} \Delta x^i + O(s^2),$$

ومن (9) يأتي.

$$\xi^p(x) = \xi^p - \int_0^s \Gamma^p_{ki}\xi^k(x)\,dx^i = \xi^p - \Gamma^p_{ki}(0)\,\xi^k\Delta x^i + O(s^2).$$

ومنه يأتي:

$$\Delta\xi^l = -\oint_L \left[\Gamma^l_{pj}(0) + \frac{\partial\Gamma^l_{pj}(0)}{\partial x^i}\Delta x^i + O(s^2)\right]\times$$
$$\times\,[\xi^p - \Gamma^p_{ki}(0)\,\xi^k\Delta x^i + O(s^2)]\,dx^j =$$
$$= -\Gamma^l_{pj}(0)\,\xi^p\oint_L dx^j - \frac{\partial\Gamma^l_{pj}}{\partial x^i}\xi^p\oint_L \Delta x^i\,dx^j +$$
$$+\,\Gamma^p_{ki}(0)\,\Gamma^l_{pj}(0)\,\xi^k\oint_L \Delta x^i\,dx^j + O(h^3).$$

من الواضح ان الحد الاول منعدم. نحصل على:

$$\Delta\xi^l = \left(\Gamma^p_{ki}(0)\,\Gamma^l_{pj}(0) - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}(0)}{\partial x^i}\right)\xi^k\oint_L \Delta x^i\,dx^j + O(h^3). \tag{11}$$

ننتقل الى الوسيطين u و v في التكامل الداخلي. لدينا باستخدام دستور تمرين 4 .61(3):

$$\oint_L \Delta x^i\,dx^j = \oint_L \Delta x^i\left(\frac{\partial x^j}{\partial u}du + \frac{\partial x^j}{\partial v}dv\right) = \tag{12}$$
$$= \iint_G \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\Delta x\frac{\partial x^j}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\Delta x^i\frac{\partial x^j}{\partial u}\right)\right]du\,dv =$$
$$= \iint_G \left(\frac{\partial x^i}{\partial u}\frac{\partial x^j}{\partial v} - \frac{\partial x^j}{\partial u}\frac{\partial x^i}{\partial v}\right)du\,dv =$$
$$= \left[\frac{\partial x^i(0)}{\partial u}\frac{\partial x^j(0)}{\partial v} - \frac{\partial x^j(0)}{\partial u}\frac{\partial x^i(0)}{\partial v}\right]\iint_G du\,dv + O(h)\iint_G du\,dv.$$

إن العامل الوارد في المعكوفين هو الشعاع لمكرر (51.6) المنشأ على الشعاعين $\frac{\partial x(0)}{\partial u}$ ، $\frac{\partial x(0)}{\partial v}$ ؛ نرمز له بـ x^{ij} . نضع:

$$\sigma = \iint_G du\,dv;$$

بما ان كلاً من الاحداثيتين u, v لا تتغير في الساحة G اكثر من القيمة h فإن هذه الكمية تمثل لا متناهي في الصفر من الرتبة الثانية (أو

اكثر) بالنسبة لـ h.

تأخذ المساواة (11) الآن الشكل:

$$\Delta\xi^l = \left(\Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i}\right)\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3), \quad (13)$$

حيث تؤخذ قيم التوابع Γ ومشتقاته في النقطة A. إذا اجرينا تبديلا بين الدليلين i و j في الطرف الثاني وضربنا في -1، فإن ضد تناظر الموتر x^{ij} يجعل الطرف الثاني لا يتغير. بتشكيل نصف مجموع المساواة (13) والمساواة الناتجة عنها إثر التحويل المشار اليه، نجد:

$$\Delta\xi^l = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^l_{pi}\right)\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3),$$

أو:

$$\Delta\xi^l = \frac{1}{2} R^l_{ij,k}\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3). \quad (14)$$

وهكذا فإن دوران الشعاع ξ يعبر عنه، بتقدير متناهيات في الصفر من الرتبة الثالثة، الدستور (14) حيث يقوم الانحناء $R^l_{ij,k}$ بالدور الرئيسي.

6. 45 . موتر الانحناء في فضاء ريماني. نلاحظ في فضاء ريماني حيث تكون المعاملات Γ^h_{ij} معرفة بالدستور 6 .23(5):

$$\Gamma^h_{ij} = g^{hs}\Gamma_{ij,s} = \frac{1}{2} g^{hs}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s}\right) g^{hs}$$

وهي بصفة خاصة متناظرة بالنسبة للدليلين i, j، ان موتر الانحناء

$$R^l_{ij,k} = \frac{\partial\Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ki}\Gamma^l_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^l_{pi}$$

يبرز خاصيات اضافية للتناظر.

نعتبر الموتر المتغاير اربع مرات:

$$R_{ij,kl} = R^s_{ij,k}g_{sl} = \left(\frac{\partial\Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial\Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^s_{jp} - \Gamma^p_{jk}\Gamma^s_{ip}\right) g_{sl}.$$

نشير، من اجل سطح بعده n في الفضاء الاقليدي ذي البعد n+1، ان مركبات الموتر $R_{ij,kl}$، اصغريات لمصفوفة الشكل التربيعي الثاني ((8)28.5). نؤكد في الحالة العامة ان الموتر $R_{ij,kl}$، موتر من نمط ريكسي (81.6). بالفعل فإن الموتر $R^s_{ij,s}$، مثل $R_{ij,kl}$، ضد تناظري بالنسبة للدليلين i و j. نضيف اننا نستطيع اجراء تبديل في الدليلين i, j وفي الدليلين k و l:

لدينا : $R_{ij,\,kl} = R_{kl,\,ij}$.

$$\left(\frac{\partial \Gamma^s_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^p_{ki}\Gamma^s_{pj}\right) g_{sl} = \frac{\partial}{\partial x^j}(\Gamma^s_{ki} g_{sl}) - \Gamma^s_{ki}\frac{\partial g_{sl}}{\partial x^j} +$$
$$+ \Gamma^p_{ki}\Gamma_{pj,\,l} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) - \Gamma^s_{ki}(\Gamma_{lj,\,s} + \Gamma_{sj,\,l}) +$$
$$+ \Gamma^s_{ki}\Gamma_{sj,\,l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l}\right) - \Gamma^s_{ki}\Gamma_{lj,\,s}.$$

من تناوب العبارة المحصل عليها بالنسبة لِـ i و j نحصل على:

$$(1)\quad R_{ij,\,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}\right) +$$
$$+ g_{sp}(\Gamma^s_{ki}\Gamma^p_{lj} - \Gamma^s_{kj}\Gamma^p_{li}).$$

من الواضح أن هذه العبارة تقبل تبديل الثنائيتين i, j و k, l وهذا بفضل تناظر الموتر g_{sp} والترابط الريماني Γ^l_{ik} .

لنثبت في الاخير متطابقة ريكسي، لدينا:

$$R^s_{ij,\,k} + R^s_{jk,\,i} + R^s_{ki,\,j} =$$
$$= \frac{\partial \Gamma^s_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^s_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma^s_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^s_{ji}}{\partial x^k} +$$
$$+ \Gamma^p_{ki}\Gamma^s_{pj} - \Gamma^p_{kj}\Gamma^s_{pi} + \Gamma^p_{ij}\Gamma^s_{pk} - \Gamma^p_{ik}\Gamma^s_{pj} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^s_{pi} - \Gamma^p_{ji}\Gamma^s_{jk} = 0$$

وذلك حسب تناظر الرموز Γ^k_{ij} بالنسبة للدليلين السفليين. ندخل على هذه المتطابقة الموتر g_{sl} فنصل الى متطابقة ريكسي من اجل الموتر $R_{ij,\,kl}$.

55.6 . انحناء وزاوية دوران شعاع مسحوب على طول محيط مغلق.

يمكن تحديد الدستور 25.6 (14) في حالة فضاء ريماني.

أ . يمكن ان نعرف في فضاء ريماني مساحة اجزاء السطوح الثنائية البعد المعطاة، مثلا ، بالمعادلات:

$$x^i = x^i(u, v),$$
$$(u, v) \in \Omega \subset R_2,$$

وذلك بإستخدام الدستور 13.6 (1):

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv, \qquad (1)$$

حيث

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

إذا انتقلنا من الاحداثيات u, v الى الاحداثيات الجديدة $\tilde{u}, \tilde{v}$، فإن عنصر المساحة يأخذ الشكل (راجع 16.3 ـ ج):

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sqrt{EG - F^2} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| d\tilde{u}\, d\tilde{v}. \qquad (2)$$

إذا اخترت الاحداثيات الجديدة بحيث يكون:

$$\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})} \right| = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \quad \text{ou} \quad \left| \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} \right| = \sqrt{EG - F^2}, \qquad (3)$$

فإننا نحصل ضمن الاحداثيات $\tilde{u}, \tilde{v}$، على:

$$dS = d\tilde{u}\, d\tilde{v}. \qquad (4)$$

حتى يكون الشرط (3) محققا ، نضع $\tilde{u} = \varphi(u, v), \tilde{v} = v$ وحينئذ :

$$\frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

ومن ثم يتبين انه يكفي اختيار التابع φ على الشكل:

$$\varphi(u, v) = \int \sqrt{EG - F^2}\, du.$$

سوف نعتبر الدستور 35.6 (14) في جملة الاحداثيات $\tilde{u}, \tilde{v}$، بالذات (وسنرمز لها من جديد بـ u, v). يمثل σ ضمن هذه الاحداثيات المساحة الريمانية للساحة المحاطة بالمحيط L . لدينا ضمن نفس الاحداثيات $EG - F^2 = 1$ بحيث يصبح الشعاع المكرر $x^{ij}(A) = x^{ij}$ المنشأ على الشعاعين $\frac{\partial x(A)}{\partial u}$ و $\frac{\partial \varrho}{(V)\, x \varrho}$ الواردين في 35.6 (14) شعاعا مكررا واحدياً.

ب. ثم، انطلاقا من تقدير تزايد الاحداثيات الذي انجزناه في 35.6 ،

نستطيع الانتقال الى حساب زاوية دوران شعاع نسحبه على طول محيط مغلق L

نختار على المستوى Π المعين بالشعاعين $\frac{\partial x}{\partial u}$ و $\frac{\partial x}{\partial v}$ (أي على مستوى الشعاع المكرر x^{ij}) الاتجاه الموجب لتغير الزوايا الاتجاه الذي يذهب من منحى تزايد الوسيط u نحو منحى تزايد الوسيط v ، نثبّت على هذا المستوى شعاعا واحديا ξ والشعاع η المستنتج من ξ بدوران قيمته $90°$ في الاتجاه الموجب.

بعد القيام بانسحاب للشعاع ξ على طول المحيط فإننا نصل الى شعاع نرمز له بِـ $\xi + \Delta\xi$ نفكك الشعاع $\Delta\xi$ الى مجموع ثلاث مركبات على الشكل:

$$\Delta\xi = \Delta_1 \cdot \xi + \Delta_2 \cdot \eta + \Delta_3 \cdot \zeta$$

حيث تمثل $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ اعداداً حقيقية، مع العلم ان الشعاع ζ عمودي على المستوى Π . يعطي عندئذ الدستور 35.6(14) العلاقة:

$$\Delta_1 = (\xi, \Delta\xi) = (\xi, \Delta_1 \cdot \xi) = g_{lp}\xi^p \Delta\xi^l = \frac{1}{2} g_{lp}\xi^p (R^l_{ij,\,k}\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3)) =$$
$$= \frac{1}{2} \xi^p R_{ij,\,kp}\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3) = O(h^3),$$

لأن الحد الاول منعدم بسبب ضد تناظر الموتر $R_{ij,\,kp}$ بالنسبة للدليلين k و p.

نرمز بِـ φ للزاوية المحسوبة من الشعاع ξ الى الشعاع $\xi + \Delta_1\xi + \Delta_2\eta$ (أي الى مسقط الشعاع $\xi + \Delta\xi$ على المستوى Π) في الاتجاه الموجب. لدينا (الرسم 5.6 ـ 1):

(5)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta_2}{1+\Delta_1} = \Delta_2 (1 + O(h^3)) =$$
$$= (\eta, \Delta_2\eta)(1 + O(h^3)) = (\eta, \Delta\xi)(1 + O(h^3)) =$$
$$= g_{lp}\eta^p \Delta\xi^l (1 + O(h^3)) = \frac{1}{2} g_{lp}\eta^p (R^l_{ij,\,k}\xi^k x^{ij}\sigma + O(h^3))(1 + O(h^3)) =$$
$$= \frac{1}{2}\xi^k \eta^p R_{ij,\,kp} x^{ij}\sigma + O(h^3).$$

يعين الشعاع المكرر $\xi^h\eta^p - \xi^p\eta^h$ نفس المستوى Π والمساحة المساوية لـ1 (لأن ξ و η متعامدان ومتجانسان)، إذن فهو يطابق الشعاع المكرر x^{ij} . للإنتقال الى هذا الاخير نبدل في (5) الدليلين k و p فيما بينهما ونشكل نصف مجموع متساويتين؛ بالنظر الى ضد تناظر الموتر $R_{ij,\,kp}$ بالنسبة للدليلين k و p، نجد:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{4} x^{ij} x^{kp} R_{ij,\,kp} \sigma + O(h^3).$$

نحصل فيما يخص الزاوية $\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi) = \operatorname{tg}\varphi + O(\operatorname{tg}^3\varphi)$ على عبارة مماثلة:

$$\varphi = \frac{1}{4} x^{ij} x^{kp} R_{ij,\,kp} \sigma + O(h^3). \qquad (6)$$

ج. إذا قسمنا المساواة الاخيرة على σ (بإفتراض ان σ لا متناهي في الصغر من الرتبة الثانية بالضبط بالنسبة لـ h) وانتقلنا الى النهاية بجعل المحيط L يتقلص نحو النقطة A فإننا نجد:

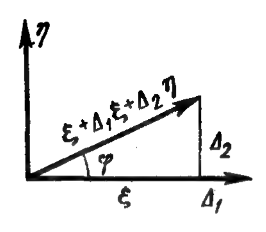
$$\lim_{L\to A} \frac{\varphi}{\sigma} = \frac{1}{4} x^{ij} x^{kp} R_{ij,\,kp}. \qquad (7)$$

تسمى الكمية السلمية المحصل عليها بهذه الطريقة إنحناء الفضاء الريماني M_n عند النقطة A في المنحى الثنائي البعد المعين بالشعاع المكرر الواحدي x^{ij} ؛ نرمز له بـK.

د. اخيراً يمكننا اختيار كشعاع مكرر واحدي x^{ij} اي شعاع مكرر x^{ij} ، في نفس المستوى Π ، بعد قسمته على مساحته. نجد باعتبار أي شعاع مكرر x^{ij} :

$$K = \frac{R_{ij,\,kp} x^{ij} x^{kp}}{G_{ij,\,kp} x^{ij} x^{kp}} \qquad (8)$$

حيث $G_{ij,\,kp} = g_{ik}g_{jp} - g_{jk}g_{ip}$ هو الموتر المشتق المتري (71.6 - ب) عند النقطة A.



الرسم 5.6 ـ 1

65.6 . العلاقة بين الانحناء في منحى ثنائي البعد وانحناءات السطوح الثنائية البعد الموافقة له.

نحسب استناداً الى الدستور 55.6(8) انحناء الفضاء الريماني في المنحى الثنائي البعد المعين بالسطح الثنائي البعد المعرف بِ

$$P_{12} = \{x \in M_n: \quad x^1 = u, \ x^2 = v, \ x^3 = \ldots = x^n = 0\}.$$

يكون الشعاع المكرر x^{ij} معيناً بأصفريات المصفوفة:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \end{Vmatrix}$$

ولا تكون مركباته غير منعدمة الا من اجل $i = 1$ ، $j = 2$ حيث $x^{12} = 1$ و $i = 2$ ، $j = 1$ حيث $x^{21} = -1$. إذن فإن الانحناء K ياخذ الشكل:

$$K = \frac{R_{12,\,12} + R_{21,\,21} - R_{12,\,21} - R_{21,\,12}}{G_{12,\,12} + G_{21,\,21} - G_{12,\,21} - G_{21,\,12}}.$$

لكن الموترين R و G ضد تناظريين بالنسبة لثنائية الدليلين الاولين وثنائية الدليلين الثانيين، وهما لا يتغيران عند تبديل الثنائيتين فيما بينهما؛ لدينا إذن

$$K = \frac{R_{12,\,12}}{G_{12,\,12}}. \qquad (1)$$

بصفة خاصة، إذا كانت المنوعة الريمانية M_n ثنائية البعد $n = 2$ فإن الدستور السابق يعطي عبارة لإنحناء غوس للمنوعة M_2 (53.6 ـ د).

يمكن بسهولة تصور ذلك تصورا هندسيا: يتبين من الدستور 55.6(8)، في المنوعة M_2، ان الكمية K نهاية لنسبة زاوية دوران شعاع مسحوب على طول محيط مغلق مقسومة على المساحة المحدودة بهذا المحيط، تطابق هذه النهاية انحناء غوس للسطح M_2 (36.5).

اما في الحالة العامة ($n > 2$) فإن إنحناء غوس للسطح P_{12} لا يوافق الدستور (1). يرجع ذلك الى كون إنسحاب شعاع على طول محيط L له على المنوعة M_n معنى آخر يخالف معناه على السطح P_{12} المعتبر كمنوعة ثنائية البعد: في الحالة الاولى يكون الانسحاب معينا بقيم كل Γ_{ij}^k وهذا يؤدي الى كوْن الشعاع المنسحب يخرج من المستوى الماس للسطح P_{12}؛ اما في الحالة الثانية فإن الانسحاب يُعين فقط بقيم Γ_{ij}^k الموافقة لِـ $i, j, k = 1, 2$ ويبقى الشعاع المنسحب في المستوى الماس للسطح P_{12}. مثلا، إذا كانت المنوعة M_n هي الفضاء الاقليدي R_n وكان السطح P_{12} يمثل جزءاً من سطح كرة ثنائية البعد في R_n فإننا نجد انفسنا بالضبط في الوضع المشار اليه آنفا: الانسحاب على طول كل محيط مغلق في الفضاء الاقليدي، وبصفة خاصة كل محيط على سطح كرة، يجعل الشعاع يعود الى موقعه الابتدائي في حين ان الانسحاب على طول محيط مغلق على سطح كرة بوصفه سطحا ريمانيا لا يقوم عموما بذلك (26.5 ـ ص).

لنبرهن على نفس القضية برهانا تحليلياً. استناداً الى 45.6(1) فإن البسط في السدتور (1) من اجل الانحناء K لمنوعة M_n في المنحى الثنائي البعد P_{12} يساوي

$$(2)\quad R_{12,12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}\right) + g_{sp}\left(\Gamma_{11}^s \Gamma_{22}^p - \Gamma_{12}^s \Gamma_{21}^p\right),$$

مع الجمع على كل s و p من 1 الى n. الّا اننا نلاحظ في العبارة:

$$(3)\quad \tilde{K} = \frac{\tilde{R}_{12,12}}{\tilde{G}_{12,12}}, \quad \tilde{G}_{12,12} = G_{12,12},$$

من اجل إنحناء غوس $\bar{K}$ للسطح P_{12} ، ان البسط $\bar{R}_{12,12}$ يساوي:

$$(4) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^1 \partial x^2}\right) + $$
$$+ g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{11}\Gamma^\beta_{22} - \Gamma^\alpha_{12}\Gamma^\beta_{21}),$$

مع الجمع على القيمتين 1 و2 للدليلين α و β.

يمكن طرح السؤال التالي: هل يوجد في منوعة M_n ، من اجل كل شعاع مكرر $x^{ij}(A)$ ، سطح ثنائي البعد P بحيث يكون مستوية الماس عند النقطة A معيناً بالشعاع المكرر $x^{ij}(A)$ ويكون إنحناء غوس مساويا لانحناء المنوعة M_n في المنحى الثنائي البعد الموافق. لذلك؟ (وهكذا يمكن في المثال السابق من اجل السطح الاقليدي R_n ، اختيار ذلك السطح مطابقا للمستوى المعين بالشعاع المكرر $x^{ij}(A)$). سنرد على هذا السؤال بالايجاب.

نفرض في نقطة معطاة A ان الشرط $\Gamma^k_{ij}(A) = 0\ (i, j, k = 1,..,n)$ محقق. من البديهي إذن ان العلاقات (1) - (3) تعطي، بفضل (4)، اي ان $\bar{K} = K$ إنحناء المنوعة M_n في المنحى الثنائي البعد x^1, x^2 يطابق انحناء غوس للسطح P_{12} . لدينا اكثر من ذلك، حيث يمكننا الاشارة هنا، من اجل كل شعاع مكرر x^{ij} ، الى سطح ثنائي البعد P يحقق الشرط المطلوب. نضع قصد الاختصار $x^i(A) = 0\ (i = 1,..,n)$ ونجري، من اجل شعاع مكرر معطى $x^{ij}(A)$ تحويلا خطياً للاحداثيات $x^i = a^i_{i'}x^{i'}$ يحول مستوى الشعاع المكرر $x^{ij}(A)$ الى مستوى الاحداثيات، $x^{1'}, x^{2'}$ بما ان الكميات Γ^k_{ij} تتحول بواسطة تحويل خطي للإحداثيات، وفق قانون موتري (33.6) فإن لدينا $\Gamma^{k'}_{i'j'}(A) = 0$ ضمن جملة الاحداثيات $\{x^{i'}\}$. يتبين مما اثبتناه ان السطح ذي الاحداثيات ، $x^{1'}, x^{2'}$ له انحناء يساوي انحناء المنوعة M_n في المنحى الثنائي البعد المعين بالشعاع المكرر x^{ij} .

يبقى ان نبين بانه إذا كانت العلاقات $\Gamma^k_{ij}(A) = 0$ غير محققة في جملة الاحداثيات المعطاة $x^1, \ldots, x^n$، يمكننا دوماً ايجاد جملة اخرى

$x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ تقوم فيها تلك العلاقات. بافتراض، كما ورد اعلاه، ان $x^1(A)=\ldots x^n(A)=0$ يمكن ان نضع مثلا:

$$x^h = a^h_{k'} x^{k'} + \frac{1}{2} b^h_{i'j'} x^{i'j'},$$

حيث $a^h_{k'}$ et $b^h_{i'j'}$ معاملات غير معينة الآن. عندئذ:

$$p^h_{k'} = \frac{\partial x^h(A)}{\partial x^{h'}} = a^h_{k'},\ p^h_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^h(A)}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} = b^h_{i'j'},$$

وبوضع

$$\Gamma^{h'}_{i'j'}(A) = p^i_{i'} p^j_{j'} p^{k'}_{h} \Gamma^h_{ij}(A) - p^{k'}_{h} p^h_{i'j'} = 0,$$

نحصل، عند اختصار $p^h_{k'}$ ، على المعادلة:

$$p^h_{i'j'} = p^h_{i'j'} = a^i_{i'} a^j_{j'} \Gamma^h_{ij}(A). \qquad (5)$$

نختار بشكل كيفي مصفوفة غير منحلة $a^h_{k'}$ (مثلا $a^h_{k'} = \delta^h_{k'}$) تعين المعاملات $b^h_{i'j'}$ حسب الدساتير (5) فنصل الى جملة الاحداثيات المطلوبة التي يكون فيها $\Gamma^{h'}_{i'j'}(A) = 0$.

§ 6. 6 . الفضاءات الريمانية ذات الانحناء الثابت

16. 6 . ليكن L سطحا بعده n في الفضاء الاقليدي R_{n+1} ذي البعد (n+1)، معطى بالمعادلات

$$x^i = x^i(u_1, \ldots, u_n), \quad u = (u_1, \ldots, u_n) \in G \subset R_n.$$

باعتبار السطح L كمنوعة ريمانية بالمسافة المأخوذة عن الفضاء R_{n+1} نبحث عن انحنائه في المنحى الثنائي البعد المعين بشعاع مكرر x^{ij} ، لدينا من الدستور 55. 6 (8):

$$K = \frac{R_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}{G_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}. \qquad (1)$$

في الحالة الراهنة، كما سبق ان قلنا، فإن مركبات موتر الانحناء $R_{ij,kl}$ تطابق الاصغريات $B_{ij,kl}$ للشكل التربيعي الثاني للسطح L، إذن:

$$K = \frac{B_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}{G_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}. \qquad (2)$$

26. 6 . نحسب الانحناء K في الحالة التي يكون فيها L سطح كرة نصف

قطره r متمركزة في مصدر الاحداثيات:

$$L = \{x \in R_{n+1} : |x| = r\}.$$

يكون عندئذ نصف القطر الشعاع متناسبا مع الناظم:

$$x = rm.$$

ويتبين من دستور فينغارتن 13.5(2) ان:

$$\frac{\partial m}{\partial u_\alpha} = b_\alpha^\sigma \frac{\partial x}{\partial u_\sigma} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

ثم بتعويض x بقيمته الواردة في (1) نجد:

$$m_\alpha = b_\alpha^\sigma r m_\sigma \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

ومنه $b_\alpha^\sigma r = \delta_\alpha^\sigma$. ينتج عن ذلك ان المعاملات b_{ij} الواردة في الشكل التربيعي الثاني المرتبطة بـ b_α^σ بواسطة العلاقة 13.5(3)

$$b_{ij} = -b_i^\sigma g_{\sigma j}$$

تكتب على الشكل

$$b_{ij} = -\frac{1}{r} g_{ij},$$

اي انها متناسبة مع معاملات الشكل التربيعي الاولى. إذن:

$$B_{ij,kl} = \frac{1}{r^2} G_{ij,kl},$$

ويعطي الدستور 16.6(2):

$$K = \frac{1}{r^2}.$$

وهكذا فإن سطح الكرة ذات نصف القطر r في الفضاء ذي البعد (n+1) له نفس الانحناء $K = 1/r^2$ عند كل نقطة منه وفي كل منحى ثنائي البعد.

36.6 . نقول عن فضاء ريماني M_n إنه فضاء ذو انحناء ثابت إذا كان انحناؤه عند كل نقطة وفي كل منحى ثنائي البعد x^{ij},

$$K = \frac{R_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}{G_{ij,kl} x^{ij} x^{kl}}, \tag{1}$$

له نفس القيمة. نؤكد في البداية ان العلاقة التالية محققة في هذه الحالة:

$$R_{ij,kl} = K G_{ij,kl}. \tag{2}$$

بالفعل، نضع $T_{ij,\,kl} = R_{ij,\,kl} - KG_{ij,\,kl}$ إذا كـان $R_{ij,\,kl}$ و $G_{ij,\,kl}$ موترين لريكس فإن $T_{ij,\,kl}$ كذلك. لدينا إستنادا الى (1)، من اجل كل شعاع مكرر x^{ij} :

$$T_{ij,\,kl}x^{ij}x^{kl} = 0.$$

بتطبيق النظرة 81.6 ـ ب نرى ان من اجل كل $x \in M_n$ فإن مركبات الموتر $T_{ij,\,kl}(x)$ منعدمة كلها، ومنه يأتي (2).

46.6 . نفرض بعد ذلك ان الفضاء M_n له انحناء ثابت موجب $K = 1/r^2$ $r > 0$ نؤكد عندئذ على أن الفضاء M_n ايزومتري محليا مع سطح كرة نصف قطرهلا r في الفضاء الاقليدي R_{n+1}. ذي البعد (n+1). للبرهان على ذلك، نعرف موترا $b_{ij}(x)$ بالدساتير:

$$b_{ij}(x) = \frac{1}{r}\, g_{ij}(x). \qquad (1)$$

لنثبت، من اجل المصفوفتين $\| g_{ij}(x) \|$ و $\| b_{ij}(x) \|$ ان معادلة غوس 23.5 (8) ومعادلة بيترسون كودازى 23.5 (6) محققتان أي أن فرض بوني 43.5 متوفر. بالفعل فإن الاصغريات $B_{ij,\,kl}$ للمصفوفة $\| b_{ij} \|$ تحقق بفضل تعريف b_{ij} (1) والمساواة 36.6 (2) العلاقة:

$$B_{ij,\,kl} = \frac{1}{r^2}\, G_{ij,\,kl} = R_{ij,\,kl};$$

يعني ذلك ان علاقة غوس محقق. يأخذ دستور بيترسون 23.5 (6) الذي ينبغي اثباته الشكل:

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma^s_{ik} b_{sj} - \Gamma^s_{ij} b_{sk}.$$

عندما ننقل الى هذا الدستور قيم b_{ij} الواردة في (1) فإننا نصل الى المساواة:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{ik,\,j} - \Gamma_{ij,\,k}. \qquad (2)$$

لكن

$$\Gamma_{ik,\,j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right),$$

$$\Gamma_{ij,\,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

وبذلك يتم البرهان على (2) بطرح احدى العلاقتين السابقتين من الاخرى.

استنادا الى نظرية بوني 43.5 فإنه يوجد في الفضاء R_{n+1} سطح $L = \{x \in R_{n+1}:\ x = x(u_1, .., u_n)\}$ تمثل من اجله العبارة $\sum_{i,j} g_{ij}\, du_i du_j$ الشكل التربيعي الاول وتمثل العبارة $\sum_{i,j} b_{ij}\, du_i\, du_j$ الشكل التربيعي الثاني. من اجل السطح L، لدينا $b_j^k = -g^{ik} b_{ij} = -g^{ik} \frac{1}{r} g_{ij} = -\frac{1}{r}\delta_j^k$ ومنه يأتي: $\frac{\partial m}{\partial u_j} = b_j^k \frac{\partial x}{\partial u_k} = -\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial u_j}$؛ ثم إن $\frac{\partial}{\partial u_j}\left(m + \frac{1}{r}x\right) = 0$ يستلزم $m = -\frac{1}{r}(x - x_0)$ ومنه يأتي $|x - x_0| = r$ اخيرا فإن السطح L الايزومتري مع المنوعة M_n يمثل سطح كرة نصف قطرها r.

56.6 . ننتقل الى انشاء فضاء ريماني M_n انحناؤه ثابت وسالب $K = -q^2$ حيث $q > 0$. نعمم الى حالة البعد (n+1) الانشاء المقدم في 45.5 حيث حققنا إنحناء ثابتا وسالبا على مجسم زائدي في الفضاء الثلاثي البعد المزود بالمسافة المستنتجة من الشكل $\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

نرمز بـH للمجسم الزائدي $(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = -\rho^2$ في الفضاء الاقليدي R_{n+1} ذي البعد (n+1). نزوده بالمسافة المستنتجة من الجداء شبه السلمي $\langle x, y\rangle = x^1y^1 + \ldots + x^ny^n - x^{n+1}y^{n+1}$. نؤكد على ان هذه المسافة معرفة موجبة على H، أي ان الشكل:

$$dx^1\, dx^1 + \ldots + dx^n\, dx^n - dx^{n+1}\, dx^{n+1}$$

لا تأخذ سوى القيم الموجبة على الاشعة الماسة للسطح H. بالفعل فإن لدينا على H:

$$x^1\, dx^1 + \ldots + x^n\, dx^n - x^{n+1}\, dx^{n+1} = 0.$$

ينتج من متراجحة كوشي - بونياكوفسكي ان:

$$\begin{aligned}(x^{n+1})^2\,(dx^{n+1})^2 &= (x^1\, dx^1 + \ldots + x^n\, dx^n)^2 \leqslant\\ &\leqslant [(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2]\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] =\\ &= [(x^{n+1})^2 - \rho^2]\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2] \leqslant\\ &\leqslant (x^{n+1})^2\,[(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2],\end{aligned}$$

إذن

$$(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2 - (dx^{n+1})^2 \geqslant 0 \tag{1}$$

وهو ما ذهبنا اليه.

66. 6 . ليكن L سطحا بعده n في المخروط $\langle x, x\rangle < 0$ تتحقق من اجله المتراجحة، 6 .56 (1) ويعطى الشكل $\langle x, y\rangle$ مسافة معرفة موجبة. نلاحظ من اجل هذه السطوح ان شعاع شبه الناظم m يحقق المتراجحة $\langle m, m\rangle < 0$، ولولاه لكان الشكل $\langle x, x\rangle$ الموجب في المستوى ذي البعد n الماس وغير سالب على الشعاع m شبه العمودي على هذا المستوي، غير سالب على R_{n+1} بأكمله، وهذا غير صحيح.

نبحث عن إنحناك السطح L بوصفه فضاء ريمانيا في المناحي الثنائية البعد $[dx, dy]^{ij}$. لهذا الغرض نكتب في البداية دستوريْ غوس وفينغارتن من اجل نصف القطر الشعاع للسطح $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ (الموسط بطريقة كيفية):

$$x_{ij} \equiv \frac{\partial^2 x}{\partial u_i\, \partial u_j} = \Gamma^k_{ij} x_k + \beta_{ij} m,$$

$$m_j \equiv \frac{\partial m}{\partial u_j} = b^k_j x_h.$$

نرمز بـ $\langle x_{ij}, m\rangle = b_{ij}$. لدينا، كما هو الحال من اجل سطح في الفضاء الاقليدي: $\langle m, x_i\rangle = 0,\ \langle m_j, x_k\rangle + \langle m, x_{jk}\rangle = 0$، ومنه يأتي

$$b_{jk} = -\langle m_j, x_k\rangle = -\langle b^s_j x_s, x_k\rangle = -b^s_j g_{sk}. \tag{1}$$

ثم، كما هو الحال في 23.5 :

$$\beta_{ik} b_{jl} - \beta_{jk} b_{il} = \sum_{p=1}^{n-1} \left[\frac{\partial \Gamma^p_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma^p_{jk}}{\partial u_i} + \sum_{s=1}^{n-1} (\Gamma^s_{ik}\Gamma^p_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^p_{is}) \right] g_{pl}. \tag{2}$$

يمثل الطرف الثاني في (2) موتر الانحناء $R_{ij,kl}$. اما المعاملات β_{ij} في الطرف الاول، خلافا للحالة الاقليدية حيث $\beta_{ij} = (x_{ij}, m) = b_{ij}$، فهي تعيّن إنطلاقا من العلاقة:

$$b_{ij} = \langle x_{ij}, m \rangle = \beta_{ij} \langle m, m \rangle = -\beta_{ij}.$$

لدينا هنا مكان أصغري للشكل التربيعي الثاني يشغل السطرين i, k والعمودين $j, l,$ ؛ وهو ما كان لدينا في الحالة الاقليدية، نفس الاصغري لكنه مسبوق باشارة ناقص اي

$$R_{ij,\,kl} = -B_{ij,\,kl}.$$

إن الكمية المطلوبة أي انحناء الفضاء الريماني L في المنحى الثنائي البعد x^{ij} ، تبدو مساوية لـ:

$$K = -\frac{B_{ij,\,kl}\,[dx, dy]^{ij}\,[dx, dy]^{kl}}{G_{ij,\,kl}\,[dx, dy]^{ij}\,[dx, dy]^{kl}}. \qquad (3)$$

76. 6 . لدينا في حالة شبه سطح كرة:

$$L = \{x \in R_{n+1}\colon \langle x, x \rangle = -\rho^2\},$$

$x = \rho m$ ، وبالتالي

$$x_j = \rho m_j = \rho b_j^k x_k,$$

بحيث ان $b\frac{k}{j} = \frac{1}{\rho}\delta_j^k$ ينتج عن ذلك $= -b_i^k g_{jk} = -\frac{1}{\rho} g_{ij},$ $b_{ij} = \langle x_{ij}, m \rangle$ وبالتالي:

$$B_{ij,\,kl} = \frac{1}{\rho^2} G_{ij,\,kl}.$$

بعد ذلك تصبح (3):

$$K = -\frac{1}{\rho^2}.$$

وهكذا تعطينا شبه الكرة L مثالا لمنوعة ريمانية بعدها n وانحناؤها سالب يساوي القيمة الثابتة $-1/\rho^2$ في جميع المناحي الثنائية البعد.

86. 6 . أ . بخصوص القضية العكسية نعتبر فضاء ريمانيا M_n له عند كل نقطة وفي كل منحى ثنائي البعد نفس القيمة السالبة $K = -q^2,\ q > 0.$. لنثبت ان مثل هذا الفضاء M_n ايزومتري مع جزء من شبه الكرة $L \subset R_{n+1}$.

ب . سنحتاج الى نظرية بوني المتعلقة بسطح في الفضاء R_{n+1} مسافته الريمانية مستنتجة من الشكل $\langle x, x \rangle$

ها هو نص هذه النظرية:

نظرية. نفرض ان هناك مصفوفتين $(n \times n)$ $G = \| g_{ij}(u) \|$ و $B = \| b_{ij}(u) \|$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in G \subset R_n$ تحققان الشرط:

$$b_{jk}b_{il} - b_{ik}b_{jl} = \sum_{p=1}^{n-1} \left[\frac{\partial \Gamma^p_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma^p_{jk}}{\partial u_i} + \sum_{s=1}^{n-1} (\Gamma^s_{ik}\Gamma^p_{js} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^p_{is}) \right] g_{pl}, \quad (1)$$

حيث

$$\Gamma^p_{ij} g_{pk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} \right),$$

وكذلك الشرط

$$\sum_p \Gamma^p_{ij} b_{pk} + \frac{\partial b_{ij}}{\partial u_k} = \sum_p \Gamma^p_{ik} b_{pj} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_j}. \quad (2)$$

عندئذ يوجد في الفضاء R_{n+1} سطح L بعده n مزود بالمسافة (المعرفة موجبة) المستنتجة من الجداء شبهة السلمي $\langle x, y \rangle$ والتي تكون من اجلها المصفوفة G هي مصفوفة الشكل التربيعي الاول، والمصفوفة B هي مصفوفة الشكل التربيع الثاني.

يتبع البرهان على هذه النظرية نفس الطريق المستبع في الفضاء القليدي (43.5). نكتب جملة المعادلات:

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \Gamma^k_{ij} x_k - b_{ij} m,$$
$$\frac{\partial m}{\partial u_j} = b^k_j x_k$$

حيث $b^k_j g_{kp} = -b_{jp}$، اما $x_i(u)$ و $m(u)$ فتمثل التوابع الشعاعية المجهولة.

نلاحظ ان شروط تلاؤم هذه الجملة تطابق (1) و(2) يوجد إذن حل $x_i(u), m(u)$ ، وهو وحيد إذا كانت لدينا الشروط الابتدائية $x_i(u_0)$ و $m(u_0)$ المحققة للعلاقات:

$$\langle x_i(u_0), x_j(u_0) \rangle = g_{ij}(u_0), \quad m(u_0) = (0, \ldots, 0, 1).$$

نعين بعد ذلك التابع $x(u)$ انطلاقا من الشروط:

$$\frac{\partial x(u)}{\partial u_i} = x_i(u), \quad x(0) = 0.$$

إنه السطح المطلوب ذلك ما نثبته باتباع نفس الاستدلال الوارد في 43.5 .

ج . ننتقل الى البرهان على القضية أ نلاحظ في الفضاء M_n ذي الانحناء الثابت في كل المناحي الثنائية البعد

$$K = \frac{R_{ij,\,kl}x^{ij}x^{kl}}{G_{ij,\,kl}x^{ij}x^{kl}} = -q^2,\ q>0,$$

ان لدينا طبقا لـ36.6 :

$$R_{ij,\,kl} = -q^2 G_{ij,\,kl}.$$

نضع $b_{ij} = -qg_{ij}$ ونثبت، من اجل الاشكال b_{ij} و g_{ij} ، ان فرض نظرية بوني في الفضاء شبه الاقليدي (ب) متوفر .بالفعل، لدينا انشاء :

$$b_{ij}b_{kl} - b_{ik}b_{jk} = q^2\,(g_{ij}g_{kl} - g_{ik}b_{jl}) = q^2 G_{ij,\,kl} = -R_{ij,\,kl},$$

ومنه يأتي الشرط (1) .

نتأكد من الشرط (2) كما هو الحال في 46.6 .

يتبين من توفر فرض نظرية بوني انه يوجد سطح $L \subset R_{n+1}$ مسافته مستنتجة من الشكل $\langle x, x\rangle$ وتمثل من اجلها $\| g_{ij} \|$ مصفوفة الشكل التربيع الاول وتمثل $\| b_{ij} \|$ مصفوفة الشكل التربيعي الثاني. لدينا من اجل هذا السطح L :

$$b_j^k g_{kp} = -b_{jp} = qg_{jp},\ \text{d'où}\ b_j^k = q\delta_j^k$$ ؛ وبالتالي :

$$m_j = b_j^k x_k = qx_j, \qquad (m - qx)_j = 0,$$

إذن :

$$m = q\,(x - x_0).$$

ينتج عن ذلك أن

$$\langle x - x_0,\, x - x_0\rangle = \left\langle \frac{m}{q},\, \frac{m}{q}\right\rangle = -\frac{1}{q^2},$$

بحيث ان السطح L يقع على شبه سطح الكرة $\langle x, x\rangle = -1/q^2$ المسحوب مقدار شعاع x_0 .

وهكـذا يمثـل المجسم الزائـدي $\langle x, x\rangle = -1/q^2$ المزود بـالمسـافـة المستنتجة من الشكل $\langle x, x\rangle$ نموذجا قانونيا للفضاء الريماني ذي الانحناء الثابت والسالب $-q^2$.

تمارين

1 . أثبت ان سطحي كرتين S_1 و S_2 في R_3 مختلفين في نصف القطر ليسا إيزومتريين لكنهما متكافئان تآلفيا (اي ان معاملات الترابط الريماني تكتب، ضمن بعض جمل الاحداثيات على S_1 و S_2 ، بواسطة نفس التوابع الاحداثية).

2 . اثبت دستور الاشتاق التغايري لجداء موترين:

$$\nabla_q (T \cdot S) = \nabla_q T \cdot S + T \cdot \nabla_q S.$$

3 . اثبت دستور الاشتقاق التغايري لتقلص موثرات:

$$\nabla_q (T^i S_i) = \nabla_q T^i \cdot S_i + T^i \cdot \nabla_q S_i.$$

4 . نثبّت حقلين شعاعيين متعامدين في المستوى. تلاحظ في كل نقطة ان أي شعاعين من الحقلين يعينان اساساً محليا. نعرف انسحاب أي شعاع بالشرط القائل ان احداثياته المحلية ثابتة. اثبت ان الترابط الموافق لذلك له انحناء منعدم لكن التواءه غير منعدم عموما.

5 . نضع في ساحة G من المستوى $\Gamma^1_{11}(x) = f(x)$ ونفرض ان Γ^h_{ij} الاخرى منعدمة كلها. عرّف $f(x)$ بحيث إذا انسحب شعاع (بمفهوم الترابط Γ^h_{ij}) عدة مرات على طول محيط مغلق وصغير بشكل كيفي يحيط بنقطة معطاة $A \subset G$ فإن احداثيات هذا الشعاع تتزايد لانهائيا.

6 . عند نقطة معطاة A من فضاء M_n ذي ترابط تآلفي، نختار بشكل كيفي n شعاعا مستقلة خطيا $e_1, \ldots, e_n$. ليكن U جوارا للنقطة A يمكن ان نصل فيه كل نقطة Bمنه بالنقطة A بواسطة جيوديزية وحيدة $\gamma(A, B)$ تمر في U (التمـريـن 12 ، الفصـل 5). تُعيَّـن الجيـوديـزيـة

$\gamma(A, B)$ بشعاعها الماس عند النقطة A ، مثلا بالشعاع $\xi = \sum_{i+1}^{n} \xi^i e_i$.
نرمز بـ τ_B لقيمة الوسيط القانوني على $\gamma(A, B)$ عند النقطة B ، المعين بالمساواة $\xi = \frac{dx(A)}{d\tau}$. نختار الاحداثيات الجديدة للنقطة B الاعداد $x^{i'} = \tau_B \cdot \xi^i$. اثبت ان $\Gamma_{ij}^h(A) = 0$. ضمن هذه الاحداثيات.

نبذة تاريخية

إنطلقت الهندسة الريمانية إثر محاضرة ريمان الملقاة سنة 1854 والمنشورة سنة 1867 « Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grund liegen » جمع ريمان في هذه المحاضرة فكرة الفضاء ذي البعد n وفكرة غوس المتعلقة بايجاد مسافة على سطح بواسطة شكل تربيعي لتفاضليات الاحداثيات. وقد اقترح ريمان في نفس المحاضرة تعريفا للإنحناء كان كريتوفال (1869) قد طوره بعد ذلك في شكل تحليلي، إن التحليل الموتري الذي انشأه ريكس خلال السنوات 1880 (« طرق الحساب التفاضلي المطلق وتطبيقاتها » المؤلَف المشترك لريكسي وتلميذه لوفي - سيفيتا، 1901) هو احسن وسيلة لوضع الاسس التحليلية للهندسة الريمانية. وقد اشار ريكس ولوفي - سيفينا الى الاشكال القانونية للفضاءات الريمانية ذات الانحناء الثابت. لاحظ شور (Schur) سنة 1903 إنه إذا كان للإنحناء عند كل نقطة من فضاء ريماني M_n نفس القيمة من اجل كل المناحي الثنائية البعد فإن هذا الانحناء لا يتعلق ايضا بالنقطة. اتضح ان اللغة الموترية لائقة جداً في النظرية النسبية العامة لإينشتاين (1915) لكنه كان من اللازم الانتقال فيها من الشكل المتري المعرف موجب ds^2 الى شكل غير محدد (مع الاشارة ناقص امام احد المربعات في التمثيل القانوني). ادخل لوفي - سيفيتا وشوتن (Schouten) سنة 1917 في الهندسة الريمانية مفهوم الانسحاب، وهو ما سمح لهما بايجاد عبارة جديدة لموتر الانحناء. أما الفضاءات ذات الترابط التآلفي فقد ادخلها شوتن وهـ. ويل (Weyl) سنة 1918، وظهرت المنوعات التفاضلية لأول مرة عند ويتني (Whitney) سنة 1936.

الفصل 7

المفاضلة والمكاملة على المنوعات

يمثل التحليل الرياضي على المنوعات القابلة للمفاضلة في الوقت الراهن ميداناً واسعاً جدا من الرياضيات، فهو ميدان تتلاقى فيه افكار وطرق الفروع المختلفة للعلوم. نقتصر هنا على تناول واحد من الفصول المهمة للنظرية: إنه فصل تعميم العلاقة بين الاشتقاق والمكاملة المعطاة في R_3 بدستور ستوكس (الفصل 4) الى حالة منوعة قابلة للمفاضلة أولية وكذا طرح وحل المسائل المباشرة والعكسية الموافقة لذلك. إن المثيل المتعدد الابعاد للتحليل الشعاعي التقليدي هو التحليل الموتري باعتبار موترات من أية مرتبة كانت (سوف نحتاج على وجه الخصوص الى موترات متغايرة لوصف الاشكال المتعددة الخطية). إنه تبين بأن العمليات الشعاعية التفاضلية، أي التدرج والتفرق والدوار تجد تعميمها في عملية تفاضلية واحدة على حقول الاشكال المتعددة الخطية، وهي عملية المفاضلة ضد التناظرية (§7 .2). يأخذ دستور ستوكس شكلا عاما وفي نفس الوقت بسيطاً جداً: هناك مساواة بين التكامل على ساحة لتفاضلية شكل والتكامل على حافة ساحة هذا الشكل ذاته (§7 .3). نختتم هذا الفصل بتعميم للمسألة العكسية في التحليل الشعاعي، أي مسألة استرجاع حقل شعاعي انطلاقا من تفرقة ودواره: ترد هذه المسألة الى استرجاع (محلي) لشكل انطلاقا من تفاضليته وتفاضليته القرينة، اما حل المسألة الاخيرة فهو جد بسيط باستخدام في آخر المطاف طرق التحليل الشعاعي (§7 .4).

§ 1.7 . الاشكال ضد التناظرية

11.7 . الترقيم المتعدد. نسمي رقما أي عدد طبيعي 1، 2، .... نسمي **رقما متعددا**، وعلى وجه التحديد $(k\text{-}n)$ - رقما كل متتالية $(i)=(i_1, \ldots, i_k)$ مؤلفة من k رقما لا يتجاوز كل منها العدد n. تسمى الارقام

i_1 ، ... ، i_k مركبات الـ$(k-n)$ رقم $(i)=(i_1, ..., i_k)$. نقول عن

رقمين $(k\text{-}n)$ $\quad (i) = (i_1, \ldots, i_k) \;\; \text{et} \;\; (j) = (j_1, \ldots, j_k)$

إنهما متساويان إذا كان $i_1=j_1$ ، ... ، $i_k=j_k$ ونقول انهما مختلفان إذا تحققت اللامساواة $i_p \neq j_p$ من اجل رقم $k \geqslant p$ على الاقل. نقول عن رقم متعدد $(i)=(i_1, .., i_k)$ إنه **مرتب** إذا كان $i_1 \leqslant i_2 \leqslant ... \leqslant i_k$ ، وانه ضيق إذا كانت الارقام i_1 ، ... ، i_k كلها مختلفة، وأنه **مرتب تماما** إذا كان $i_1 < i_2 < ... < i_k$. نتأكد بسهولة انه إذا كان k و n معطيين فإن هناك n^k $(k-n)$ رقما مختلفة وC^k_{n+k-1} مرتبة و $n(n-1)...(n-k+1)$ ضيقة وC^k_n مرتبة تماما. بصفة خاصة، من اجل $k=1$، يوجد $n(n-1)$ رقما تمثل الارقام 1 ، ... ، n لاغير؛ على الرغم من ان التعريف السابق لا ينطبق مباشرة فإننا نعتبر هذه الارقام المتعددة مرتبة تماما. من اجل $k=n$، يوجد n^n $(n-n)$ رقما مختلفة و C^n_{2n-1} مرتبة و$n!$ ضيقة وواحد فقط $(C^n_n=1)$ مرتب تماما، انه الـ$(n-n)$ رقم $(1, 2, \ldots, n)$. نشير ايضا الى $n(n-(n-1))$ رقما مرتبة تماما:

$$(\hat{1}, 2, 3, \ldots, n), (1, \hat{2}, 3, \ldots, n), \ldots, (1, 2, 3, \ldots, \hat{n})$$

حيث يعني الرمز ∧ ان المركبة الموافقة له يجب حذفها من المتتالية الواقعة بين قوسين. من اجل n<k فإنه لا توجد $(k-n)$ ارقام ضيقة ولا (حتما) مرتبة تماما.

ب. يمكن كتابة كل $(k\text{-}n)$ رقم $(i)=(i_1, ..., i_k)$ على شكل $(k-n)$ رقم مرتب $(\alpha)=(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ بتبديل مركباتها تبديلا مناسبا، يسمى مثل هذا التبديل **مرتِّبة** ونرمز له بـ$O(i)$. نلاحظ ان كل $(k-n)$ رقم (i) ضيق يتحول بواسطة مرتّبة الى $(k-n)$ رقم (α) مرتب تماما، علما ان التبديل $O(i)$ معــرف هنــا بطــريقــة وحيــدة. امــا العــدد $\varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} \equiv \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$ فهو، تعريفا، اشارة هذا التبديل.

إذا كانت لدينا مصفوفة $\| a^j_{\alpha_p} \|$ من النمط $(k \times k)$ ارقام سطورها

هـي k ,... ,$j=1$ وارقـام اعمـدتها هـي α_p حيـث $p=1, \ldots, k$
و $\alpha_k > \ldots > \alpha_1$ ، فإن معينها يحسب بالدستور:

$$\det \| a^j_{\alpha_p} \| = \sum_{O(i)=(\alpha)} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} a^1_{i_1} \ldots a^k_{i_k} \quad (1)$$

(يتم الجمع على كل الارقام المتعددة (i) التي يكون من اجلها $O(i)=(\alpha)$).

ج. يسمى رقم متعدد $(j) = (j_1, \ldots, j_{n-k})$ مركباته تتمم مركبات (k–n) رقم ضيق $(i) = (i_1, \ldots, i_k)$ حتى الرتبة n بأكملها 1 ، 2 ، ... ،n يسمى متمم الـ(k–n) رقم (i). إن هذا الرقم المتعدد (j) معرف بطريقة وحيدة إن اشترطنا أن يكون مرتبا.

د. كمثال (سنحتاجه في المستقبل) عما سبق نحسب اشارة التبديل الذي يرتب (n–n) رقما من الشكل $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ حيث $(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ هو الرقم المرتب تماما المتم لرقم مرتب تماما $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ يمكن بايجاد مرتّبة الـ(n–n) رقم المشار اليه كما يلي. نضع في البداية الرقم α_k الواقع في المكان رقم k في مكانه رقم α_k . إن العدد α_k يساوي على الاقل k لأن الرقم المتعدد (α). مرتب تماما. تتم هذه العملية أثر $\alpha_k - k$ تبديلا لعنصرين متجاورين، وهي لا تغير مواقع β_j . ثم نحوّل الرقم α_{k-1} من الموقع رقم k–1 الى الموقع رقم $\alpha_{k-1} \geqslant k-1$ ، وتتم هذه العملية أيضا أثر $\alpha_{k-1} - (k-1)$ تبديلا لعنصرين متجاورين، نواصل بنفس الطريقة فنصل الى تحويل الرقم α_1 من الموقع الاول الى الموقع رقم α_1 ويتم ذلك بعد $\alpha_1 - 1$ تبديلا لعنصرين متجاورين. عندما تأخذ كل الارقام $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ اماكنها فإن الارقام $\beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ تأخذ ايضا اماكنها تلقائياً لأنها تحتفظ بمواقعها الخاصة وتشغل كل الاماكن المتبقية. أخيراً لترتيب الرقم المتعدد $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k})$ فقد قمنا بـ

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k - (1 + \ldots + k) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j - \frac{k(k+1)}{2}$$

تبديلا لعنصرين متجاورين، ومنه يأتي:

$$\varepsilon^{1,\ \dots,\ k,\ k+1,\ \dots,\ n}_{\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \dots,\ \beta_{n-k}} = (-1)^{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j - \frac{k(k+1)}{2}} \tag{2}$$

21.7 . الاشكال المتعددة الخطية.

أ. نقول عن تابع $A(\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x})$ لـ 1 شعاعا $\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x}$ من فضاء شعاعي R انه **متعدد الخطية** وعلى وجه التحديد **k ـ الخطية** إذا كان خطيا بالنسبة لكل متغير عند تثبيت المتغيرات الاخرى.

ب. يسمى كل تابع k ـ خطي في الفضاء R_n k ـ **شكلا** ويسمى 1 **درجة الشكل**. لنبحث عن العبارة العامة لِـ k ـ شكل $A(\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x})$ في الفضاء R_n ذي البعد n. لهذا الغرض نختار بشكل كيفي أساسا $e_1, \dots, e_n$ ونرمز لإحداثيات شعاع $\underset{i}{x}$ ضمن هذا الاساس بِـ $\underset{i}{\xi}^1, \dots, \underset{i}{\xi}^n$. يتبين من خاصية تعدد الخطية أن:

$$A(\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x}) = A\left(\sum_{i_1} \underset{1}{\xi}^{i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_k} \underset{k}{\xi}^{i_k} e_{i_k}\right) = \tag{1}$$
$$= \sum_{(i)} \underset{1}{\xi}^{i_1} \dots \underset{k}{\xi}^{i_k} A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \sum_{(i)} a_{(i)} \underset{1}{\xi}^{i_1} \dots \underset{k}{\xi}^{i_k},$$

حيث $a_{(i)} = A(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. القضية العكسية بديهية: إذا كُتب أي تابع لِـ 1 شعاعا $\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x}$ من الفضاء R_n بدلالة احداثيات هذه الاشعة بالطريقة الواردة في الطرف الايمن من (1) فإنه يمثل k ـ شكلا، وذلك مهما كانت المعاملات $a_{(i)}$.

ج. بطبيعة الحال يمكننا جمع k ـ الاشكال في R_n وضربها في الاعداد ونحصل بعد ذلك عله k ـ اشكال. وهكذا تؤلف الـ k ـ اشكال في R_n فضاء شعاعيا جديدا. يتألف اسهاسها من k ـ الاشكال $\underset{1}{\xi}^{i_k} \dots \underset{k}{\xi}^{i_k}$ التي يساوي عددها عدد (k–n) الارقام أي n^k (11.7 ـ أ). ينتج الاستقلال الخطي لِـ k ـ الاشكال هذه من وحدانية التمثيل (1): نضع فيها $\underset{1}{x} = e_{j_1}, \dots, \underset{k}{x} = e_{j_k}$ فنصل بالضرورة الى العبارة $a_{(j)} = A(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ وهكذا فإن بعد فضاء كل الاشكال في R_n يساوي n^k.

د . لنر كيف تتحول المعاملات $a_{(i)}$ عند الانتقال الى اساس جديد $e_{i'} = p_{i'}^{i} e_i$ (11.6). لدينا:

$$a_{(i')} = A(e_{i'_1}, \ldots, e_{i'_k}) = p_{i'_1}^{i_1} \ldots p_{i'_k}^{i_k} A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = p_{i'_1}^{i_1}, \ldots, p_{i'_k}^{i_k} a_{(i)}.$$

وهكذا تشكل المعاملات $a_{(i)}$ موترا متغايرا k مرة.

أ . ندخل ايضا مفهوم O ـ الشكل: O ـ شكل هو تعريفا تابع لِـ $x \in R_n$ ثابت تؤلف إذن مجموعة O ـ الاشكال فضاء بعده 1 .

31. 7 . k ـ الاشكال ضد التناظرية.

أ . نقول عن k ـ شكل $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ تتغير اشارته بتبديل متغيرين مستقلين فيما بينهما إنه ضد تناظري.

من البديهي ان جمع k ـ الاشكال ضد التناظرية وضربها في الاعداد يؤديان الى k ـ اشكال ضد تناظرية. وهكذا تمثل k ـ الاشكال ضد التناظرية فضاء جزئيا شعاعيا من فضاء كل k ـ الاشكال.

ب . ليكن

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(i)} a_{(i)} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}$$

k ـ شكلا ضد تناظريا بما أن $a_{(i)} = A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ فإن المعاملات $a_{(i)}$ ضد تناظرية بالنسبة للمركبات $i_1, \ldots, i_k$ الواردة في الـ (k−n) ـ رقم(i)بصفة خاصة، إذا كان هذا الاخير غير ضيق أي إذا كانت له مركبتان متساويتان فإن المعامل $a_{(i)}$ منعدم. بما أنه لا وجود لِـ $k > n$ ـ أرقام ضيقة من اجل$n < k$ فإن كل k ـ شكل (عندما n<k) ضد تناظري مطابق إذا كان n⩾k فإن $a_{(i)} = \varepsilon_{i_1 \ldots i_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} a_{(\alpha)}$ حيث $(\alpha) = O(i)$ ونستطيع وضع $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ على الشكل:

$$(1) \quad A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(i)} a_{(i)} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}$$
$$= \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \sum_{O(i)=(\alpha)} \varepsilon_{i_1 \ldots i_k}^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k} = \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)} D_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}),$$

حيث:

$$D_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \begin{vmatrix} \xi_1^{\alpha_1} & \ldots & \xi_k^{\alpha_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{\alpha_k} & \ldots & \xi_k^{\alpha_k} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

تسمى الاشكال $D_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ في (2) الضد تناظرية بطبيعة الحال، k- اشكالا ضد تناظرية قانونية؛ اما عددها فهو عدد الـ (k-n) ارقام $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ المرتبة تماما أي C_n^k (11.7 - أ). بما أن المعاملات $a_{(\alpha)}$ في (1) معرفة بصفة وحيدة $a_{(\alpha)} = A(e_{\alpha_1}, .., e_{\alpha_n})$ فإن الاشكال $D_{(\alpha)}$ مستقلة خطيا، إذن تمثل اساسا في الفضاء الجزئي لكل k- الاشكال ضد التناظرية. يأتي من ذلك ان بعد هذا الفضاء الجزئي يساوي C_n^k.

ج. إن الـ n - شكل ضد التناظري $(C_n^n = 1)$ الوحيد (بتقدير عدم الاستقلال الخطي) هو:

$$D_{(1, \ldots, n)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n}{x}) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \ldots & \xi_n^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^n & \ldots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

إذا كان الفضاء R_n اقليديا واخذنا الاحداثيات ξ^i ضمن أساس متعامد ومتجانس فإن القيمة المطلقة للشكل $D_{(1, \ldots, n)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n}{x})$ تفسر هندسيا كحجم متوازي الوجوه المنشأ على الاشعة $\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n}{x}$.

د. إن تعريف ضد التناظر لا ينطبق مباشرة على O- الاشكال و 1 - الاشكال رغم ذلك فإننا نعتبر تلك الاشكال ضد تناظرية تعريفاً.

41.7. مناوب k - شكل.

أ. ليكن $(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ k- شكلا كيفيا، نضع تعريفاً:

$$\operatorname{Alt} A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \frac{1}{k!} \sum_{(i)} \varepsilon^{1 \ldots k}_{i_1 \ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}), \quad (1)$$

مع الجمع على كل (k–n) الارقام (i) الضيقة. يمثل الطرف الايمن المتوسط الحسابي للقيم $A(\underset{i_1}{x}, \ldots\ldots, \underset{i_k}{x})$ من اجل كل تبديلات الـ (k–k) رقم (1, ..., k)، المزودة بإشارات التبديلات الموافقة لها انه يمثل أيضا k- شكلا يسمى مناوب الـk- شكل الابتدائي $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$. وهو شكل تناظري مهما كان الشكل الابتدائي $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ نعتبر، مثلا، تبديل $\underset{1}{x}$ و $\underset{2}{x}$. نعالج بصفة منفصلة مجموع حدين متواليين من الطرف الثاني في (1):

$$s = \varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 1\ldots 2\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) + \varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 2\ldots 1\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}),$$

حيث أن مواقع الارقام الاخرى 3, ..., k ثابتة. يصبح هذا المجموع بعد تبديل $\underset{1}{x}$ و $\underset{k}{x}$:

$$\begin{aligned}\tilde{s} = {} & \varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 1\ldots 2\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) + \\ & + \varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 2\ldots 1\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) = \\ & = -\varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 2\ldots 1\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) - \\ & - \varepsilon^{1\ldots\ldots\ldots\ldots k}_{i_1\ldots 1\ldots 2\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{1}{x}, \ldots, \underset{2}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) = -s.\end{aligned}$$

ينتج عن ذلك ان العبارة $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ Alt تغيّر اشارتها عند تبديل $\underset{1}{x}$ و $\underset{2}{x}$. وإذا شكل $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ ضد تناظريا فإن مناويه لا يغيّره لأن كل حدود المجموع (1) متطابقة:

$$\varepsilon^{1\ldots k}_{i_1\ldots i_k} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}) = A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$$

ب. نبحث مثلا عن $\underset{1}{\xi}^{j_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{j_k}$ Alt حيث $(j) = (j_1, \ldots, j_k)$ يمثل (k–n) - رقما مثبتا لدينا طبقا للتعريف:

$$(2)\,\mathrm{Alt}\,\underset{1}{\xi}^{j_1}\ldots\underset{k}{\xi}^{j_k}=\frac{1}{k!}\sum_{(i)}\varepsilon^{1\ldots k}_{i_1\ldots i_k}\underset{i_1}{\xi}^{j_1}\ldots\underset{i_k}{\xi}^{j_k}=$$

$$=\frac{1}{k!}\det\|\underset{r}{\xi}^{j_p}\|=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix}\underset{1}{\xi}^{j_1} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{j_1}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \underset{1}{\xi}^{j_k} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{j_k}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{(\nu)}\varepsilon^{j_1\ldots j_k}_{\nu_1\ldots\nu_k}\underset{1}{\xi}^{\nu_1}\ldots\underset{k}{\xi}^{\nu_k}.$$

إذا كان الرقم المتعدد (j) مرتبا تماما، مثلا $(j)=(\alpha)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$

فإن:

$$(3)\qquad \mathrm{Alt}\,\underset{1}{\xi}^{\alpha_1}\ldots\underset{k}{\xi}^{\alpha_k}=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix}\underset{1}{\xi}^{\alpha_1} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{\alpha_1}\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ \underset{1}{\xi}^{\alpha_k} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{\alpha_k}\end{vmatrix}=\frac{1}{k!}D_{(\alpha)}(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x}),$$

حيث $D_{(\alpha)}(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x})$ شكل ضد تناظري قانوني (31.7).

ج. نشير ايضا الى الخاصية الخطية البديهية للمناوب: من اجل k ـ شكلين $A_1(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x})$ و $A_2(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x})$ ومن اجل عددين a_1 و a_2 لدينا:

$$(4)\qquad \mathrm{Alt}\,(a_1A_1+a_2A_2)=a_1\,\mathrm{Alt}\,A_1+a_2\,\mathrm{Alt}\,A_2.$$

51.7 . الجداءات الموترية للاشكال المتعددة الخطية.

أ. ليكن $A(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x})$ k ـ شكلاً و $B(\underset{1}{x},\ldots,\underset{m}{x})$ m ـ شكلا إن الجداء الموتري (k+m)ـ شكل $C(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k+m}{x})$ معرف بالمساواة:

$$(1)\qquad C(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k+m}{x})=A(\underset{1}{x},\ldots,\underset{k}{x})\,B(\underset{k+1}{x},\ldots,\underset{k+m}{x}).$$

نرمز للعلاقة (1) قصد الاختصار بـ **C=A×B**.

ب. بما ان الجداء السلمي يكتب بدلالة الجداءات العادية العددية لقيم الاشكال فإنه يتمتع بالخاصية الخطية: إذا كان $A = a_1A_1 + a_2A_2$ فإن:

$$A \times B = (a_1A_1 + a_2A_2) \times B = a_1A_1 \times B + a_2A_2 \times B.$$

ج. حتى ولو كان **A** و **B** شكلين ضد تناظرين فإن الشكل **A×B** ليس بالضرورة ضد تناظريا. إذا أردنا الحصول على شكل ضد تناظري يكفي مناوبة الجداء الموتري، فنصل الى شكل جديد هو:

$$D(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k+m}{x}) = \mathrm{Alt}\,[A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})\, B(\underset{k+1}{x}, \ldots, \underset{k+m}{x})], \tag{2}$$

أو، باختصار $D = A \wedge B$ الذي يسمى جداء متناوبا للشكلين **A** و **B** (نلاحظ أنه معرف من اجل كل شكلين **A** و **B** حتى ولو كانا ضد تناظرين!)

د. نحسب، مثلا، $A \wedge B$ حيث:

$$A = \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}, \quad B = \underset{1}{\xi}^{j_1} \ldots \underset{m}{\xi}^{j_m}.$$

لدينا تعريفا:

$$A \wedge B = \mathrm{Alt}\,(A \times B) = \mathrm{Alt}\, \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k} \underset{k+1}{\xi}^{j_1} \ldots \underset{k+m}{\xi}^{j_m}.$$

نحصل باستخدام 41.7 (3) على:

$$A \wedge B = \frac{1}{(k+m)!} \begin{vmatrix} \underset{1}{\xi}^{i_1} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{i_1} \underset{k+1}{\xi}^{i_1} & \ldots & \underset{k+m}{\xi}^{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{1}{\xi}^{i_k} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{i_k} \underset{k+1}{\xi}^{i_k} & \ldots & \underset{k+m}{\xi}^{i_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{1}{\xi}^{j_m} & \ldots & \underset{k}{\xi}^{j_m} \underset{k+1}{\xi}^{j_m} & \ldots & \underset{k+m}{\xi}^{j_m} \end{vmatrix} = \tag{3}$$

$$= \frac{1}{(k+m)!} \sum_{(\nu)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_m}_{\nu_1 \ldots \nu_k \nu_{k+1} \ldots \nu_{k+m}} \underset{1}{\xi}^{\nu_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{\nu_k} \underset{k+1}{\xi}^{\nu_{k+1}} \ldots \underset{k+m}{\xi}^{\nu_{k+m}}.$$

ر . إن الضرب الموتري المتناوب عملية خطية مع الضرب الموتري والمناوب: إذا كان $A = a_1A_1 + a_2A_2$ فإن:

$$(a_1A_1 + a_2A_2) \wedge B = \text{Alt}\,\{(a_1A_1 + a_2A_2) \times B\} =$$
$$= \text{Alt}\,(a_1A_1 \times B + a_2A_2 \times B) = a_1A_1 \wedge B + a_2A_2 \wedge B,$$

وكذا الامر فيما يخص الحالة $B = b_1B_1 + b_2B_2$.

س . ليكن $A = \sum_i a_i\xi^i,\ B = \sum_j b_j\xi^j,$ شكلين خطيين معطيين. إن القانون ضد التبديلي التالي قائم:

$$A \wedge B = -B \wedge A.$$

بعد الانتهاء من البرهان على قيام الخاصية الخطية يكفي اثبات (4) من اجل الاشكال الوحيدة الحد $A = \xi^i,\ B = \xi^j$ لدينا:

$$\xi^i \wedge \xi^j = \text{Alt}\,\underset{1}{\xi^i}\underset{2}{\xi^j} = \frac{1}{2}(\underset{1}{\xi^i}\underset{2}{\xi^j} - \underset{1}{\xi^j}\underset{2}{\xi^i}) = -\text{Alt}\,\underset{1}{\xi^j}\underset{2}{\xi^i} = -\xi^j \wedge \xi^i.$$

اما فيما يخص الاشكال ذات الدرجات العالية فإن العلاقة (4) تستبدل بعلاقة اكثر تعقيدا (راجع التمرين 10).

ص . لنثبت ان الضرل الموتري المتناوب جمعي أي أن لدينا العلاقة التالية من اجل أية اشكال ثلاثية A; B; C:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C). \tag{5}$$

يكفي اثباتها من اجل الاشكال الوحيدة الحد الاساسية:

$$A = \underset{1}{\xi^{i_1}} \ldots \underset{k}{\xi^{i_k}},\ B = \underset{1}{\xi^{j_1}} \ldots \underset{l}{\xi^{j_l}},\ C = \underset{1}{\xi^{s_1}} \ldots \underset{m}{\xi^{s_m}},$$

لأن الانتقال الى الحالة العامة يتم بسهولة بواسطة خاصية الخطية المثبتة اعلاه. كنا وجدنا في (3) الشكل $A \wedge B$ نشكل الجداء $(A \wedge B) \wedge C$. لدينا:

$$(A \wedge B) \wedge C = \text{Alt}\,[(A \wedge B) \times C] =$$
$$= \text{Alt}\left(\frac{1}{(k+l)!}\sum_{(\nu)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}_{\nu_1 \ldots \ldots \nu_{k+l}} \xi^{\nu_1} \ldots \underset{k+l}{\xi^{\nu_{k+l}}}\ \underset{k+l+1}{\xi^{s_1}} \ldots \underset{k+l+m}{\xi^{s_m}}\right) =$$
$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{(\nu)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}_{\nu_1 \ldots \ldots \nu_{k+l}}\,\text{Alt}\,\underset{1}{\xi^{\nu_1}} \ldots \underset{k+l}{\xi^{\nu_{k+l}}}\ \underset{k+l+1}{\xi^{s_1}} \ldots \underset{k+l+m}{\xi^{s_m}}.$$

بتطبيق مرة أخرى 41.7 (3) نحصل على:

$$(A \wedge B) \wedge C =$$

$$= \frac{1}{(k+l)\,!} \sum_{(\nu)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_l}_{\nu_1 \ldots \ldots \nu_{k+l}} \frac{1}{(k+l+m)\,!} \begin{vmatrix} \xi^{\nu_1}_{1} & \ldots & \xi^{\nu_1}_{k+l+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{\nu_{k+l}}_{1} & \ldots & \xi^{\nu_{k+l}}_{k+l+m} \\ \xi^{s_1}_{1} & \ldots & \xi^{s_1}_{k+l+m} \\ \xi^{s_m}_{1} & \ldots & \xi^{s_m}_{k+l+m} \end{vmatrix} .$$

نبدّل سطور المعين المحصل عليه بحيث تصبح في تـرتيبهـا الابتـدائـي $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l$ ؛ نجد عندئذ:

$$(A \wedge B) \wedge C = \frac{1}{(k+l)\,!} \frac{1}{(k+l+m)!} \sum_{(\nu)} \begin{vmatrix} \xi^{i_1}_{1} & \ldots & \xi^{i_1}_{k+l+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{j_l}_{1} & \ldots & \xi^{j_l}_{k+l+m} \\ \xi^{s_1}_{1} & \ldots & \xi^{s_1}_{k+l+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{s_m}_{1} & \ldots & \xi^{s_m}_{k+l+m} \end{vmatrix} .$$

إن المعين المحصل عليه لا يتعلق بالرقم (ν) ؛ وأصبحت كل الحدود الواقعة تحت رمز الجمع متساوية. إن عدد هذه الحدود، المساوي لعدد كل الارقام الضيقة (ν) ، هو $(k+l)!$ ـ اخيرا:

$$(6) \qquad (A \wedge B) \wedge C = \frac{1}{(k+l+m)\,!} \begin{vmatrix} \xi^{i_1}_{1} & \ldots & \xi^{i_1}_{k+l+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{j_l}_{1} & \ldots & \xi^{j_l}_{k+l+m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi^{s_m}_{1} & \ldots & \xi^{s_m}_{k+l+m} \end{vmatrix} .$$

من الواضح ان حساب$A \wedge (B \wedge C)$يؤدي الى نفس النتيجة وبذلك نكون قد اثبتنا القانون التجميعي للضرب الموتري المتناوب. وهكذا فإن العبارة$A \wedge B \wedge C$وكذا مثيلاتها المحتوية عله عدد اكبر من العوامل، معرفة بطريقة وحيدة.

7 .61 . الرمز القانوني للاشكال ضد التناظرية.

أ . باعتبار ثلاثة وحيدات حدود $\xi^{i_1}, \xi^{i_2}, \xi^{i_3}$ ، نجد استناداً الى 7 .41 (3):

$$\xi^{i_1} \wedge \xi^{i_2} \wedge \xi^{i_3} = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} \underset{1}{\xi}^{i_1} & \underset{2}{\xi}^{i_1} & \underset{3}{\xi}^{i_1} \\ \underset{1}{\xi}^{i_2} & \underset{2}{\xi}^{i_2} & \underset{3}{\xi}^{i_2} \\ \underset{1}{\xi}^{i_3} & \underset{2}{\xi}^{i_3} & \underset{3}{\xi}^{i_3} \end{vmatrix} = \operatorname{Alt} \underset{1}{\xi}^{i_1} \underset{2}{\xi}^{i_2} \underset{3}{\xi}^{i_3}.$$

نواصل بطريقة مماثلة فنجد من اجل أية ارقام $i_1, \ldots, i_k$:

$$\xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k} = \operatorname{Alt} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}. \qquad (1)$$

إذا كان الرقم المتعدد $(i) = (\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ مرتبا تماما فإن الشكل $\operatorname{Alt} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}$ يطابق، بتقدير عامل، الشكل ضد التناظري الاساسي $D_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ (7 .41 ـ ب). بالتالي فان كل k ـ شكل ضد تناظري $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ يكتب كما يلي:

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)} \xi^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\alpha_k}, \qquad (2)$$

حيث ان المعاملات $\tilde{a}_{(\alpha)}$ معرفة بطريقة وحيدة. تسمى المساواة (2) الرمز الاول القانوني للشكل ضد التناظري $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$.

ب . بطبيعة الحال، يمكننا كتابة بطريقة أخرى الشكل ضد التناظري

$$(3) \qquad A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(i)} a_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k}$$

وذلك بالجمع على كل (k–n) الارقام الضيقة $(i) = (i_1, \ldots, i_k)$ ، لكن المعاملات $a_{(i)}$ لهذا الرمز ليست بصفة عامة معرفة. بطريقة وحيدة. إذا اشترطنا في الرمز (3) ان تكون المعاملات $a_{(i)}$ توابع ضد تناظرية للرقم المتعدد (i) أي انها تتغير اشاراتها عند تبديل مركبتين من هذا الرقم فإن الرمز (3) يصبح وحيدا ويسهل التعبير عن المعاملات $a_{(i)}$ بدلالة المعاملات $\tilde{a}_{(\alpha)}$ للرمز (2). لدينا بالفعل ضمن الافتراض المشار اليه:

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(i)} a_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k} = \sum_{(\alpha)} \sum_{O(i)=(\alpha)} a_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k} ;$$

باستخدام الخاصية القائلة ان العملية ∧ ضد تبديلية من اجل الاشكال الخطية وكذا ضد تناظر المعاملات $a_{(i)}$ ، فإننا نجد:

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(\alpha)} \sum_{O(i)=(\alpha)} a_{(\alpha)} \xi^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\alpha_k} =$$

$$= k! \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \xi^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\alpha_k},$$

ومنه يأتي:

$$(4) \qquad \tilde{a}_{(\alpha)} = k!\, a_{(\alpha)}.$$

بخصوص القضية العكسية فإننا نستطيع انطلاقا من (2) الانتقال الى التمثيل (3) بوضع:

$$(5) \qquad a_{(i)} = \frac{1}{k!} \varepsilon^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{i_1 \ldots i_k} \tilde{a}_{(\alpha)}.$$

تسمى المساواة (3) بالمعاملات ضد التناظرية $a_{(i)}$ **الرمز الثاني القانوني للشكل ضد التناظري** $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$.

ج. يتفوق الرمز (3) ذو المعاملات $a_{(i)}$ ضد التناظرية على الرمز (2) بكوْن معاملاته $a_{(i)}$ (المعرفة بطريقة وحيدة بشرط ضد التناظر ضمن كل جملة احداثيات) تمثل موترات متغايرة k مرة. بالفعل فإن لدينا

ضمن الاحداثيات الجديدة $\xi^{i'} = p^{i'}_{i} \xi^{i}$:

$$\sum_{(i)} a_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k} =$$

$$= \sum_{(i)} \sum_{(i')} a_{(i)} p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k} \xi^{i'_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i'_k} = \sum_{(i')} a_{(i')} \xi^{i'_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i'_k},$$

ويمكننا وضع:

$$a_{(i')} = \sum_{(i)} a_{(i)} p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k}.$$

إن المعاملات $a_{(i')}$ ضد تناظرية بالنسبة لمركبات الرقم المتعدد (i') أي انها تمثل بالضبط المعاملات المطلوبة للشكل المحوّل. يثبت ذلك الطابع الموتري للكميات $a_{(i)}$.

إذن، إذا كانت الكميات ضد التناظرية (بالنسبة لمركبات الرقم المتعدد(i)) $a_{(i)}$ معطاة ضمن اية جملة احداثيات وكانت العبارة:

$$\sum_{(i)} a_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k}$$

لا تتعلق بجملة الاحداثيات فإن $a_{(i)}$ تشكل موترا متغايرا k مرة. فيما يخص المعاملات $\tilde{a}_{(\alpha)}$ في الدستور (2) فإن قاعدة تحويلها بالإنتقال الى الاحداثيات الجديدة تتميز بطابع يختلف تماما عما سبق (راجع التمرين 12).

د. لما كانت الاشكال

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k}$$

من اجل $(i) = (i_1, \ldots, i_k)$، ضد تناظرية (51.7 ـ س) فإن كل عبارة خطية لها

$$\omega = \sum_{(i)} c_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k} \tag{6}$$

تمثل شكلا ضد تناظريا. إذا كانت المعاملات (i) ، فضلا عن ذلك ضد تناظرية بالنسبة لمركبات الـ(k-n)ـ رقم، فإن الشكل ω معطى مباشرة ضمن رمزه القانوني (3) وإذا كانت المعاملات $c_{(i)}$ تناظرية بالنسبة لثنائية مركبتين على الاقل، مثلا إذا كان

$c_{i_1 i_2 \dots i_k} = c_{i_2 i_1 \dots i_k}$ ، فإن الشكل (6) مطابق للصفر. بالفعل، نلاحظ في هذه الحالة ان مجموع كل حدين.

$$s = c_{i_1 i_2 \dots i_k} \xi^{i_1} \wedge \xi^{i_2} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k} + c_{i_2 i_1 \dots i_k} \xi^{i_2} \wedge \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k}$$

حيث $i_3, \dots, i_k$ دليلات مثبتة، منعدم:

$$s = c_{i_1 i_2 \dots i_k} (\xi^{i_1} \wedge \xi^{i_2} + \xi^{i_2} \wedge \xi^{i_1}) \wedge \xi^{i_3} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k} = 0.$$

ر. في الحالة العامة، يمكننا الانتقال من الرمز (6) الى الرمز القانوني (2) كما يلي:

$$\sum_{(i)} c_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k} = \sum_{(\alpha)} \sum_{O(i)=(\alpha)} c_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \Big(\sum_{O(i)=(\alpha)} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{i_1 \dots i_k} c_{(i)} \Big) \xi^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \xi^{\alpha_k} = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)} \xi^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \xi^{\alpha_k},$$

حيث

$$\tilde{a}_{(\alpha)} = \sum_{O(i)=(\alpha)} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{i_1 \dots i_k} c_{(i)}. \qquad (7)$$

نستطيع بعد ذلك ايجاد الرمز القانوني (3) للشكل (6) وفق الدستور (5):

$$\sum_{(i)} c_{(i)} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k} = \sum_{(j)} a_{(j)} \xi^{j_1} \wedge \dots \wedge \xi^{j_k},$$

حيث $O(i) = O(j) = (\alpha)$ و:

$$a_{(j)} = \frac{1}{k!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{j_1 \dots j_k} \tilde{a}_{(\alpha)} = \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=(\alpha)} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{j_1 \dots j_k} \varepsilon^{i_1 \dots i_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_k} c_{(i)} = \qquad (8)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=O(j)} \varepsilon^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} c_{(i)}.$$

§ 2.7 . الاشكال التفاضلية

12.7 . تعريف الاشكال التفاضلية.

أ . لتكن M_n منوعة اولية قابلة للمفاضلة بعدها n من الصنف $1<p$ (12.6). يوجد عند كل نقطة $x \in M_n$ فضاء ماس $T_n(x)$ أي الفضاء الشعاعي ذو البعد n المشكل من الاشعة الماسة للمنحنيات المارة بالنقطة x، يعرف كل تحويل للإحداثيات $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$ في الفضاء M_n على $T_n(x)$ تحويلا خطيا للأشعة وذلك وفق الدستور $\xi^{i'} = p^{i'}_i \xi^i$ حيث $p^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$. نستطيع في كل فضاء $T_n(x)$ انشاء اشكال متعددة

الخطية للأشعة $\xi^i = dx^i$ ، وبصفة خاصة، k_ اشكال ضد تناظرية

$$A(x;\ \underset{1}{dx},\ \ldots,\ \underset{k}{dx}) = \sum_{(i)} a_{(i)}(x)\, \underset{1}{dx}^{i_1} \ldots \underset{k}{dx}^{i_k}. \qquad (1)$$

بالنظر الى النتائج 61.7 ، أ ـ ب فإن كل k_ شكل ضد تناظري عله الفضاء $T_n(x)$ يكتب على النحو :

$$A(x;\ \underset{1}{dx},\ \ldots,\ \underset{k}{dx}) = \sum_{(i)} a_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \qquad (2)$$

حيث $a_{(i)}(x)$ معاملات ضد تناظرية بالنسبة للمركبات $i_1, \ldots, i_k$ لل $(k\text{-}n)$_ رقم (1)، أو

$$A(x;\ \underset{1}{dx},\ \ldots,\ \underset{k}{dx}) = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}, \qquad (3)$$

حيث $\alpha_1 < \ldots < \alpha_k$. يسمى أي k ـ شكل ضد تناظري

$$\omega(x;\ \underset{1}{dx},\ \ldots,\ \underset{k}{dx}) = \sum_{(i)} b_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \qquad (4)$$

الذي له معاملات تمثل توابع قابلة للإشتقاق باستمرار r مرة، والمعطى ضمن كل جملة احداثيات بدون ان يتعلق لجملة الاحداثيات، يسمى k_ **شكلا قابلا للمفاضلة وضد تناظريا وr_ مرنا على المنوعة M_n .**

ب. للحديث عن ثبوت العبارة (4) ينبغي ان يكون لدينا قانون تحويل للمعاملات $b_{(i)}(x)$ لدى الانتقال الى جملة احداثيات جديدة. نفرض في البداية ان الكمية $b_{(i)}(x)$ موتر متغايرة k مرة بحيث

$$b_{(i')}(x) \equiv b_{i'_1 \ldots i'_k}(x) = p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k} b_{i_1 \ldots i_k}(x).$$

حينئذ نجد بفضل الخاصيات الاساسية لِـ 1ـ الاشكال ضد التناظرية في R_n (51.7) أن:

$$\sum_{(i')} b_{(i')}(x)\, dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k} =$$

$$= \sum_{(i')} \sum_{(i)} p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_k}_{i'_k} b_{(i)}(x) \sum_{(j)} p^{i'_1}_{j_1} \ldots p^{i'_k}_{j_k} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j} =$$

$$= \sum_{(i)} \sum_{(j)} \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k} b_{(i)}(x)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= \sum_{(i)} b_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

والشكل (4) لا يتعلق بجملة الاحداثيات. نشير الى أنه بالامكان الاّ يتعلق الشكل (4) بجملة الاحداثيات ضمن قانون اكثر تعقيدا، غير موتري، يحوّل المعاملات $b_{(i)}(x)$ ، سنرى امثلة على ذلك مستقبلا. نفرض ان العدد r الذي يمثل رتبة قابلية الاشتقاق للمعاملات $b_{(i)}(x)$ كبير بكفاية بحث يضمن قيام الحسابات التي سنجريها ادناه.

ج. يبين الاستنتاج الذي توصلنا اليه أعلاه كيف يتم انشاء الاشكال التفاضلية على منوعة. نستطيع اعتبار العبارة:

$$\omega = \sum_{(i)} b_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

بمعاملات $b_{(i)}(x)$ ضد تناظرية وقابلة للإشتقاق بكفاية نختارها بطريقة كيفية ضمن جملة احداثيات x^i ، ثم نضع ضمن جملة احداثيات اخرى $x^{i'}$:

$$\omega = \sum_{(i')} b_{(i')}(x)\, dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k}$$

حيث $b_{(i')}(x)$ معاملات نحصل عليها انطلاقا من $b_{(i)}(x)$ بواسطة قانون تحويل موتر متغاير J مرة.

د. تشكل K_ الاشكال التفاضلية ضد التناظرية على منوعة $(1 \leqslant n)$ M_n فضاء شعاعيا بعده غير منته.

7 .22 . مفاضلة الاشكال التفاضلية.

أ. ليكن

$$\omega = \sum_{(i)} b_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (1)$$

J _ شكلا تفاضليا ضد تناظريا على منوعة M_n . نعالج العبارة:

$$\partial\omega = \sum_{(i)} \sum_{j} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}. \qquad (2)$$

على الرغم من أن المعاملات $\frac{\partial b_i(x)}{\partial x^j}$ ليست لها عموما طابع موتري فإن العبارة d كما سنرى، لا تتعلق بجملة الاحداثيات كما هو (62.6) الحال فيما يخص الشكل ω ، وعليه فهي تمثل أيضا شكلا تفاضليا ضد تناظري لـ$(k+1)$ متغير. يسمى هذا ال$(k+1)$ـ شكل **تفاضلية الشكل** ω.

ب. للبرهان على عدم تعلق العبارة $\partial\omega$ بجملة الاحداثيات نفرض في البداية أن $b_{(i)}(x)$ موتر متغاير K مرة. حينئذ يتبين من 62.6 (1) ان لدينا:

$$\partial b_{\ldots}(x) \qquad \ldots^{i_k} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^j} +$$

$$\ldots + p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_{k-1}}_{i'_{k-1}} p^{i_k}_{j' i'_k} b_{(i)}(x),$$

حيث $p^{i_s}_{j' i'_s} = \frac{\partial^2 x^{i_s}}{\partial x^{i'_s} \partial x^{j'}}$ ينتج عن ذلك أن

$$(3) \quad \frac{\partial b_{(i')}(x)}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k} =$$

$$= \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ p^{i_1}_{j' i'_1} p^{i_2}_{i'_2} \ldots p^{i_k}_{i'_k} b_{(i)}(x)\, p^{j'}_j p^{i'_1}_{j_1} \ldots p^{i'_k}_{j_k} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dx^{j_k} + \ldots + p^{i_1}_{i'_1} \ldots p^{i_{k-1}}_{i'_{k-1}} p^{i_k}_{j' i'_k} b_{(i)}(x)\, p^{j'}_j p^{i'_1}_{j_1} \ldots$$

$$\ldots p^{i'_k}_{j_k} dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ p^{i_1}_{j' i'_1} p^{j'}_j p^{i'_1}_{j_1} b_i(x)\, dx^j \wedge dx^{j_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} + \ldots$$

$$\ldots + p^{i_k}_{j' i'_k} p^{j'}_j p^{i'_k}_{j_k} b_i(x)\, dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{k-1}} \ldots \wedge dx^{j_k}.$$

نلاحظ بعد ذلك ان المعاملات $p^{i_1}_{j'_1 i_1} p^{j'}_{j} p^{i_1}_{j_1} b_{(i)}(x)$ متناظرة بالنسبة لِـ j وَ j_1 ، بالفعل فإننا نجد عند تبديلها ثم استبدال j بِـ i'_1 وَ i'_1 بِـ j' أن:

$$\sum_{(i')} \sum_{j'} \frac{\partial b_{(i')}(x)}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_k} =$$

$$= \sum_{(i)} \sum_{j} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^{j}} dx^{j} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

وهو مايثبت عدم تعلق العبارة (2) بجملة الاحداثيات.

جـ. لتكن الآن $b_{(i)}(x)$ معاملات كيفية معطاة من اجل كل جملة احداثيات بحيث يكون الشكل (1) غير متعلق بجملة الاحداثيات. نكتب مع 61.7 ـ ر الشكل (1) كما يلي:

$$\omega_1 = \sum_{(j)} a_{(j)}(x)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k},$$

حيث ان المعاملات:

$$a_{(j)}(x) = \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=O(j)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} b_{(i)}(x),$$

التي تمثل مركبات موتر متغاير K مرة (61.7 ـ جـ)، معاملات ضد تناظرية. يتبين مما أثبتنا أن الشكل:

$$\partial\omega_1 = \sum_{(j)} \sum_{(s)} \frac{\partial a_{(j)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

لا يتعلق بجملة الاحداثيات. لكن:

$$\frac{\partial b_{(j)}(x)}{\partial x^s} = \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=O(j)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s},$$

ومنه يأتي ان الشكل الموالي هو الذي لا يتعلق بجملة الاحداثيات:

$$\partial\omega_1 = \sum_{(j)} \sum_{s} \frac{1}{k!} \left(\sum_{O(i)=O(j)} \varepsilon^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s} \right) dx^s \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k} =$$

$$= \sum_{(j)} \left[\sum_{s} \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=O(j)} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \right] =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \sum_{O(j)=(\alpha)} \left[\sum_{s} \frac{1}{k!} \sum_{O(i)=O(j)} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \right].$$

إن الكمية الواقعة بين معكوفين لا تتعلق باختيار (j) ويمكن، مع $O(j) = (\alpha)$ ، ان نرمز للشكل $\partial\omega_1$ بـ:

$$\sum_{(\alpha)} \sum_{s} \sum_{O(i)=(\alpha)} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{(i)} \sum_{s} \frac{\partial b_{(i)}(x)}{\partial x^s} dx^s \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = d\omega,$$

وهو المطلوب.

د. من السهل ان نرى بأن عملية المفاضلة عملية خطية: لدينا من اجل كل J ـ شكلين ω_1 وَ ω_2 وعددين a_1 وَ a_2 :

$$\partial (a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = a_1 \partial\omega_1 + a_2 \partial\omega_2.$$

ينتج ذلك مباشرة من خطية الاشتقاق $\frac{\partial}{\partial x^i}$ في مجموعة التوابع.

ر. تتم مفاضلة الجداء الموتري ضد التناظري وفق الدستور:

$$\partial (\omega_1 \wedge \omega_2) = \partial\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \partial\omega_2, \qquad (4)$$

حيث يرمز K لدرجة الشكل ω_1 . بالفعل، ليكن:

$$\omega_1 = \sum_{(\alpha)} f_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k},$$

$$\omega_2 = \sum_{(\beta)} g_{(\beta)}(x)\, dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_m},$$

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} f_{(\alpha)}(x)\, g_{(\beta)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} \wedge dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_m}.$$

لدينا تعريفاً في هذه الحالة:

$$\partial (\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \sum_{i} \frac{\partial (f_\alpha g_\beta)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_m} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \sum_{i} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i} g_\beta\, dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_m} +$$

$$+ \sum_{(\alpha)} \sum_{(\beta)} \sum_{i} f_\alpha \frac{\partial g_\beta}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_m} =$$

$$= \partial\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge (-1)^k \partial\omega_2,$$

لأن الحصول على $\partial\omega_2$ يستوجب تبديل على التوالي dx^i مع dx^{α_k}, $\ldots, dx^{\alpha_1}$.

س. من المفيد لنا كتابة دستور يمثل حالة خاصة من الدستور (4):

$$\partial (\omega \wedge dx^m) = \partial\omega \wedge dx^m.$$

نلاحظ هنا ان الحد الثاني من الدستور (4) غائب وذلك بفضل المساواة

$$\partial (dx^m) = \partial (1 \cdot dx^m) = \sum_i \frac{\partial 1}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^m = 0.$$

32. 7 . أمثلة.

أ. لدينا من اجل 0ـ شكل $\omega = f(x)$:

$$\partial\omega = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i.$$

إن العبارة المحصل عليها لا تتعلق بجملة الاحداثيات لأن $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$ موتر متغاير K مرة (42.6 ـ ب).

ب. فيما يخص ال 1 ـ شكل $\omega = \sum_i f_i(x)\, dx^i$ فإن عدم التعلق بجملة الاحداثيات يعني أن $f_i(x)$ موتر متغاير مرة واحدة. لدينا:

$$\partial\omega = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i.$$

لنشيء الرمز الاول القانوني 61.7 (2) للشكل $\partial\omega$. ليكن $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$ حيث $\alpha_1 < \alpha_2$. عندئذ نحصل استناداً الى 61.7 ـ ر، على:

$$\tilde{a}_{\alpha_1\alpha_2} = \sum_{\alpha(i)=(\alpha)} \varepsilon^{i_1 i_2}_{\alpha_1\alpha_2} c_{i_1 i_2} = c_{\alpha_1\alpha_2} - c_{\alpha_2\alpha_1}.$$

لدينا في الحالة الراهنة $c_{ji} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}$ ، إذن:

$$\tilde{a}_{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\partial f_{\alpha_2}(x)}{\partial x^{\alpha_1}} - \frac{\partial f_{\alpha_1}(x)}{\partial x^{\alpha_2}}$$

وبالتالي:

$$\partial\omega = \sum_{\alpha_1<\alpha_2} \left(\frac{\partial f_{\alpha_2}(x)}{\partial x^{\alpha_1}} - \frac{\partial f_{\alpha_1}(x)}{\partial x^{\alpha_2}} \right) dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2}.$$

ج. من اجل $(n-1)$ شكل ω ضمن الرمز 61.7 (2)

$$\omega = a_1(x)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - a_2(x)\, dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx^n + \ldots + (-1)^{n-1} a_n(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1},$$

لدينا :

$$\partial\omega = \frac{\partial a_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n - \frac{\partial a_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge dx^n + \ldots + (-1)^n \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1};$$

يرجع سبل غياب الحدود الاخرى الى كوْن $dx^i \wedge dx^i = 0$. بوضع العامل الاول dx^i في المكان رقم i، نجد:

$$\partial\omega = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial x^n}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

د . من اجل n ـ شكل ω فإن الشكل $\partial\omega$ منعدم بوصفه $(n+1)$ شكلا ضد تناظريا.

42.7 . نظرية بوانكري (Poincaré).

أ . توطئة. لدينا من اجل كل شكل تفاضلي ضد تناظري ω على منوعة M_n:

$$\partial^2\omega \equiv \partial(\partial\omega) \equiv 0.$$

البرهان. ليكن

$$\omega = \sum_{(\alpha)} f_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

يتبين من التعريف 22.7 ـ أ، أن:

$$\partial\omega = \sum_{(\alpha)} \sum_i \frac{\partial f_{(\alpha)}(x)}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k},$$

$$\partial^2\omega \equiv \partial(\partial\omega) = \sum_{(\alpha)} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f_{(\alpha)}(x)}{\partial x^i\, \partial x^j} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

إن معاملات الشكل المحصل عليه متناظرة بالنسبة للدليلين i وَ j؛ وبالتالي يتضح من 61.7 ـ د، أن الشكل $\partial^2\omega$ منعدم، وهو المطلوب.

إن نظرية بوانكري التي سوف نبرهن عليها في ج تمثل قضية عكسية (محلية) لهذه التوطئة: إذا كان الشكل ω يحقق $\partial\omega = 0$ فإننا نستطيع بجوار كل نقطة $x \in M_n$ إيجاد شكل θ بحيث $\omega = \partial\theta$. نقدم قبل هذا توطئة ثانية.

ب. توطئة. إذا كان k ـ شكل تفاضلي وضد تناظري $\omega = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)} dx^{\alpha_1} \wedge . \wedge dx^{\alpha_k}$ على منوعة M_n بحيث $\partial\omega = 0$ وإذا لم يحتو ω على dx^n ، فإن معاملاته $\tilde{a}_{(\alpha)}$ لا تحتوي x^n .

البرهان. لدينا

$$\partial\omega = \sum_{(\alpha)} \sum_{j} \frac{\partial \tilde{a}_{(\alpha)}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} =$$

$$= \sum_{(\alpha)} \frac{\partial \tilde{a}_{(\alpha)}(x)}{\partial x^n} dx^n \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} + \omega_1,$$

حيث يرمز ω_1 لشكل لا يحوي dx^n . بما أن $\partial\omega = 0$ فرضا فإن كل معامل للشكل المحصل عليه باختصار الحدود المتشابهة منعدم. نلاحظ ان الحدود الظاهرة في الطرف الثاني ليست لها حدود مشابهة، إذن $\frac{\partial \tilde{a}_{(\alpha)}(x)}{\partial x^n} \equiv 0$ وهو المطلوب.

ج. نظرية (بوانكري). إذا كان k ـ شكل ضد تناظري ω $(1 \leqslant k)$ يحقق في ساحة من منوعة M_n ، المعادلة $\partial\omega = 0$ ، فإنه يوجد بجوار كل نقطة من هذه الساحة $(k-1)$ ـ شكل θ بحيث $\omega = \partial\theta$.

البرهان. إن النظرية بديهية من اجل $n=1$ وَ $1<k$ ؛ وترد من اجل $k=1$ الى النتيجة: إن كل 1 ـ شكل $f(x)\, dx$ يمثل تفاضلية o ـ شكل $\theta(x)$. إن هذه النتيجة بديهية: ال o ـ شكل المطلوب يمكن ان نكتبه على النحو: $\theta(x) = \int_a^x f(\xi)\, d\xi$ نفرض الآن بأن النظرية قائمة من اجل كل k ـ الاشكال في أية منوعة M_{n-1} بعدها $(n-1)$ ، ولنثبتها من اجل k ـ شكل $\omega = \sum_{(\alpha)} f_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$ في المنوعة M_n .

نكتب في الشكل ω الحدود التي تحوي dx^n كتابة صريحة:

$$\omega = dx^n \wedge \omega_1 + \omega_2;$$

يمثل ω_1 هنا $(k-1)$ـ شكلا و ω_2 kـ شكلا، وهما لا يحويان dx^n . ننجز باقي الانشاء بجوار نقطة معطاة $x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$. بدون المس بعمومية المسألة يمكننا وضع $x_0^1 = \ldots = x_0^n = 0$. نرمز بـ ∂_0 للمفاضلة بالنسبة للمتغيرات $x^1, \ldots, x^{n-1}$. يمثل اقتصار الشكل ω على السطح $x^n = 0$ kـ الشكل ω_2 حيث وضعنا $x^n = 0$، نشير الى هذا الشكل الجديد بـ ω_0 . لنثبت أن $\partial_0(\omega_0) = 0$ ، بالفعل:

$$0 = \partial\omega = \partial\omega|_{x^n=0} = dx^n \wedge \partial\omega_1|_{x^n=0} + \partial_0\omega_2|_{x^n=0} + \\ + \frac{\partial\omega_2}{\partial x^n} \wedge dx^n|_{x^n=0} = \partial_0\omega_0.$$

نلاحظ، من اجل كل شكل γ ، ان مؤثر المفاضلة ∂_0 والتعويض $x^n = 0$ يتبادلان أي أن $(\partial_0\gamma)_0 = \partial_0(\gamma_0)$. يمثل السطح $x^n = 0$ نفسه منوعة قابلة للمفاضلة بعدها $(n-1)$. نجد، بالاستناد الى فرض التدريج، في جوار للنقطة O، على السطح $x^n = 0$، أن هناك $(k-2)$ـ شكلا θ_0 (للمتغيرات $x^1, \ldots, x^{n-1}$) يتحقق من اجله:

$$\partial_0\theta_0 = \omega_0. \tag{3}$$

نبحث عن الشكل θ بجوار النقطة O من بين $(k-1)$ـ الاشكال التي لا تتعلق بـ dx^n . يمكن من اجل كل شكل، ان نكتب:

$$\partial\theta = \partial x^n \wedge \frac{\partial\theta}{\partial x^n} + \partial_0\theta, \tag{4}$$

حيث يمثل $\partial_0\theta$ شكلا لا يحوي أيضا dx^n ، أما الرمز $\frac{\partial\theta}{\partial x^n}$ فيعني اننا أشتققنا كل معامل للشكل θ بالنسبة لـ x^n . بما أن الامر يتعلق بحل المعادلة $\partial\theta = \omega$ فإن مقارنة (1) وَ (4) تبين انه من المستحسن ان نحل قبل ذلك المعادلة:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x^n} = \omega_1. \tag{5}$$

نستطيع تناول المعادلة (5) كجملة معادلات تفاضلية عادية تمثل فيها الكميات x^{n-1} ., ... ,x^1 وسيطات، اما عدد التوابع المجهولة فيساوي عدد المعاملات في الشكل θ (وفي ω_1). للحصول على حل وحيد، يجب استكمال (5) بشرط ابتدائي. نختار الشرط

$$\theta\,|_{x^n=0} = \theta_0, \tag{6}$$

حيث θ_0 حل للمعادلة (3).

يتبين من النظرية الاساسية لوجود حل معادلة مزودة بوسيطات (56.1) أن الحل الوحيد للجملة (5) مع الشرط (6) موجود في جوار للنقطة O وهو يقبل الاشتقاق بالنسبة للوسيطات x^{n-1} ,. . . ,x^1 .

لنثبت ان الشكل θ المحصل عليه بهذه الطريقة يحقق المساواة $\omega = \partial\theta$ بالفعل، نعتبر الشكل $\omega - \partial\theta = \varphi$ إن معامله امام dx^n يساوي $\frac{\partial\theta}{\partial x^n} - \omega_1 \equiv 0$. بفضل الشرط $0 = \partial\omega$ نجد $\partial\varphi = \partial^2\theta - \partial\omega = 0$ وبالتالي فإن معاملات الشكل φ لا تحوي x^n حسب التواطئة ب. نضع $x^n = 0$ ، حينئذ يأتي من الشرط الابتدائي (6)، أن:

$$\varphi = (\partial\theta - \omega)\,|_{x^n=0} = dx^n \wedge \frac{\partial\theta}{\partial x^n}\Big|_{x^n=0} + \\ + \partial_0\theta\,|_{x^n=0} - \omega\,|_{x^n=0} = \partial_0\theta_0 - \omega_0 = 0.$$

إذن $\varphi \equiv 0$ بجوار النقطة O والشكل المنشأ يحقق المعادلة $\omega = \partial\theta$ وهو المطلوب.

كنا وجدنا الشكل θ ضمن جملة معطاة من الاحداثيات. إنه يمكننا تعريفة في أية جملة احداثيات اخرى حسب القاعدة الواردة في 12.7 ـ ج. ينبغي ان نثبت ان المساواة $\omega = \partial\theta$ محققة ضمن كل جملة احداثيات. لكن الشكل θ اصبح شكلا تفاضليا لا متغيرا وعليه فإن تفاضليته هي الاخرى لا تتعلق بجملة الاحداثيات حسب 22.7 ـ ب. إذن فإن المساواة $\omega = \partial\theta$ المحصل عليها في جملة الاحداثيات الاولى محققة في كل جملة احداثيات احرى، وبذلك ينتهي البرهان.

52.7 . تطبيق على التحليل الشعاعي:

أ . لنتذكر العمليات التفاضلية الرئيسية للتحليل الشعاعي التقليدي في الفضاء الثلاثي البعد R_3 . نصل ضمن جملة احداثيات متعامدة ومتجانسة x^1, x^2, x^3 ، كل حقل سلمي $\varphi(x)$ بالحقل الشعاعي للتدرج:

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right).$$

نصل كل حقل شعاعي $W = (W_1, W_2, W_3)$ بالحقل الشعاعي للدوار (42.4 ـ د):

$$\operatorname{rot} W = \left(\frac{\partial W_2}{\partial x^3} - \frac{\partial W_3}{\partial x^2}, \frac{\partial W_3}{\partial x^1} - \frac{\partial W_1}{\partial x^3}, \frac{\partial W_1}{\partial x^2} - \frac{\partial W_2}{\partial x^1} \right)$$

وبالحقل السلمي للتفرق (51.4):

$$\operatorname{div} W = \frac{\partial W_1}{\partial x^1} + \frac{\partial W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial W_3}{\partial x^3}.$$

يمكن اعتبار كل هذه التعاريف كحالات خاصة من تعريف تفاضلية شكل تفاضلي وهذا حتى في الفضاء ذي البعد n . وهكذا، إذا فسرنا الحقل السلمي $\varphi(x)$ على أنه O ـ شكل $\varphi(x)$ فإن تفاضليته $\partial\varphi(x)$ هي الـ 1 ـ شكل $\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i$ (32.7 ـ أ) الذي يمكن وصله بالفضاء الشعاعي $\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}\right)$. إذا وصلنا الحقل الشعاعي $W = (W_1, \ldots, W_n)$ بالـ 1 ـ شكل $\omega = \sum_i W_i(x)\, dx^i$ فإن لدينا حسب 32.7 ـ ب:

$$\partial \omega = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial W_\beta(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial W_\alpha(x)}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta;$$

إن لهذا الشكل، من اجل $n = 3$ ، ثلاث مركبات اساسية تطابقة مركبات الشعاع rot W. وإذا وصلنا نفس الحقل الشعاعي $W = (W_1, \ldots, W_n)$ بالـ (n−1) ـ شكل

$$\zeta = \sum_j W_j(x)\, (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

(حيث يشير الرمز ⌢ الى أن العامل الموافق له محذوف) فإننا نجد حسب 32.7 ـ جـ:

$$\partial\zeta = \sum_j \frac{\partial W_j(x)}{\partial x^j} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

وهذا يوافق الحقل السلمي $\operatorname{div} W$.

نستطيع الآن ان نرمز للمساواة $\partial^2\varphi = 0$ ، من اجل الحقل السلمي φ ، بـ $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. اما المساواة $\partial^2\omega = 0$ ، من اجل الحقل الشعاعي $W(x)$ في الفضاء R_3 فيمكن أن نرمز لها بـ $\operatorname{div}\operatorname{rot} W(x) = 0$.

ب. يسمى كل حقل شعاعي $f = \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ المساوي لتدرج حقل سلمي $\theta(x)$ **حقل كمون** (12.4 ـ ب) ويسمى التابع $\theta(x)$ **كمون الحقل** f. تعطي نظرية بوانكري:

نتيجة. إذا حقق 1 ـ شكل $f = \sum_i f_i(x)\, dx^i$ في ساحة G من الفضاء R_n الشرط:

$$\partial f = \sum_i \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0$$

أو، والقولان متكافئان (32.7 ـ ب):

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

فإن كل نقطة $x_0 \in G$ تقبل جوارا يكون فيه الحقل $f(x)$ كمونيا، أي انه يوجد فيه حقل سلمي $\theta(x)$ بحيث $f = \operatorname{grad}\theta$ أو، والقولان متكافئان:

$$f_i(x) = \frac{\partial\theta(x)}{\partial x^i}.$$

كنا رأينا هذه النتيجة في 12.4 ـ د حيث تمخضت عن نظرية فروبينيوس.

ج. لنعالج (n-1)ـ شكلا:

$$\omega = \sum_j (-1)^{j-1} f_j(x)\, dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n$$

تفرقة:

$$\operatorname{div}\omega \equiv \partial\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

إذا وجدنا (n-2) شكل θ بحيث $\partial\theta = \omega$ فإن $\operatorname{div}\omega = 0$ ، مع العلم أن القضية العكسية قائمة هي الاخرى (محليا على الاقل) حسب نظرية بوانكري. من اجل n=3 ، يمثل الـ (n-2) - شكل θ 1 - شكلا $\sum_{j=1}^{3} \theta_i(x) dx^i$ أو حقلا شعاعيا ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) ، مع العلم أن $\partial\theta$ موصول بالحقل الشعاعي θ . نقول عن حقل شعاعي $W = (W_1, W_2, W_3)$ يمثل دوار حقل شعاعي $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ انه حقل كموني شعاعياً ويسمى θ كمونا شعاعيا للحقل W (34. 4 - ب).

نستخلص من نظرية بوانكري ما يلي:

نتيجة. إذا حقق حقل شعاعي $W = (W_1, W_2, W_3)$ في ساحة G من الفضاء R_3 الشرط:

$$\operatorname{div} W = \frac{\partial W_1}{\partial x^1} + \frac{\partial W_2}{\partial x^2} + \frac{\partial W_3}{\partial x^3} = 0,$$

فإن كل نقطة $M \in G$ تقبل جوارا يكون فيه الحقل W كمونيا شعاعيا ، أي يوجد فيه حقل شعاعي θ بحيث $W = \operatorname{rot}\theta$ أو ، والقولان متكافئان:

$$W_1 = \frac{\partial\theta_3}{\partial x^2} - \frac{\partial\theta_2}{\partial x^3}, \quad W_2 = \frac{\partial\theta_1}{\partial x^3} - \frac{\partial\theta_3}{\partial x^1}, \quad W_3 = \frac{\partial\theta_2}{\partial x^1} - \frac{\partial\theta^1}{\partial x_2}.$$

إننا ألفنا هذه النتيجة أيضا (66. 4) الواقع أن فكرة الانشاء الواردة في 66. 4 ، المعممة تعميما لائقا ، هي التي أدت الى برهان نظرية بوانكري.

§ 3. 7 . نظريات تكاملية

13. 7 . مكاملة الاشكال التفاضلية:

أ . نرمز بـ I^k للمكعب الوحدة في الفضاء الاقليدي R_k ذي البعد k ، المعين ضمن الاحداثيات المتعامدة والمتجانسة $u^1, \ldots, u^k$ بالمتراجحات:

$$0 \leqslant u_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant u_k \leqslant 1.$$

يوجد، من اجل تابع مستمر $f(u)$ في المكعب I^k تكامل ريماني مضاعف k مرة (51.3 ـ ب):

$$\int_{I^k} f(u)\,du = \lim_{d(\Pi)\to 0} \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\,|\Delta^j u|$$

حيث يرمز $\Pi = \{\Delta^j u\}$ كالمعتاد لتجزئة للمكعب I^k الى بلاطات $\Delta^j u,\ j = 1, \ldots, N$ ؛ ويرمز $|\Delta^j u|$ لحجم البلاطة $\Delta^j u$ ، اما $d(\Pi)$ فهو اكبر اقطار البلاطات $\Delta^j u$ في التجزئة Π ، ويرمز ξ_j لنقطة في البلاطة $\Delta^j u$. نستطيع دائما افتراض ان البلاطة $\Delta^j u.$ معينة بالاشعة $h_1, \ldots, h_k$ المنطلقة من نقطة مشتركة ξ_j . يتضح إذن أن الكمية $\sum f(\xi_j)\,|\Delta^j u|$ تساوي قيمة الشكل الخطي ضد التناظري $\omega(u;\, du^1, \ldots, du^k) = f(u)\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^k$ من اجل $u = \xi_j$ ، عند الاشعة $du^1 = h_1, \ldots, du^k = h_k$ (31.7 ـ ج). يؤدي ذلك الى تعريف طبيعي لتكامل الشكل k ـ الخطي ضد التناظري ω :

$$\int_{I^k} \omega \equiv \int_{I^k} f(u)\, du^1 \wedge \ldots \wedge du^k = \int_{I^k} f(u)\, du. \qquad (1)$$

من البديهي ان التكامل المحصل عليه من الشكل ω يتمتع بالخاصيات الخطية المعتادة لتكامل تابع عادي: إن تكامل مجموع شكلين يساوي مجموع تكاملات الحدود، ويمكن وضع كل عامل عددي خارج رمز الجمع.

ب. سنعرف في المستقبل (ر) تكامل شكل l ـ خطي ضد تناظري:

$$\omega = \sum_{(i)} f_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \qquad (2)$$

على بعض « الساحات المقبولة » في منوعة قابلة للمفاضلة أولية M_n بعدها n ؛ سنعرف تلك الساحات.

نقول عن مجموعة $S \subset M_n$ إنها k ـ سطح مقبول إذا تمكنا من

تمثيله بالمعادلات ذات الشكل:

$$x^1 = \varphi^1 (u^1, \ldots, u^k), \ldots, x^n = \varphi^n (u^1, \ldots, u^k), \quad (3)$$

حيث ان التوابع $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ معرفة ومستمرة وتقبل مشتقات أولى مستمرة في المكعب I^k . لانفرض ان التطبيق (3) تقابلي أو انه غير منحل (اي ان المصفوفة اليعقوبية $\frac{\partial (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^k)}$ لها المرتبة k حيثما كان). على وجه الخصوص فقد يمثل I- سطح مقبول نقطة أو سطح بدون زاوية، مثال ذلك التوابع فقد يمثل k- سطح مقبول نقطة أو سطح بدون زاوية، مثال ذلك التوابع

$$x^1 = u^1 \cos 2\pi u^2,\ x^2 = u^1 \sin 2\pi u^2,\ x^3 = \ldots = x^n = 0$$

التي تطبق المربع I^2 على قرص من الفضاء R_n بحيث ان القرص 2 - سطح مقبول. نلاحظ ايضا أن التعريف سطح مقبول في M_n معنى مطلقا لا يتعلق باختيار الاحداثيات في M_n .

ج. نشير الى ان السطح المقبول ليس فحسب كائنا هندسيا في المنوعة M_n بل هو أيضا جملة المعادلات (3) التي تعينه. نحن مضطرون الآن الى اعتبار سطح S ممثل بالمعادلات من النمط (3) ونفس السطح (بالمفهوم الهندسي) S' الممثل بمعادلات أخرى من النمط (3) كسطحين مختلفين. وهكذا فإن المجال $x^1 = u,\ x^2 = u,\ 0 \leqslant u \leqslant 1$ على المستوى R_2 ليس هو المجال على نفس المستوى الممثل بالمعادلتين $x^1 = v^2 + v - 1$ ، $x^2 = v^2 + v - 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1$. من جهة أخرى. يبدو من غير المعقول ان نحتفظ بهذا الاختلاف الذي لا يلعب دورا رئيسيا:

إن ما يهمنا هنا هو دراسة الخاصيات الهندسية. ينبغي أن نحدد الحالة التي يتعلق الامر فيها «بنفس السطح». إن السبب

الاول في اعتبار سطحين ممثلين بمعادلات من النمط (3) ومتطابقين بصفتهما محلين هندسيين من نقاط في M_n كسطح واحد سبب غير لائق ذلك ان الانتقال من جملة معادلات من النمط (3) الى جملة اخرى بواسطة تحويل مرن للإحداثيات في المكعب I^k ، غير مضمون لحد الساعة بتطابق المحلين الهندسيين. لذا سنتبنى تعريفا ثابتا «لتطابق» أو «لتكافؤ» (ـ وهذا اللفظ أحسن من الاول ـ) سطحين مقبولين:

نقول عن سطح S ممثل بالمعادلات (3) أو باختصار $S = \{x \in M_n : x = \varphi(u), u \in I^k\}$ انه يكافىء سطحا $\tilde{S} = \{x \in M_n : x = \psi(v), v \in I^k\}$ (نرمز لذلك بـ $S \sim \tilde{S}$) إذا وجد «تفاتشاكل» (أي تطبيق تقابلي مستمر وقابل للإشتقاق وكذا تابعه العكسي) من المكعب I^k على نفسه $v=v(u)$ بحيث $\varphi(u) = \psi(v(u))$ وكان يعقوبي التطبيق $v(u)$ موجباً.

بفضل التعريف فإن علاقة التكافؤ علاقة انعكاسية (S يكافىء نفسه) ومتناظرة (إذا تكافأ S وَ $\tilde{S}$ فإن $\tilde{S}$ يكافىء S) ومتعدية (أو انتقالية) (إذا تكافأ S وَ $\tilde{S}$ وتكافأ $\tilde{S}$ وَ $\tilde{\tilde{S}}$ فإن S يكافيء $\tilde{\tilde{S}}$) ويمكن تصنيف كل k- السطوح المقبولة الى صفوف غير متقاطعة مثنى مثنى من k- سطوح متكافئة. إن المجالين المعتبرين اعلاه على المستوى R_2: $x^1 = u, x^2 = u$، $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $x^1 = v^2 + v - 1, x^2 = v^2 + v - 1, 0 \leqslant v \leqslant 1$ متكافئان، اما المجالان $x^1 = u, x^2 = u, 0 \leqslant u \leqslant 1$ وَ $x^1 = v^3$، $x^2 = v^3, 0 \leqslant v \leqslant 1$ مثلا فليسا متكافئين لأن لدينا في الحالة الاخيرة $u = v^3$ ، وهذا لا يمثل تفاتشاكل للمجال I^1 (إذ أن التطبيق العكسي ليس قابلا للإشتقاق حيثما كان).

علينا أيضا اثبات بأن لتعريف التكافؤ معنى مطلقا على

المنوعة M_n أي انه لا يتعلق بجملة الاحداثيات المقبولة في M_n .

ليكن $S = \{x \in M_n : x = \varphi(u), u \in I^k\}$ و $\bar{S} = \{x \in M_n : x = \psi(v), v \in I^k\}$ سطحين متكافئين ضمن الاحداثيات $x = (x^1, \ldots, x^n)$، ولتكن $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ جملة أخرى من الاحداثيات المقبولة. يمكن وضع المعادلات $x^i = \varphi^i(u)$ على الشكل: $x^{i'} = x^{i'}[\varphi^1(u), \ldots, \varphi^n(u)]$ والمعادلات $x^i = \psi^i(v)$ على الشكل $x^{i'} = x^{i'}[\psi^1(v), \ldots, \psi^n(v)]$ تقبل جملتا التوابع $\varphi^{i'}(u)$ و $\psi^{i'}(v)$ هي الاخرى مشتقات أولى مستمرة. زيادة على ذلك لدينا من اجل $v = v(u)$:

$$\psi^{i'}(v) = x^{i'}[\psi^1(v), \ldots, \psi^n(v)] = x^{i'}[\varphi^1(u), \ldots, \varphi^n(u)] = \varphi^{i'}(u)$$

حيث يظل السطحان S و $\bar{S}$ متكافئين ضمن الاحداثيات الجديدة.

د . نستخدم الى جانب تعريف تكافؤ k- سطحين $S = \{x \in M_n : x = \varphi(u), u \in I^k\}$ و $\bar{S} = \{x \in M_n : x = \psi(v), v \in I^k\}$ تعريف ضد تكافئهما الذي يختلف عن التعريف السابق بكون التفاتشاكل الوارد فيه $v = v(u)$ له يعقوبي سالب. إن علاقة ضد التكافؤ متناظرة لكنها غير متعدية لأن ضد تكافؤ S و $\bar{S}$ من جهة و $\bar{S}$ و $\bar{\bar{S}}$ من جهة أخرى لا يؤدي الى تكافؤ S و $\bar{\bar{S}}$. يصبح ضد التكافؤ هو التكافؤ بعد تفاتشاكل اضافي بيعقوبي سالب للمكعب I^k ، مثلا التفاتشاكل الذي يحوّل u^1 الى $1 - u^1$ بدون ان تتغير الاحداثيات الاخرى.

ر . ننتقل الى تعريف تكامل شكل k- خطي ضد تناظري ω (2) على k- سطح مقبول $S \subset M_n$ (3).

نضع :

$$(4)\quad \int\limits_S \omega = \int\limits_S \sum_{(i)} f_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \int\limits_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \sum_{j_1=1}^{k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}} du^{j_1} \wedge \ldots \wedge \sum_{j_k=1}^{k} \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{j_k}} du^{j_k}.$$

يؤدي اللا تغير الموتري للعبارة الواقعة تحت رمز الجمع الى استقلال تكامل جملة الاحداثيات في M_n

بتحويل الطرف الثاني في (4) نحصل على:

(5)

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \sum_{(j)} \varepsilon^{1 \ldots k}_{j_1 \ldots j_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial u^{j_k}} du^1 \wedge \ldots \wedge du^k =$$

$$= \int\limits_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial u^s} \right\| du^1 \wedge \ldots \wedge du^k =$$

$$= \int\limits_{I_k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial u^s} \right\| du^1 \ldots du^k$$

= 1,...,k ، r = 1,...,k (حيث
.(s

س . لنثبت ان قيمة التكامل المحصل عليه لا تتغير من الانتقال الى سطح S الى سطح مكافىء له $\tilde{S}$. ليكن u=u(v) تفاتشاكل من المكعب I^k الذي يحوّل التمثيل $x = \varphi(u)$ للسطح S الى التمثيل $x = \psi(v)$ للسطح $\tilde{S}$. بإستخدام قاعدة إشتقاق تابع مركب (33. 1 ـ ب)

$$\det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial u^s} \right\| = \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial v^q} \right\| \det \left\| \frac{\partial v^q}{\partial u^s} \right\| \qquad (r, s, q = 1, \ldots, k)$$

وقاعدة تبديل المتغيرات في تكامل مضاعف (85. 3 ـ أ):

$$\int\limits_{I^k} F(v)\, dv = \int\limits_{I^k} F(v(u)) \det \left\| \frac{\partial v^q}{\partial u^s} \right\| du,$$

التي تسمح بالانتقال في التكامل (5) من المتغيرات u الى المتغيرات v، فإننا نجد:

$$\int_S \omega = \int_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial u^s} \right\| du =$$

$$= \int_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\varphi(u)) \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial v^q} \right\| \det \left\| \frac{\partial v^q}{\partial u^s} \right\| du =$$

$$= \int_{I^k} \sum_{(i)} f_{(i)}(\psi(v)) \det \left\| \frac{\partial x^{i_r}}{\partial v^q} \right\| dv,$$

وهو المطلوب.

ص. من البديهي أن تكامل k- شكل ω على k- سطح مقبول S يتمتع بالخاصيات الخطية العادية لتكامل.

ط. إن التكامل لِـ k- شكل معطي x على k- سطح S لا يختلف عن تكامل نفس الشكل على سطح ضد مكافىء لِـ S إلاّ بإشارة.

7 . 23 . أمثلة.

أ. إن النقطة $x = \psi(0)$ الصورة للنقطة O التي تمثل المكعب I^0 هي بطبيعة الحال O- سطح مقبول في الفضاء M_n. ثم إن تكامل O- شكل $f(x)$ هو تعريفا العدد $f(\varphi(0))$

ب. يمثل خط موافق لجملة معادلات

$$x^1 = \varphi^1(u), \ldots, x^n = \varphi^n(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \tag{1}$$

عموما، 1 - سطحا مقبولا في الفضاء M_n. إن تكامل 1 - شكل $\omega = \sum_i f_i(x)\, dx^i$ على الـ 1 - سطح (1) هو التكامل المنحنه العادي (ي 19.9).

$$\int_L \omega = \int_L \sum_i f_i(x)\, dx^i = \int_0^1 \sum_{i=1}^n f_i(x(u)) \frac{d\varphi^i(u)}{du} du. \qquad (2)$$

إذا كان الفضاء M_n مزودا بمسافة ريمانية $g_{ij}(x)$ وكان المنحنى (1) غير منحل أي $0 < \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i(u)}{du}\right)^2$ فإننا نستطيع أن نعتبر عليه طول القوس s، $0<s<S$ كوسيط طبيعي، حينئذ يأخذ التكامل (2) الشكل:

$$\int_L \omega = \int_0^S \sum_{i=1}^n f_i(x(s)) \frac{dx^i}{ds} ds = \int_0^S (f_2 \tau)\, ds, \qquad (3)$$

حيث يرمز F للشعاع $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ ؛ وَ $\tau = \left(\frac{dx^1}{ds}, \ldots, \frac{dx^n}{ds}\right)$ يمثل شعاع الوحدة الماس للمنحنى L.

تسمى العبارة (3) في التحليل الشعاعي (في الفضاء R_n) تكامل الحقل الشعاعي على طول المنحنى L (12. 4).

ج. نعتبر أيضا تكامل (n-1)- شكل:

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad (4)$$

على (n-1)- سطح مقبول S معرف بالمعادلات ذات الشكل:

$$\left.\begin{array}{l} x^1 = \varphi^1(u_1, \ldots, u^{n-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = \varphi^n(u^1, \ldots, u^{n-1}), \end{array}\right\} \quad u \in I^{n-1}.$$

إن هذا التكامل يساوي

$$\int_S \omega = \int_{I^{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i(x(u)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^1}} & \cdots & \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} du^1 \ldots du^{n-1}.$$

أما المفهوم الموافق لذلك في التحليل الشعاعي فهو تدفق الحقل الشعاعي F عبر السطح S (21.4 ـ أ). حتى نقتنع بذلك نستدل كما يلي. نفرض انه يوجد في الفضاء الاقليدي R_n ، (n-1) شعاعا لها ضمن اساس متعامد ومتجانس $e_1, \ldots, e_n$، الاحداثيات:

$$(\xi^1_1, \ldots, \xi^n_1) = x_1, \ldots, (\xi^1_{n-1}, \ldots, \xi^n_{n-1}) = x_{n-1}.$$

لنتذكر بان (26.3 ـ ج) العبارة

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}] = \begin{vmatrix} e_1 \xi^1_1 & \ldots & \xi^1_{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ e_n \xi^n_1 & \ldots & \xi^n_{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} e_i \begin{vmatrix} \xi^1_1 & \ldots & \xi^1_{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \widehat{\xi^i_1} & \ldots & \widehat{\xi^i_{n-1}} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \xi^n_1 & \ldots & \xi^n_{n-1} \end{vmatrix}$$

تسمى جداء شعاعيا للأشعة $x_1, \ldots, x_n$. نلاحظ في الفضاء الاقليدي المزود بالجداء السلمي

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} \xi^i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta^j e_j) = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i, \eta^i),$$

إن الشعاع $[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ عمودي على كل من الاشعة x ، وان طوله يمثل الحجم ذي البعد (n-1) لمتوازي الاضلاع المنشأ على هذه الاشعة.

نفرض أن الـ (n-1)ـ سطح المقبول $S \in M_n$ غير منحل أي أن مرتبة المصفوفة اليعقوبية $\frac{\partial (x^1, \ldots, x^n)}{\partial (u^1, \ldots, u^{n-1})}$ تساوي عند كل نقطة

العدد (n-1). عندئذ تكون الاشعة:

$$dx_1 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^1}\right) du^1, \ldots, dx_{n-1} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}}, \ldots, \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}}\right) du^{n-1}$$

مستقلة خطيا. إنها تقع في المستوى الماس للسطح S (عند

النقطة المعطاة) ويمكن تعيين الشعاع الناظم N عند هذه النقطة بوصفه يمثل الجداء الشعاعي لتلك الاشعة:

$$N = [\underset{1}{dx}, \ldots, \underset{n-1}{dx}] = \begin{vmatrix} e_1 & \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ e_n & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} du^1 \ldots du^{n-1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} e_i \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^1}} & \cdots & \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} du^1 \ldots du^{n-1}.$$

طبقا لذلك فإن الشعاع الناظم الواحدي، عند نفس النقطة، يأخذ الشكل:

$$m = \frac{N}{|N|}.$$

العنصر الاقليدي للسطح S هو الحجم ds لمتوازي الوجوه ذي البعد (n−1) المنشأ على الأشعة $\underset{1}{dx}, \ldots, \underset{n-1}{dx}$ (راجع 26.3 ـ جـ) أي طول الشعاع N. اما تدفق الحقل الشعاعي $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ عبر السطح S في الفضاء الريماني M_n فهو تعريفا التكامل:

$$(5) \int_S (f, m)\, dS = \int_{I^{n-1}} \left(f, \frac{N}{|N|}\right) dS =$$

$$= \int_{I^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x(u)) (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^{n-1}} \\ \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^1}} & \cdots & \widehat{\frac{\partial x^i}{\partial u^{n-1}}} \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix} du^1 \ldots du^{n-1}.$$

نرى ان تكامل (n-1) شكل ω (4) على (n-1) - سطح S في فضاء ريماني M_n مطابق لتدفق الحقل F(x) عبر هذا السطح، وهو ما ذهبنا اليه.

كنا قدمنا استدلالاتنا في الحالة التي يكون فيها التطبيق $x=x(u)$ غير منحل لكن الطرف الاول من المساواة (5) له معنى مستقل عن التطبيق $x=x(u)$ عندما يكون السطح S مرنا بتقطع أي انه يمكن تفكيكه الى عدد منته من الاجزاء بحيث يقبل كل جزء توسيطاً $x=x(u)$ بدون انحلال. إن للطرف الثاني من (5) معناه المستقل، حتى من اجل تطبيق $x=x(u)$ منحل. لنثبت من اجل سطح S مرن بتقطع ممثل بتطبيق $x=x(u)\ (I^{n-1}\to S)$ لا يمكن ان يكون منحلا إلّا على وجوه المكعب I^{n-1}. ان المساواة (5) تبقى قائمة. بالفعل فإن هذه المساواة قائمة، ضمن الافتراضات الواردة، من اجل المكعب $I_{(\varepsilon)}^{n-1}$ الذي له نفس مركز I^{n-1} واضلاع طولها $1-\varepsilon$ أما صورته فهي $x(I_{(\varepsilon)}^{n-1})=S_{(\varepsilon)}$ (تعيّن التكاملات الموافقة له بدون صعوبة)؛ عندما ننتقل الى النهاية بجعل $\varepsilon\to 0$ فإننا نصل الى النتيجة المطلوبة.

7 .33 . المسلسلات والحافات.

أ . يربط دستور ستوكس - بوانكري الذي سنثبته في 7 .83 تكامل (k+1)- شكل $\partial\omega$ على (k+1)- سطح مقبول في M_n بتكامل الشكل ω نفسه على حافة هذا السطح مثله مثل الدستور التقليدي لنيوتن - ليبنيتز

$$\int_a^b df(x)=f(b)-f(a), \qquad (1)$$

الذي يربط تكامل تفاضلية تابع $f(x)$ على مجال بقيم هذا التابع على حافة المجال.

علينا أن نعرف ما هي حافة (k+1)ـ سطح S أولا فإن هذه الحافة تمثل مجموعة kـ سطوح نستنتج توسيطاتها، إستناداً الى قواعد معينة، من توسيط السطح S. يعيّن ذلك، حسب 13.7 ـ ر، تكامل الشكل ω على كل من kـ السطوح هذه. ثانيا، حتى نشكل تكامل الشكل ω على كل حافة فإننا نزوّد بعض التكاملات المذكورة بالاشارة + وبعض التكاملات الاخرى بالاشارة − (كما هو الحال في الدستور (1)). يتمثل التعريف السليم للحافة في صياغة قاعدة تعيين اجزائها ذات البعد k وقاعدة خاصة بالاشارات.

نورد في اطار ما قلناه تعريف مسلسلة. نسمي **مسلسلة** وعلى وجه التحديد kـ مسلسلة كل مجموع شكلي يكتب على النحو $c=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i S_i$ حيث ترمز $S_1, \ldots, S_m$ لِـ lـ سطوح مقبولة في M_n وترمز $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ لاعداد مساوية لِـ 0 أو 1+ أو 1−.

الواقع ان مسلسلة c تعين طريقة مكاملة أي kـ شكل X:

$$\int_c \omega=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\int_{S_i}\omega. \qquad (2)$$

تسمى العبارة (2) **تكامل الشكل** ω **على المسلسلة** d,

ب. نقول عن kـ مسلسلتين $c=\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i S_i$ وَ $c'=\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j S'_j$ إنهما **متكافئتان** إذا تحقق المساواة التالية من اجل كل kـ شكل ω مستمر على M_n:

$$\int_c \omega=\int_{c'}\omega. \qquad (3)$$

من الواضح ان كل مسلسلتين لا تختلفان الاّ بترتيب حدودهما مسلسلتان متكافئتان. ثم إذا استنتجت مسلسلة c' من

مسلسلة c باستبدال k- سطح S_i بـ k سطح $\tilde{S}_i$ مكافىء له (13.7 - ر) فإن المسلسلتين c وَ c' متكافئتان (13.7 - س)، لدينا نفس النتيجة إذا استنتجت c' من c باستبدال k- سطح S_i بـ k سطح ضد مكافىء له $\tilde{S}_i$ واستبدال المعامل ε_i الموافق لِـ S_i بـ ε_i (13.7 - ط).

ط. سوف نقدم تعريف حافة ليس من اجل k- السطوح المقبولة فحسب بل ايضا من اجل k - المسلسلات. نرمز لحافة مسلسلة d بـ ∂c .

نفرض في البداية ان c مكعب $I^k \subset R_n$. إن المكعب I^k k- سطح مقبول توسيطه هو:

$$x^1 = u^1, \ldots, x^k = u^k, \quad x^{k+1} = \ldots = x^n = 0,$$
$$0 \leqslant u^i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

نضع من اجل i=1,...,k:

$$I^k_{i,0} = \{x \in I^k : x^i = 0, \ 0 \leqslant x^j \leqslant 1, \ j = 1, \ \ldots, \ \hat{i}, \ \ldots, \ k\},$$
$$I^k_{i,1} = \{x \in I^k : x^i = 1, \ 0 \leqslant x^j \leqslant 1, \ j = 1, \ \ldots, \ \hat{i}, \ \ldots, \ k\}.$$

إن المجموعات $I^k_{i,0}$ وَ $I^k_{i,1}$ وجوه بعدها (k-1) من المكعب I^k . إنها (k-1)- سطوح مقبولة إذا وسطناها كما يلي:

$$I^k_{i,0} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ \ldots, \ x^{i-1} = u^{i-1}, \ x^i = 0, \ x^{i+1} = u^i, \ \ldots$$
$$\ldots, \ x^k = u^{k-1}, \ x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\},$$
$$I^k_{i,1} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ \ldots, \ x^{i-1} = u^{i-1}, \ x^i = 1, \ x^{i+1} = u^i, \ \ldots$$
$$\ldots, \ x^k = u^{k-1}, \ x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

نضع تعريفا:

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^{k} [(-1)^i I^k_{i,0} + (-1)^{i+1} I^k_{i,1}] \equiv \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^k_{i,\alpha}.$$

ليكن $x = x(\mathrm{u})$ تمثيلا وسيطيا لأي k ـ سطح مقبول S. نضع هنا:

$$\partial S = \partial\,(x\,(I^k)) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} x\,(I^k_{i,\,\alpha}).$$

أخيرا، من اجل كل k ـ مسلسلة $c = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j S_j,$ فإننا نضع:

$$\partial c = \sum_{j=1}^{m} a_j \partial S_j.$$

43. 7 . توطئة. إذا كان $c \sim \tilde{c}$ فإن $\partial c \sim \partial \tilde{c}.$.

البرهان. في البداية، ليكن d ـ l سطحا S توسيطه:

$$x^j = \varphi^j\,(u^1, \ldots, u^k), \quad j = 1, \ldots, n, \quad u \in I^k, \tag{1}$$

وليكن $\tilde{S} = \tilde{c}$ نفس السطح الموسط بـ:

$$x^j = \psi^j\,(v^1, \ldots, v^k), \quad j = 1, \ldots, n, \quad v \in I^k \tag{2}$$

حيث $(\ \psi\,(v) = \varphi\,(u\,(v))\ )$ وحيث ان التطبيق $u = u\,(v)$ أو

$$\begin{cases} u^1 = u^1\,(v^1, \ldots, v^k), \\ u^k = u^k\,(v^1, \ldots, v^k) \end{cases}$$

تفاتشاكل للمكعب I^k بما أن التطبيق u=u(v) خطي إذا اعتبرنا جزءه الرئيسي، وغير منحل فإنه يحوّل كل نقطة داخلية في المكعب I^k الى نقطة داخلية وبالتالي كل نقطة على الحافة الى نقطة على الحافة. عند تطبيق نفس الاستدلال على الوجوه ذات البعد (k−1)، نرى أن التطبيق u=u(v) يحوّل كل نقطة داخلية من وجه الى نقطة داخلية من الوجه الموافق له ويحول كل وجه الى وجه آخر ثم إن التطبيق u(v) تقابلي ولذا فهو يحوّل وجوها غير متقاطعة الى وجوه غير متقاطعة، بعبارة أخرى يحوّل وجوها متقابلة الى وجوه متقابلة. نفرض مثلا أن سطحا $I^k_{i,\alpha}$ $(i = 1, \ldots, k; \alpha = 0, 1)$ يتحول بواسطة التطبيق u(v) الى سطح $I^k_{j,\beta}\ (j = 1, \ldots, k;\ \beta = 0,\ 1)$:

$$\left.\begin{aligned} u^1 &= u^1\,(v^1, \ldots, v^{i-1}, \alpha, v^{i+1}, \ldots, v^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta &= u^j\,(v^1, \ldots, v^{i-1}, \alpha, v^{i+1}, \ldots, v^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^k &= u^k\,(v^1, \ldots, v^{i-1}, \alpha, v^{i+1}, \ldots, v^k). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

لنثبت ان هذا التطبيق $u(I^k_{i,\alpha}) = I^k_{j,\beta}$ تفاتشاكل (أي أن: $\frac{\partial(u^1, .., \beta, .., u^k)}{\partial(v^1, .., \alpha, .., v^k)} > 0$) أو ضد تفاتشاكل (أي $0 > \frac{\partial(u^1, .., \beta, .. u^k)}{\partial(v^1, ..., \alpha, .., v^k)}$) وذلك حسب زوجية أو فردية العدد $i + j + \alpha + \beta$ على التوالي.

بالفعل فإنه ينتج من (2) أن:

$$\frac{\partial u^j(v^1, \dots, v^{i-1}, \alpha, v^{i+1}, \dots, v^k)}{\partial v^\nu} = 0 \quad \text{pour } \nu \neq i.$$

انطلاقا من المتراجحة

$$0 < \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u^j(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^j(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & \frac{\partial u^j(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u^k(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^k(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & \frac{\partial u^k(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^k} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & \frac{\partial u^1(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{\partial u^j(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u^k(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^k(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i} & \dots & \frac{\partial u^k(v_1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^k} \end{vmatrix},$$

ننشر المعين الاخير وفق عناصر السطر ذي الرتبة j ونلاحظ ان الكمية $\frac{\partial u^j(v^1, \dots, \alpha, \dots, v^k)}{\partial v^i}$ والاصغري:

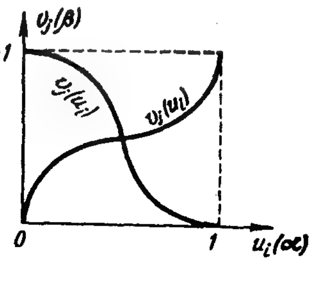
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial v^{i-1}} & \frac{\partial u^1}{\partial v^{i+1}} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial v^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u^{j-1}}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^{j-1}}{\partial v^{i-1}} & \frac{\partial u^{j-1}}{\partial v^{i+1}} & \dots & \frac{\partial u^{j-1}}{\partial v^k} \\ \frac{\partial u^{j+1}}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^{j+1}}{\partial v^{i-1}} & \frac{\partial u^{j+1}}{\partial v^{i+1}} & \dots & \frac{\partial u^{j+1}}{\partial v^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u^k}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^k}{\partial v^{i-1}} & \frac{\partial u^k}{\partial v^{i+1}} & \dots & \frac{\partial u^k}{\partial v^k} \end{vmatrix} \quad (4)$$

غير منعدمين، وان الاصغري (4) له الاشارة:

$$(-1)^{i+j} \operatorname{sign} \frac{\partial u^j (v^1, \ldots, \alpha, \ldots, v^k)}{\partial v^i},$$

وذلك مهما كانت القيم $v^1, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^k$.

إلاّ اننا إذا تناولنا الامكانيات المبينة في الرسم 3.7 ـ 1 فإننا نرى بأن الكمية $\frac{\partial u^j(v^1, \ldots, \alpha, \ldots, v^k)}{\partial v^i}$ موجبة في حالة $\alpha = \beta = 0$ أو $\alpha = \beta = 1$ وسالبة في حالة $\alpha = 0, \beta = 1$ أو $\alpha = 1, \beta = 0$. إذن فإن إشارة التابع: $\frac{\partial u^j (v^1 \ldots, \alpha, \ldots, v^k)}{\partial v^i}$ هي $(-1)^{\alpha+\beta}$



الرسم 3.7 ـ 1

ينتج عن ذلك أن التطبيق من الوجه $I^k_{i,\alpha}$ في الوجه $I^k_{j,\beta}$ بواسطة الدستور (1) تفاتشاكل من أجل $j + i + \beta + \alpha$ زوجي وضد تفاتشاكل من اجل $j + i + \beta + \alpha$ فردي.

إذن فإن k ـ السطحين $(-1)^{\alpha+\beta+i+j}\varphi(I^k_{i,\alpha})$ و $\psi(u(I^k_{i,\alpha})) = \psi(I^k_{j,\beta})$ متكافئان.

نجد في الاخير:

$$\partial S = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \varphi (I^k_{i,\alpha}),$$

$$\partial \tilde{S} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\beta=0}^{1} (-1)^{j+\beta} \psi (I^k_{j,\beta}) \sim \sum_{j=1}^{k} \sum_{\beta=0}^{1} (-1)^{j+\beta} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} \varphi (I^k_{i,\alpha}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\beta=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \varphi (I^k_{i,\alpha}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \varphi (I^k_{i,\alpha}) = \partial S,$$

إذن $\partial\tilde{S} \sim \partial S$.

ينتج عن ذلك، حسب تعريف تكافؤ مسلسلتين c وَ $\tilde{c}$، تكافؤ ∂c وَ $\partial\tilde{c}$ ، وهو ما يثبت التوطئة.

نضع من اجل 0ـ مسلسلة، تمثل مجموعا جبريا منتهيا من النقاط المنعزلة، معاملاتها صحيحة، نضع تعريفاً: $\partial c = 0$.

53.7 . تشبه التوطئة التالية التوطئة 42.7 ـ أ.

توطئة. لدينا من اجل كل kـ مسلسلة c: $\partial^2 c \equiv \partial(\partial c) \equiv 0$

يكفي معالجة الحالات 2⩽k وَ $c = S = I^k$. لدينا عندئذ:

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I^k_{i,\alpha},$$

$$\partial^2 I^k \equiv \partial(\partial I^k) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \partial I^k_{i,\alpha}.$$

يشير الرمز $I^k_{i,\alpha}$ الى (k−1)ـ السطح المزود بالتوسيط:

$$I^k_{i,\alpha} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ldots, x^{i-1} = u^{i-1}, x^i = \\ = \alpha, x^{i+1} = u^i, \ldots, x^k = u^{k-1}, x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}$$

لدينا حسب القاعدة العامة:

$$\partial I^k_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{k} (-1)^{j+\beta} (I^k_{i,\alpha})_{j,\beta}$$

حيث يمثل $(I^k_{i,\alpha})_{j,\beta}$ (k−2)ـ سطحا بالتوسيط:

$$(I^k_{i,\alpha})_{j,\beta} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ldots, x^j = \beta, x^{j+1} = u^j, \ldots, x^{i-1} = u^{i-2}, \\ x^i = \alpha, \ldots, x^k = u^{k-2}, \ldots, x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}, \quad (1)$$

وهذا في الحالة التي يكون فيها i>j، وبالتوسيط:

$$(I^k_{i,\alpha})_{j,\beta} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ldots, x^i = \alpha, x^{i+1} = u^i, \ldots, x^{j+1} = \beta, \\ x^{j+2} = u^j, \ldots, x^k = u^{k-2}, x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}, \quad (2)$$

وهذا في الحالة التي يكون فيها i⩽j. وهكذا فإن:

$$(3) \qquad \partial^2 I^k = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (I^k_{i,\alpha})_{j,\beta}.$$

نثبّت في هذا المجموع الحد $(I^k_{i,\alpha})_{j,\beta}$ حيث α, β, i, j معطاة وَ $i > j$. إنه من الشكل (1) نعالج بعد ذلك الحد $(I^k_{j,\beta})_{i-1,\alpha}$. بما ان لدينا فيه $j \leqslant i-1$ فإن عبارته معطاة بالدستور (2):

$$(I^k_{j+1,\alpha})_{i,\beta} = \{x \in R_n : x^1 = u^1, \ldots, x^j = \beta, \ldots x^i = \\ = \alpha, \ldots, x^k = u^{k-2}, x^{k+1} = \ldots = x^n = 0\}.$$

نرى أن $(I^k_{j,\beta})_{i,\alpha} = (I^k_{i,\alpha})_{j,\beta}$. وهكذا فإن كل حد من المجموع (3) الذي دليله اللاتيني الثاني أصغر من الاول ينعدم أثناء الجمت مع الحد الآخر الذي دليله اللاتيني الثاني أكبر من الاول أو يساويه. نجد في الختام ان كل المجموع (3) منعدم، وهو المطلوب.

تسمى مسلسلة c ذات حافة منعدمة دورة (أو دور).

تبين التوطئة السابقة أن كل حافة تمثل دورة.

63. 7 . نظرية. ليكن ω (n−1)ـ شكلا قابلا للمفاضلة في المكعب $I^n \subset R^n$. عندئذ:

$$(1) \qquad \int_{I^n} \partial\omega = \int_{\partial I^n} \omega.$$

البرهان. يمكن بدون المساس بعمومية المسألة اعتبار الشكل:

$$(2) \qquad \omega = f(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

لدينا:

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^i \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

نجد عند الانتقال الى تكامل مكرر أن:

$$(3) \quad \int_{I^n} \partial\omega = (-1)^{i-1} \int_{I^n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^{n-1}} \left\{ \int_0^1 \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i \right\} dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{I^{n-1}} [f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \ldots, x^n) -$$
$$- f(x^1, \ldots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \ldots, x^n)]\, dx^1 \ldots dx^{i-1} dx^{i+1} \ldots dx^n.$$

إلا أننا نعلم أن:

$$\partial I^n = \sum_{j=1}^{n} [(-1)^j I^n_{j,\,0} + (-1)^{j+1} I^n_{j,\,1}],$$

حيث يشير $I^n_{j,\,\alpha}$ الى (n-1)ـ السطح بالتوسيط:

$$x^1 = u^1, \ \ldots, \ x^j = \alpha, \ \ldots, \ x^n = u^{n-1} \quad (\alpha = 0,\ 1). \tag{4}$$

وبالتالي:

$$\int_{\partial I^n} \omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \int_{I^n_{j,\,0}} \omega + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \int_{I^n_{j,\,1}} \omega.$$

يتم ردّ هذه التكاملات الى تكاملات عادة مضاعفة (n-1) مرة بواسطة التمثيل (4). بما أن لدينا في الحد ذي الرتبة j $dx^j = 0$ فإنه لا يبقى في المجموع سوى الحد الموافق بـ $j = i$ لأن العبارة الواقعة تحت رمز المكاملة قد لا تنعدم في هذه الحالة وهي منعدمة فيما سواها. وهكذا:

$$\int_{\partial I^n} \omega = (-1)^i \int_{I^n_{i,\,0}} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^n)\, dx +$$
$$+ (-1)^{i+1} \int_{I^n_{i,\,1}} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^n)\, dx = \int_{I^n} \partial\omega \tag{5}$$

وبذلك ينتهي برهان النظرية.

الواقع ان الدستور (5) ليس سوى دستور أوستروغرادسكي 31.4 (5) بدلالة الاشكال التفاضلية من اجل الحالة التي تكون فيها ساحة المكاملة مكعبا بعده n.

73.7 . توطئة. من أجل kـ شكل تفاضلي $\omega(x)$، فإن العملية ∂ وعملية الانتقال الى الاحداثيات الجديدة $x = x(u)$ $(u = (u^1, \ldots, u^m))$ تتبادلان فيما بينهما: يمكننا في البداية اجرأ تبديل للمتغيرات ثم القيام بالعملية ∂

(بالنسبة للمتغيرات الجديدة).

البرهان. نفرض في البداية ان الشكل ω تابع (0ـ شكل) $f(x)$. لدينا في هذه الحالة:

$$\partial f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i,$$

$$\partial f(x(u)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(u))}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j.$$

إلاّ أن اجراء عملية المفاضلة بعد تبديل المتغيرات يجعلنا نحصل على:

$$\partial f(x(u)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(u))}{\partial u^j} du^j = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x(u))}{\partial x^i} \frac{\partial x^i(u)}{\partial u^j} \right\} du^j,$$

وهذا يطابق العبارة السابقة. وهكذا فإن القضية، من اجل 0ـ الاشكال، قائمة. نواصل بعد ذلك بالتدريج: نفرض ان التوطئة قائمة من اجل kـ شكل ونبرهن عليها من اجل كل (k+1)ـ شكل. يكفي اعتبار (k+1)ـ شكل $\omega \wedge dx^s$ حيث ω kـ شكل.

لدينا عندئذ، حسب 7 .22 ـ ص:

$$\partial(\omega \wedge dx^s) = d\omega \wedge dx^s, \tag{1}$$

$$\partial(\omega \wedge dx^s)[u] = \partial\omega[u] \wedge \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^s}{\partial u^j} du^j.$$

من جهة أخرى لدينا:

$$(\omega \wedge dx^s)[u] = \omega[u] \wedge dx^s[u],$$

وبما أن $\partial^2 = 0$ فإن المفاضلة بالنسبة للمتغيرات u وبمراعاة فرض التدريج نجد:

$$\partial[(\omega \wedge dx^s)[u]] = \partial(\omega[u]) \wedge dx^s[u] =$$

$$(\partial\omega(x))[u] \wedge \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^s}{\partial u^j} du^j. \tag{2}$$

بمقارنة (1) وَ (2) نرى أن التوطئة قائمة.

7 .83 . نظرية. (ستوكس ـ بوانكري) . ليكن ω (k−1)ـ شكلا قابلا

للمفاضلة في ساحة $G \subset M_n$ وَ c k ـ مسلسلة في G. لدينا عندئذ:

$$\int_{c} \partial\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

يكفي اجراء البرهان في الحالة التي تكون فيها المسلسلة c k ـ سطحا قابلا للمفاضلة S. ليكن $x = x(u)$ تمثيلا وسيطيا لِـ S حيث تتجول الوسيطات u ، كالمعتاد، في المكعب I^k طبقا للتعريف 13.7 ـ د لتكامل شكل وحسب التوطئة 73.7 ، فإن:

$$\int_{S} \partial\omega(x) = \int_{I^k} (\partial\omega(x))[u] = \int_{I^k} \partial[\omega(x(u))].$$

لكن:

$$\int_{\partial S} \omega(x) = \int_{\partial I^k} \omega(x(u)),$$

وتنتج النظرية من المساواة:

$$\int_{I^k} \partial[\omega(x(u))] = \int_{\partial I^k} \omega(x(u))$$

التي تأتي من النظرية 63.7 (من اجل n=1),

93.7 . حالات خاصة من نظرية ستوكس ـ بوانكري.

أ . k=1 . المسلسلة c هي في هذه الحالة 1 ـ مسلسلة. نفرض قصد الاختصار أن c يمثل خطا L أي الصورة $x = \varphi(u)$ للمجال $I^1 = \{u : 0 \leqslant u \leqslant 1\}$

$$L = \{x \in R_n : x^1 = \varphi^1(u), \ldots, x^n = \varphi^n(u)\},$$

حيث $\varphi^j(u)$ هي، كالمعتاد، توابع قابلة للإشتقاق باستمرار. إن حافة المجال I^1 مسلسلة مشكلة من نقطتين 0 وَ 1 أولاهما بالاشارة ـ وثانيتهما بالاشارة +. إذن حافة الخط مسلسلة من نقطتين $\varphi(0)$ — $\varphi(1)$. اما الشكل ω وهو O ـ شكل $\omega = f(x)$ وَ $\partial\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i$ نصل الى الدستور:

$$\int_{L} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i = f[\varphi(1)] - f[\varphi(0)]$$

الذي يمثل تعميا معروفا لدستور نيوتن ـ ليبنيتز الى التكاملات المنحنية.

ب. k=2. إن المسلسلة c هنا 2 ـ مسلسلة. نفرض قصد الاختصار أن c=S هي الصور بواسطة $x = \varphi(u)$ للمربع

$$I^2 = \{(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leqslant u^1 \leqslant 1 \; 0 \leqslant u^2 \leqslant 1\}$$

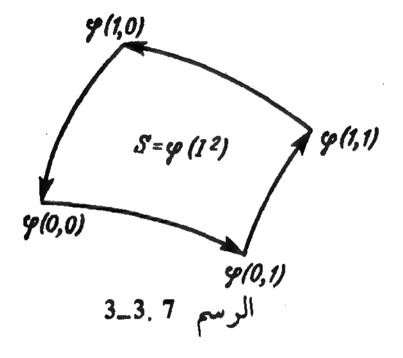
$$S = \{x \in R_n : x^1 = \varphi^1 (u^1, u^2), \dots, x^n = \varphi^n (u^1, u^2)\}.$$

إن حافة المربع I^2 هي المسلسلة $I^2_{2,0} + I^1_{1,1} - I^2_{2,1} - I^1_{1,0}$ تتمثل المكاملة على هذه المسلسلة في المكاملة على u^1 من اجل $u^2 = 0$ مع الاشارة + والمكاملة على u^2 من اجل $u^1 = 1$ مع الاشارة +، وعلى u^1 من اجل $u^2 = 1$ مع الاشارة −، وعلى u^2 من اجل $u^1 = 0$ مع الاشارة −، تمثل نتيجة هذه المكاملة التكامل على المحيط المغلق للمربع I^2 في الاتجاه الموجب (الرسم 3.7 ـ 2). مع الملاحظة ان للمكاملة على المسلسلة ∂S (الرسم 3.7 ـ 3) معني مماثلا. يمثل الشكل w هنا 1 ـ شكلا $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, dx^i$ يكون من اجله:

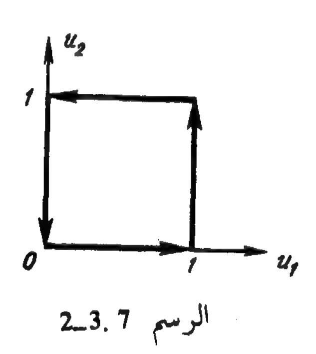
$$\partial\omega = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial x^\beta} \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta.$$

من اجل n=3، فاننا نستطيع صلة الشكل $\partial\omega$ بالحقل الشعاعي:

$$\operatorname{rot} f = \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^2}, \; \frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}, \; \frac{\partial f_1}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^1} \right\}.$$



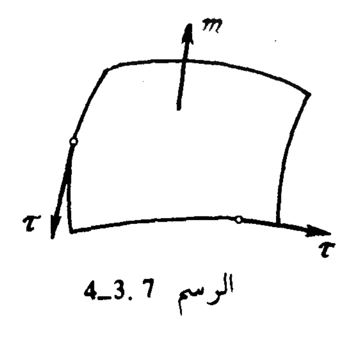
الرسم 3.7 ـ 3



الرسم 3.7 ـ 2

طبقاً لـ 23.7 ـ ج فإن تكامل الشكل $\partial\omega$ على السطح S هو تدفق الحقل الشعاعي rotF عبر هذا السطح. إن إتجاه الناظم على السطح S معين بالجداء الشعاعي للشعاعين $\frac{\partial x}{\partial u^1}$ و $\frac{\partial x}{\partial u^2}$ الماسين لخطوط الجماعتين $u^2 = C$ وَ $u^1 = C$ على التوالي والمتجهين في اتجاه تزايد الوسيطات الموافق لهما. لهذا الغرض، نرى في جملة احداثيات تقع على اليمين بأن التنسيق بين اتجاه الناظم واتجاه الحافة يتم حسب القاعدة:

بالنظر من موصل الشعاع m فإن رسم الحافة يتم في الاتجاه المعاكس لاتجاه حركة عقارب الساعة (الرسم 3.7 ـ 4)



الرسم 3.7_4

نجد من جديد الدستور التقليدي لستوكس 62.4(5):

$$\int_S (\text{rot}\, f,\, m)\, dS = \int_\Gamma (f,\, \tau)\, d\Gamma.$$

يتعلق الامر في الدستور التقليدي لستوكس بسطح مرن بتقطع S، بحافةمرنة بتقطع Γ. إن الدستور المحصل عليه قد كتب من اجل سطح مرن حافته تحوي أربع نقاط زاوية على الاكثر، حتى ننتقل الى الحالة العامة يكفي ان نلاحظ بأن سطحا مرنا بتقطع بحافة مرنة بتقطع يمكن دوما تقسيمه الى عدد منته من الاجزاء تمثل سطوحا مرنة باربع نقاط زاوية على الحافة، عند كتابة دستور ستوكس المحصل عليه هنا من اجل كل جزء

من هذه الاجزاء وجمع تلك العلاقات فإننا نصل الى دستور ستوكس التقليدي.

ج. k=n، إن المسلسلة d في هذه الحالة n- مسلسلة، نفرض قصد الاختصار أن c=G هو الصورة بواسطة $x = \varphi(u)$ للمكعب

$$I^n = \{u \in R_n : 0 \leqslant u^1 \leqslant 1, \ldots, 0 \leqslant u^n \leqslant 1\}$$

$$G = \{x \in R_n : x^1 = \varphi^1(u^1, \ldots, u^n), \ldots, x^n = \varphi^n(u^1, \ldots, u^n)\}.$$

نفرض أيضا أن يعقوبي التطبيق $x = \varphi(u)$ غير سالب ولا ينعدم إلاّ على مجوعة Z بعدها n-2>. عندئذ يتحول الناظم الخارجي على الوجه $I^n_{i,\alpha}$ للمكعب I^n حيثما كان باستثناء المجموعة $Z \cap I^n_{i,\alpha}$ الى الناظم الخارجي على القطعة الموافقة له $S_{i,\alpha}$ لحافة G. لما كان الناظم الخارجي على الوجه $I^n_{i,\alpha}$ موازيا لشعاع الاساس e_i، إذ انه يمثل الشعاع:

$$(-1)^{\alpha-1} e_i = (-1)^{\alpha-1} [e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n]\cdot(-1)^{i-1} =$$
$$= (-1)^{\alpha+i} [e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n],$$

فإن شعاع الناظم الخارجي على القطعة $S_{i,\alpha}$ الموافق لذلك يمكن ان يُعطى بالعبارة:

$$\nu = \frac{N}{|N|}, \quad N = (-1)^{\alpha+i} \left[\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^{i-1}}, \frac{\partial x}{\partial u^{i+1}}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}\right].$$

يمثل الشكل ω هنا (n-1)- شكلا:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_j(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

نصله بالحقل الشعاعي $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$.

طبقا لـ 23.7 - ج فإن التكامل $\int_{\varphi(I^n_{i,\alpha})} \omega$ يساوي تدفق الحقل F عبر السطح $S_{i,\alpha}$ بناظم واحدي $m_{i,\alpha} = N_{i,\alpha}/|N_{i,\alpha}|$ حيث:

$$N_{i,\alpha} = \left[\frac{\partial x}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^{i-1}}, \frac{\partial x}{\partial u^{i+1}}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial u^n}\right] = (-1)^{i+\alpha} N;$$

أي ان: $\int_{\varphi(I^n_{i,\alpha})} \omega = \int_{S_{i,\alpha}} (f, m_{i,\alpha})\, dS$ إذن:

$$\int_{\partial G} \omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{\varphi(I^n_{i,\alpha})} \omega =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}\int_{S_{i,\alpha}}(f,(-1)^{i+\alpha}m_{i,\alpha})\,dS=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1}\int_{S_{i,\alpha}}(f,m)\,dS=$$
$$=\int_{S}(f,m)\,dS.$$

لدينا من جهة أخرى:

$$\int_G \partial\omega=\int_G\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(x)}{\partial x^j}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

وهكذا فإن دستور ستوكس يردّ في هذه الحالة الى الشكل:

$$\int_S (f,m)\,dS=\int_G\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}dG \qquad (1)$$

وهو يمثل دستور اوستروغرادسكي 4 .31(5):

$$\int_S (f,\nu)\,dS=\int_G \operatorname{div} f(x)\,dG.$$

نفرض هنا ان الساحة G تملك حافة مرنة بتقطع S. إن الحافة في الدستور (1) لها شكل خاص شيئاً ما (لا يمكن ان تكون صورة حافة المكعب جد «زاوية» بحيث انها لا يمكن ان تكون مثلا متعدد وجوه، بعدد كبير من الوجوه). نستطيع إذن الانتقال في (ب) من الساحات الواردة في (1) الى أية ساحة G حافتها مرنة بتقطع ثم نقسم G الى عدة اجزاء ينطبق عليها دستور ستوكس ونكتب (1) من اجل كل جزء من تلك الاجزاء ونجمع تلك العلاقات، نتناسى هنا بعض التفاصيل.

§ 4.7 . المفاضلة القرينة.

14.7 . الشكل القرين.

أ . هب ان الفضاء R_n مزود بجداء سلمي بموتر متري g_{ij} . عندئذ يمكن ابراز بصفة طبيعية من بين كل الاسس صف الاسس المتعامدة والمتجانسة $\{e_\alpha\}$ التي تتحقق من اجلها

$$(e_\alpha, e_\beta)=\delta_{\alpha\beta}$$

نستطيع كتابة شكل ضد تناظري $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ حسب 61.7 (2):

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}(\alpha)\, \xi^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\alpha_k},$$

حيث يتم الجمع على الارقام المتعددة المرتبة تماما $(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
نعرّف الشكل القرين $*A$ لِـ $n-k$ متغيرا بوضع ضمن اساس متعامد ومتجانس

$$(1) \qquad *A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n-k}{x}) = \sum_{(\gamma)} \tilde{b}(\gamma)\, \underset{1}{\xi}^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge \underset{n-k}{\xi}^{\gamma_k}$$

حيث $(\gamma) = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-k})$ هو الرقم المتعدد المكمل لِـ (α) (11.7 ـ ج) المرتب (ايضا) تماما وَ:

$$(2) \qquad \tilde{b}_{(\gamma)} = (-1)^{\sum \alpha_i} \tilde{a}_{(\alpha)}.$$

ب. نستطيع ان نبرهن مباشرة على ان التعريف (1) ـ (2) لا يتعلق بالاساس المتعامد والمتجانس (التمرين 16). نقدم هنا برهانا من نوع آخر: نبحث عن تعريف آخر للشكل القرين يقوم من اجل كل الاسس في آن واحد؛ وسيأتي عدم تغيره من رمزه الموتري؛ اذا تعلق الامر باسس متعامدة ومتجانسة فإن هذا التعريف يردّ الى التعريف (1) ـ (2). نستخدم الرمز

61.7 (3) للشكل:

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{(i)} a_{(i)}\, \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_k},$$

بالجمع على كل $(k\text{-}n)$ ـ الارقام الضيقة (i) ، حيث ان المعاملات $a_{(i)}$ توابع ضد تناظر لِـ $(k\text{-}n)$ ـ الرقم (i) . نضع:

$$(3) \qquad *A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n-k}{x}) = \sum_{(j)} b_{(j)}\, \xi^{j_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{j_{n-k}},$$

حيث

$$b_{(j)} = C_{kn} \sum_{(i)} \sum_{(s)} a_{(s)} g^{i_1 s_1} \dots g^{i_k s_k} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} \sqrt{G}. \quad (4)$$

لدينا $G = \det \| g_{ij} \|$ وَ C_{kn} ثابت سنحدد قيمته ادناه.

لنثبت ان التعريف (3) - (4) يعطي موترا متغايرا $n-k$ مرة. لدينا:

$$\det \| g_{i'j'} \| = \det \| g_{ij} p^i_{i'} p^j_{j'} \| = \det \| g_{ij} \| \det^2 \| p^i_{i'} \| ;$$

ثم:

$$\varepsilon^{1' \dots k' \dots n'}_{i'_1 \dots i'_k j'_1 \dots j'_{n-k}} p^{i'_1}_{i_1} \dots p^{i'_k}_{i_k} p^{j'_1}_{j_1} \dots p^{j'_{n-k}}_{j_{n-k}} =$$

$$= \begin{vmatrix} p^{1'}_{i_1} & \dots & p^{1'}_{i_k} & \dots & p^{1'}_{j_{n-k}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{n'}_{i_1} & \dots & p^{n'}_{i_k} & \dots & p^{n'}_{j_{n-k}} \end{vmatrix} = \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k \dots j_{n-k}} \begin{vmatrix} p^{1'}_1 & \dots & p^{1'}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ p^{n'}_1 & \dots & p^{n'}_n \end{vmatrix},$$

ومنه يأتي:

$$\varepsilon^{1' \dots k' \dots n'}_{i'_1 \dots i'_k \dots j'_{n-k}} = p^{i_1}_{i'_1} \dots p^{i_k}_{i'_k} \dots p^{j_{n-k}}_{j'_{n-k}} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k \dots j_{n-k}} \det \| p^{i'}_{i} \|.$$

وبالتالي:

$$\varepsilon^{1' \dots n'}_{i'_1 \dots j'_{n-k}} \sqrt{\det \| g_{i'j'} \|} =$$

$$= p^{i_1}_{i'_1} \dots p^{j_{n-k}}_{j'_{n-k}} \varepsilon^{1 \dots n}_{i_1 \dots j_{n-k}} \det \| p^i_{i'} \| \det \| p^{i'}_i \| \sqrt{\det \| g_{ij} \|} =$$

$$= p^{i_1}_{i'_1} \dots p^{j_{n-k}}_{j'_{n-k}} \varepsilon^{1 \dots n}_{i_1 \dots j_{n-h}} \sqrt{\det \| g_{ij} \|},$$

بحيث ان الكمية $\varepsilon^{1 \dots n}_{i_1 \dots j_{n-h}} \sqrt{\det \| g_{ij} \|}$ موتر متغاير n مرة. $a_{(i)}$ يمثل موترا متغايرا k مرة (61.7 - ج) وَ g^{ij} موترا عكسياً مرتين؛ إذن فإن التقليص (4) موتر متغاير $n-k$ مرة، وهو المطلوب.

لدينا ضمن اساس عمودي : $\overset{\circ}{g}^{ij} = g_{ij} = \delta_{ij}$ وبذلك يصبح الدستور (4) :

$$b_{(j)} = C_{kn} \sum_{(i)} a_{(i)} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}}.$$

من اجل (j) معطى فإن اعتبار الارقام المتعددة (i) المكملة لِـ (j) لا يخلو من معنى. إذا كان $O(j) = (\gamma)$ ، $O(i) = (\alpha)$، فإن $a_{(i)} = \frac{1}{k!} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{i_1 \dots i_k} \widetilde{a}_{(\alpha)}$ (7 .51(5)) وبما ان ليس هناك سوى رقم متعدد واحد مرتب تماما (α) مكمل لِـ (γ) :

$$b_{(\gamma)} = \frac{C_{kn}}{k!} \widetilde{a}_{(\alpha)} \sum_{(i)} \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k \gamma_1 \dots \gamma_{n-k}}.$$

إن العبارة الواقعة تحت رمز الجمع لا تتعلق الآن بالرقم المتعدد (i) لأن لدينا حسب 7 .11(2) :

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{i_1 \dots i_k \gamma_1 \dots \gamma_{n-k}} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{\alpha_1 \dots \alpha_k \gamma_1 \dots \gamma_{n-k}} =$$

$$= \varepsilon^{1 \dots k \dots n}_{\alpha_1 \dots \alpha_k \gamma_1 \dots \gamma_{n-k}} = (-1)^{\sum_i \alpha_i + \frac{k(k+1)}{2}}$$

وهكذا

$$b_{(\gamma)} = \frac{C_{kn}}{k!} \widetilde{a}_{(\alpha)} k! (-1)^{\sum \alpha_i + \frac{k(k+1)}{2}} = C_{kn} \widetilde{a}_{(\alpha)} (-1)^{\sum \alpha_i + \frac{k(k+1)}{2}},$$

وحسب 7 .61 (10) يأتي :

$$\widetilde{b}_{(\gamma)} = C_{kn} (n-k)!\, b_{(\gamma)} = C_{kn} (n-k)!\, \widetilde{a}_{(\alpha)} (-1)^{\sum \alpha_i + \frac{k(k+1)}{2}}.$$

نضع الآن $C_{kn} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{1}{(n-k)!}$ فنجد :

$$\widetilde{b}_{(\gamma)} = (-1)^{\sum \alpha_i} \widetilde{a}_{(\alpha)},$$

وهذا يطابق الدستور (2).

جـ . امثلة . إن الشكل القرين لِـ 0 شكل C (ثابت) هو n الشكل :

$$C\xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^n.$$

اما قرين 1 ـ شكل $\sum_{i=1}^{n} a_i \xi^i$ فهو $(n-1)$ ـ الشكل الذي يكتب ضمن اساس متعامد ومتجانس على النحو :

$$\sum (-1)^i a_i \xi^1 \wedge \dots \wedge \xi^{i-1} \wedge \xi^{i+1} \wedge \dots \wedge \xi^n.$$

د . لدينا في الحالة العامة العلاقتين التاليتين :

$$(5) \qquad *(aA + bB) = a(*A) + (*B)$$

A وَ B k ـ شكلان ضد تناظريان اما a وَ b فهما عددان) وَ :

$$(6) \qquad *(*A) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} A.$$

إن المساواة (5) تأتي مباشرة. اما المساواة (6) فتنتج من :

$$(-1)^{\sum\alpha_i + \sum\gamma_i} = (-1)^{1+\dots+n} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

24. 7 . الشكل القرين في فضاء ريماني

أ . نعرف الآن من اجل k شكل تفاضلي معطى

$$(1) \qquad \omega = \sum_{(i)} a_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{(\alpha)} \widetilde{a}_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_k}$$

في فضاء ريماني اولي M_n ، $(n-k)$ ـ الشكل القرين $*\omega$ بالمساواة :

$$(2) \qquad *\omega = \sum_{(j)} b_{(j)}(x)\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{(\gamma)} \widetilde{b}_{(\gamma)}(\widetilde{x})\, dx^{\gamma_1} \wedge \dots \wedge dx^{\gamma_{n-k}},$$

حيث :

$$(3) \qquad b_{(j)}(x) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \frac{1}{(n-k)!} \sum_{(i)} \sum_{(s)} a_{(s)}(x)\, g^{i_1 s_1} \dots g^{i_k s_k} \times$$

$$\times\, \varepsilon^{1\dots k\dots n}_{i_1\dots i_k j_1\dots j_{n-k}} \sqrt{\det \| g_{ij}(x) \|}.$$

إذا كانت جملة الاحداثيات $\{x^j\}$ متعامدة ومتجانسة عند نقطة معطاة، اي إذا كان $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$, فإننا نستطيع، كما هو الحال في 14.7 ـ ب، كتابة دستور ابسط:

$$\widetilde{b}_{(\gamma)}(x) = (-1)^{\sum \alpha_i} \widetilde{a}_{(\alpha)}(x), \tag{4}$$

حيث (γ) رقم متعدد مرتب تماما مكمل لِـ (α) .

ب. استناداً الى 14.7 ـ د إن العلاقتين التاليتين محققتان

$$*(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = a_1(*\omega_1) + a_2(*\omega_2) \tag{5}$$

من اجل اي k شكلين ضد تناظريين ω_1 وَ ω_2 واي ثابتين a_1 وَ a_2

$$(*\omega) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \omega \tag{6}$$

من اجل اي k شكل ضد تناظري ω .

34.7 . أ . لنعرّف عملية المفاضلة القرينة لشكل ضد تناظري على فضاء ريماني نعرف هذه العملية بالعلاقة:

$$\delta\omega = * \partial * \omega \tag{1}$$

ب . إن التفاضلية القرينة لِـ k شكل هي $n-(1+(n-k))=(k-1)$ ـ شكل. بصفة خاصة فإن التفاضلية القرينة لِـ0ـ شكل هي 0 . اما التفاضلية لِـ 1 ـ شكل $\omega = \sum f_j(x)\, dx^j$ فهي 0 شكل؛ لنحسبها ضمن الا المتعامدة والمتجانسة:

$$*\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j f_j(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$\partial(*\omega) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge dx^n = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$\delta\omega = *d*\omega = (-1)\frac{n(n+1)}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^j}.$$

ج . التفاضلية القرينة، مثل العمليتين d وَ $*$ ، عملية خطية. ثم إنه ينتج من 24.7 (6) ومن الخاصية التجميعية ان:

$$\delta^2 = (*\partial *)(*\partial *) = (*\partial)(**)(\partial *) = (*\partial)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\partial *) =$$
$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(*\partial)(\partial *) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} *(\partial\partial) * = 0.$$

44.7 . مؤثر لابلاس (Laplaece).

أ . يلعب المؤثر $\partial\delta + \delta\partial.$ دورا هاما. سنبين ان هذا المؤثر يطابق، ضمن اساس متعامد ومتجانس لفضاء اقليدي بعده n ، بتقدير عامل ثابت مؤثر لابلاس المطبق على كل معامل من الشكل:

$$(\partial\delta + \delta\partial) \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)}(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} = \tag{1}$$
$$= -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{(\alpha)}(x)}{(\partial x^j)^2}\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}.$$

بطبيعة الحال، فإن اعتبار الاشكال وحيدة الحدود. وحدها. نستطيع بدون المساس بعمومية المسألة كتابة شكل وحيد الحد ω كما يلي:

$$\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k. \tag{2}$$

(نغيّر اذا لزم الامر ترقيم الاحداثيات).

لدينا من اجل الشكل (2):

$$*\omega = a(x)(-1)^{1+\cdots+k} dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$
$$\partial(*\omega) = (-1)^{1+\cdots+k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a(x)}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

$$*(\partial*\omega)=(-1)^{1+\cdots+k}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+((k+1)+\cdots+n)}\frac{\partial a(x)}{\partial x^j}\times$$

$$\times dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

حيث يبين الرمز $\widehat{dx^j}$ ان العامل dx^j قد اهمل. ثم إن:

$$(3)\ \partial\delta\omega=\partial*\partial*\omega=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\frac{\partial^2 a(x)}{(\partial x^j)^2}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^j\wedge\ldots\wedge dx^k+$$

$$+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j\,\partial x^p}\times$$

$$\times dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\ldots\wedge dx^k\wedge dx^p(-1)^{k-1}.$$

بطريقة مماثلة لدينا:

$$\partial\omega=\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial a(x)}{\partial x^p}(-1)^k dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k\wedge dx^p,$$

$$*\partial\omega=\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^k(-1)^{1+\cdots+k+p}\frac{\partial a(x)}{\partial x^p}dx^{k+1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge\widehat{dx^p}\wedge\ldots\wedge dx^n,$$

34*

$$(4)$$

$$\partial*\partial\omega=(-1)^{1+\cdots+k}\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^p\frac{\partial^2 a(x)}{(\partial x^p)^2}dx^{k+1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge dx^p\wedge\ldots\wedge dx^n+(-1)^{k+(1+\cdots+k)}\sum_{p=k+1}^{n}(-1)^p\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j\,\partial x^p}dx^j\wedge dx^{k+1}\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^p}\ldots\wedge dx^n,$$

$$\delta\partial\omega=*\partial*\partial\omega=$$

$$=-(-1)^{1+\cdots+k}\sum_{p=k+1}^{n}\frac{\partial^2 a(x)}{(\partial x^p)^2}(-1)^{(k+1)+\cdots+n}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k+$$

$$+(-1)^{k+(1+\cdots+k)}\sum_{p=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j\,\partial x^p}(-1)^{j+(k+1)+\cdots+n}\times$$

$$\times dx^1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx^j}\wedge\ldots\wedge dx^k=$$

$$= -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{p=k+1}^{n} \frac{\partial^2 a(x)}{(\partial x^p)^2} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k +$$

$$+(-1)^{k+\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{p=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^j \partial x^p} dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^k$$

عندما نجمع (3) وَ (4) فإن المجاميع المزدوجة تنعدم ولدينا:

$$(\partial\delta + \delta\partial)\,\omega = -(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta\omega, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{(\partial x^j)^2}, \tag{5}$$

وهو المطلوب.

ب. في الحالة العامة (فضاء ريماني مزود بأية جملة احداثيات)، يسمى المؤثر $\partial\delta + \delta\partial$ مؤثر لابلاس ـ بيلترامي (Laplace-Beltrami). تتكون عبارة مؤثر لابلاس بيلترامي من حدّين؛ نطبق في الاول على الشكل ω المؤثر Δ (74.6 ـ ب، ج) ويبدو في الثاني موتر انحناء الفضاء الريماني (راجع ج ذي رام) de Rham، المنوعات القابلة للمفاضلة، باريس، هارمان، 1955).

54.7. انشاء شكل ω انطلاقا من $\partial\omega$ وَ $\delta\omega$.

أ. ليكن μ $(k-1)$ ـ شكلا وَ λ $(k+1)$ ـ شكلا معطيين على منوعة ريمانية M_n؛ نتساءل عن وجود k- شكل ω يحقق

$$\delta\omega = \mu, \quad \partial\omega = \lambda.$$

إذا وجد مثل هذا الشكل ω فإن $\delta\mu = \delta^2\omega = 0$ وَ $\partial\lambda = \partial^2\omega = 0$، إذن تمثل العلاقتان $\partial\mu = 0$ ، $\delta\lambda = 0$ شرطين لازمين لوجود الشكل المطلوب.

ثم إنه تبين بأن هذين الشرطين كافيان على الاقل ضمن الفرض القائل ان الشكلين μ وَ λ لهما حامل متراص، اي ان معاملاتهما منعدمة خارج مجموعة متراصة من الفضاء M_n.

نقدم في د برهانا(*) بسيطا على هذه النتيجة في الحالة التي يكون فيها $M_n = R_n$ وهو الفضاء الشعاعي ذو البعد n . (اما في الحالة العامة فالبرهان جد معقد؛ راجع مثلا ج دي رام، المنوعات القابلة للمفاضلة، باريس هارمان، 1955).

ب. نعتبر في البداية حالة خاصة حيث يكون الشكل مطابقا للصفر.

نختار في الفضاء R_n اساسا متعامدا ومتجانسا ونضع:

$$\mu(X) = \sum_{(\alpha)} \mu(x)\, dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_{k-1}},$$

$$\varphi(x) = \int_{R_n} \frac{\mu(y)\, dy}{|x-y|^{n-2}} = \sum_{(\alpha)} \left[\int_{R_n} \frac{\mu_{(\alpha)}(y)\, dy}{|x-y|^{n-2}}\right] dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_{k-1}}.$$

نحسب $\delta\varphi$ و $\partial\varphi$. لدينا حسب 77.3 ـ ص:

$$\partial\varphi = \sum_{(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\int_{R_n} \frac{\mu_{(\alpha)}(y)\, dy}{|x-y|^{n-2}}\right] dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_{k-1}} =$$

$$= (n-2) \sum_{(\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{R_n} \frac{y_i - x_i}{|x-y|^n}\, \mu_{(\alpha)}(y)\, dy\right] dx^i \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_{k-1}}$$

نرمز بـ $(\beta) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-k+1})$ للرقم المتعدد المكمل لـ (α) وبـ $\mu^*_{(\beta)}(y)$ للكميـــة $(-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} \mu_{(\alpha)}(y)$ (-1). لدينا في هذه الحالة:

$$*\varphi = \sum_{(\beta)} \left[\int_{R_n} \frac{\mu^*_{(\beta)}(y)\, dy}{|x-y|^{n-2}}\right] dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_{n-k-1}},$$

$$\partial(*\varphi) = \sum_{(\beta)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\int_{R_n} \frac{\mu^*_{(\beta)}(y)\, dy}{|x-y|^{n-2}}\right] dx^i \wedge dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{(\beta)} \sum_{i=1}^{n} \left[-\int_{R_n} \mu^*_{(\beta)}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\, dy\right] dx^i \wedge dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{(\beta)} \left[-\int_{R_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y^i} \left(\mu^*_{(\beta)}(y) \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right) dx^i\, dy\right] \wedge dx^{\beta_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\beta_{n-k+1}} +$$

(*) اقترحه ا. دور فمان (I.Dorfman)

$$+\sum_{(\beta)}\left[\int_{R_n}\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mu^*_{(\beta)}(y)}{\partial y^i}dx^i\,dy\right]\wedge dx^{\beta_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\beta_{n-k+1}}.$$

إن التوابع $\mu^*_{(\beta)}(y)$ تنعدم فرضا خارج كرة S . نرمز بـ $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ للناظم الواحدي الخارجي على حافة الكرة ونطبق نظرية اوستروغرادسكي فنجد:

$$\int_{R_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y^i}\left(\mu^*_{(\beta)}(y)\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)dx^i\,dy=$$

$$=\int_{\partial S}\mu^*_{(\beta)}(y)\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\left[\sum_{i=1}^{n}\nu_i\,dx^i\right]dy=0$$

لكن:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mu^*_{(\beta)}(y)}{\partial y^i}dx^i\wedge dx^{\beta_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\beta_{n-k+1}}=\partial(*\mu(x))|_{x=y}=$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(**)\,\partial(*\mu)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}*\delta\mu=0$$

وهكذا فإن التكاملين في (1) منعدمان. وبالتالي:

$$\delta\varphi=*\partial*\varphi=0.$$

نطبق بعد ذلك الدستور $\delta\partial+\partial\delta=-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Delta$ ((3)44.7). يمكن ان نجد الكمية $\Delta\varphi$ في الحالة الراهنة انطاقاً من 24.4 (9):

$$\Delta\varphi=\sum_{(\alpha)}\left[\sum\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}\int_{R_n}\frac{\mu(y)\,dy}{|x-y|^{n-2}}\right]dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_{k-1}}=$$

$$=S_n(2-n)\sum_{(\alpha)}\mu_{(\alpha)}(x)\,dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_{k-1}}=S_n(2-n)\,\mu$$

حيث يرمز S_n لمساحة سطح كرة الوحدة في R_n . إذن:

$$\delta\partial\varphi=-(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Delta\varphi=(n-2)\,S_n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\mu$$

عندما نضع $\omega=\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n-2)\,S_n}\partial\varphi$ نجد $\delta\omega=\mu$ ، $\partial\omega=0$ ، وهو المطلوب.

ج. نعالج خاصة اخرى: هناك $(k+1)$ ـ شكل λ يحقق $\partial\lambda=0$ وَ $(k-1)$ ـ شكل $\mu\equiv 0$؛ نريد البحث عن k ـ

شكل ω بحيث $\partial\omega = \lambda$، $\delta\omega = 0$. إن درجة الشكل λ هي $n - k - 1$ لدينا من اجل الشكل الاخير:

$$\delta(*\lambda) = *\partial**\lambda = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} *\partial\lambda = 0.$$

يتبين مما برهنا عليه في ب انه يوجد $(n - k)$ شكل g تتحقق من اجله العلاقة:

$$\delta g = *\lambda \quad \partial g = 0$$

لنثبت ان k الشكل $\omega = *g$ يتمتع بالخاصيات المطلوبة.

بالفعل:

$$\partial\omega = *\delta**g = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} *\delta g = \lambda,$$
$$\delta\omega = *\partial**g = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} *\partial g = 0,$$

وهو المطلوب.

د. في الحالة العامة، إذا كان هناك $(k - 1)$ - شكل μ حاملة متراص، بحيث $\delta\mu = 0$، و $(k+1)$ شكل λ حاملة متراص بحيث $\delta\lambda = 0$، نبحث في البداية على k شكلين ω_1 وَ ω_2 يتحقق من اجلها:

$$\delta\omega_1 = \mu, \qquad \partial\omega_1 = 0,$$
$$\delta\omega_2 = 0, \qquad \partial\omega_2 = \lambda,$$

ثم نجمعها. نحصل عندئذ على الشكل

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{2}$$

الذي يحلّ المسألة المطروحة لأن

$$\partial\omega = \partial\omega_0 = \lambda, \quad \delta\omega = \delta\omega_1 = \mu.$$

د . لندرس مسألة وحدانية الحل. نفرض من اجل شكلين معطيين μ وَ λ ، انه يوجد k شكلان ω وَ Ω بحيث :

$$\partial\omega = \partial\Omega = \lambda, \quad \delta\omega = \delta\Omega = \mu.$$

حينئذ يكون الشكل $\theta = \Omega - \omega$ محققا للعلاقتين

$$\partial\theta = 0, \quad \delta\theta = 0 \qquad (3)$$

تسمى الاشكال θ المتمتعة بالخاصيتين (4) **اشكالا توافقية.** إذا كان شكل θ توافقيا فإن $c(\partial\delta+\delta\partial)\,\theta=0$ وكل معاملات شكل توافقي توابع توافقيه. (اما القضية العكسية فهي عموما خاطئة: لا يمكن ان نختار معاملات شكل توافقي اية توابع توافقية لأن المعاملات مرتبطة ببعضها بالعلاقات الآتية من (3)).

من البديهي ان الحل (2) المحصل عليه له معلاملات تؤول الى 0 لما $|x| \to \infty$. إذا تمتع حل آخر Ω بنفس الخاصية فإن الامر كذلك فيما يخص الشكل التوافقي $\theta = \Omega - \omega$ الآ ان كل تابع توافقي يؤول الى 0 لما $|x| \to \infty$ تابع مطابق للصفر (45. 4 ـ ج). إذن، نلاحظ في صف كل k الاشكال التي معاملاتها تؤول الى 0 لما $|x| \to \infty$ ان الحل المحصل عليه وحيد.

س . نستطيع كتابة النتيجة المحصل عليها على الشكل:

نظرية. يمكن تمثيل كل k ـ شكل Ω، حيث $\partial\Omega = \lambda$ وَ $\delta\Omega = \mu$ شكلان حاملها متراص، كمجموع $f + g$ لِـ k ـ شكلين f وَ g بحيث أن $\partial f = 0, \delta g = 0.$. إن هذا التمثيل وحيد في صف كل k ـ الاشكال التي لها معاملات تؤول الى 0 لما $|x| \to \infty$.

للبرهان على ذلك نلاحظ لكوْن $\partial\lambda = 0$ وَ $\delta\mu = 0$ اننا نستطيع انشاء مثل هذا الشكل $\omega = \omega_1 + \omega_2$ بحيث

$$\delta\omega_1 = \mu, \qquad \partial\omega_1 = 0,$$

$$\delta\omega_2 = 0, \qquad \partial\omega_2 = \lambda.$$

بفضل الوحدانية التي سبق اثباتها فإن الشكلين ω وَ Ω متطابقان وهو ما يعطى التمثيل المطلوب $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. إنه وحيد في الصف المذكور حسب نفس الاعتبارات الواردة اعلاه.

ص. تمثل المسألة التي نحن بصدد دراستها تعميما مباشرا لمسألة انشاء حقل شعاعي انطلاقا من دواره وتفرقه. بالفعل، فإن العمليات التقليدية للتحليـل الشعـاعـي $\text{grad}\,\varphi, \text{div}\, f$ ، $\text{rot}\, f$ تكتب، والبرهان على ذلك سهل، بدلالة $*$ ، δ ، ∂ (بتقدير اشارة) كما يلي:

$$\text{grad}\,\varphi = \partial\varphi, \quad \text{div}\, f = * \partial * f \equiv \delta f, \quad \text{rot}\, f = * \partial f$$

ليكن الآن $R(x)\ (U \in R_3 \to R_3)$ وَ $u(x)\ (U \in R_3 \to R_1)$ تابعين (حـاملهما متراص) $\text{div}\, R(x) \equiv 0$. نـريـد انشـاء حقـل شعاعي f بحيث $\text{div}\, f = u, \text{rot}\, f = R$ يمكن معالجة الحقل السلمي المعطى u كَـ 0 شكل وبالتالي لدينا $\delta u = 0$ كما هو الحال فيما يخص أي 0 شكل. نستطيع اعتبار الحقل الشعاعي R كـ 1 شكـل مـع $\delta R = 0$ أو، والقـولات متكافئـان، $\partial(*R) = 0$. إن المسألة المطروحة تكافىء حينئذ البحث عن حقل شعاعي او عن 1 ـ شكل f يتحقق من اجلها $\delta f = \varphi$ ، $\partial f = * R.$ او $*(\partial f) = R$. وهذه هي بالضبط المسألة المعتبرة في في حالة خاصة وعليه فهي مسألة قابلة للحل (بفضل د عندما يكون لِـ $u(x)$ وَ $R(x)$ حاملان متراصان؛ وبفضل د فإن الحل وحيدُ في صف كل الحقول الشعاعية $f(x)$ التي تؤول الى الصفر لما $(|x| \to \infty)$).

تمارين

1 . إن الاشكال $E_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \sum_{O(i)=(\alpha)} \underset{1}{\xi}^{i_1}, \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k}$
متناظرة؛ وهي تسمى k. اشكالا اولية. اثبت ان كل k شكل متناظر يمكن تمثيله بطريقة وحيدة كعبارة خطية لأشكال $E_{(\alpha)}$.

2 . ما هو بعد فضاء k الاشكال المتناظرة في R_n ؟

3 . اثبت انه من الممكن تمثيل كل شكل ثنائي الخطية $A(\underset{1}{x}, \underset{2}{x})$ كمجموع لشكل ثنائي الخطية متناظر وشكل ثنائي الخطية ضد تناظري.

4 . اثبت، من اجل $k > 2$ ، انه يوجد k ـ شكل يمكن تمثيله كمجموع لِـ k ـ شكلين تناظري وضد تناظري.

5 . نضع من اجل كل k شكل $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$:

$$\operatorname{Sym} A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x}) = \frac{1}{k!} \sum_{(i)} A(\underset{i_1}{x}, \ldots, \underset{i_k}{x}).$$

اثبت ان $\operatorname{Sym} A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ شكل متناظر، إذا كان $A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{k}{x})$ متناظر فإن $\operatorname{Sym} A = A$، العكس بالعكس.

6 . يمكن دوما كتابة $(k\text{-}n)$ رقم مرتب على النحو:

$$(\alpha) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_1\ \text{مرة}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{p_2\ \text{مرة}}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{p_n\ \text{مرة}}).$$

حيث ان الاعداد $p_1, \ldots, p_n$ محصورة بـ: $0 \leqslant p_i \leqslant k$ et $\sum p_i = k$
تسمى المجموعة $(p_1, \ldots, p_n)$ مميزة الرقم المتعدد (α) . اثبت ان:

$$\operatorname{Sym} \underset{1}{\xi}^{i_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{i_k} = \operatorname{Sym} \underset{1}{\xi}^{\alpha_1} \ldots \underset{k}{\xi}^{\alpha_k} = \frac{p_1! \ldots p_n!}{k!} E_{(\alpha)}(x_1, \ldots, \underset{k}{x}),$$

حيث $(\alpha) = O(i)$ ، ويرمز $(p_1, \ldots, p_n)$ لمميزة الرقم المتعدد (α) ويمثل $E_{(\alpha)}$ شكلا متناظرا اوليا (التمرين).

7 . نسمي جداء موتريا متناظرا لِـ k ـ شكل A ولِـ m ـ شكل B

(k+m) ـ الشكل:

$$A \vee B = \operatorname{Sym}(A \times B).$$

اثبت ان العملية $\vee$ توزيعية مع الجمع وتجميعية.

8 . اثبت ان:

$$\xi^{i_1} \vee \dots \vee \xi^{i_k} = \frac{p_1! \dots p_k!}{k!} E_{(\alpha)}(\underset{1}{x}, \dots, \underset{k}{x}) = \operatorname{Sym} \underset{1}{\xi}^{i_1} \dots \underset{k}{\xi}^{i_k}$$

9 . اثبت ان كل $(n-1)$ ـ شكل ضد تناظري في R_n يمكن تمثيله كما يلي:

$$A(\underset{1}{x}, \dots, \underset{n-1}{x}) = \begin{vmatrix} \underset{1}{\xi}^1 & \dots & \underset{n-1}{\xi}^1 & a^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underset{1}{\xi}^n & \dots & \underset{n-1}{\xi}^n & a^n \end{vmatrix}$$

حيث $a^1, \dots, a^n$ اعداد مثبتة (من اجل الاساس المعطى)

10 . تأكد من الدستور

$$A \wedge B = (-1)^k B \wedge A.$$

حيث k هي درجة الشكل A .

11 . لتكن $P = \| a_{ij} \|$ مصفوفة $n \times n$ قابلة للقلب وَ P^{-1} مصفوفتها المقلوبة. نختار في المصفوفة P الاصغري M الواقع السطور والاعمدة ذات الارقام $1, \dots, k,$ وفي المصفوفة P^{-1} الاصغري T الواقع في السطور والاعمدة ذات الارقام $k+1, \dots, n.$ اثبت ان $T = M/\det P$.

12 . اثبت ان المعاملات $\tilde{a}_{(\alpha)}$ الواردة في الرمز الثاني القانوني لشكل ضد تناظري (61.7 ـ أ) تتحول، باجراء تغيير للإحداثيات $\xi^i = p^i_{i'} \xi^{i'}$ ، وفق الدستور

$$(-1)^{\sum \alpha'_i} \tilde{a}_{(\alpha')} = \frac{(-1)^{\sum \alpha_i}}{\det P} \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)} \det \| p^{\beta'_i}_{\beta_i} \|,$$

حيث يمثل (β_i) وَ (β'_i) الرقمين المتعددين المرتبين تماما، المكملين للرقمين المتعددين (α) وَ (α') على التوالي.

بصفة خاصة، تتحول المعاملات b^i $(n-1)$ شكل:

$$A(\underset{1}{x}, \ldots, \underset{n-1}{x}) = \sum_i (-1)^{i-1} b^i \xi^1 \wedge \ldots \wedge \hat{\xi}^i \wedge \ldots \wedge \xi^n$$

كما تتحول الموترات المتغايرة عكسيا مرة واحدة

$$b^{i'} = \frac{1}{\det P} \sum_i b^i p_i^{i'}$$

« بالوزن » $1/\det P$.

13 . من اجل شكل تفاضلي كيفي:

$$\omega = \sum_{(i)} f_{(i)}(x)\, \underset{1}{dx}^{i_1} \ldots \underset{k}{dx}^{i_k},$$

نستطيع تعريف ثلاث تفاضليات:

$$D\omega = \sum_{(i)} \sum_j \frac{\partial f_{(i)}(x)}{\partial x^j} \underset{1}{dx}^j \underset{2}{dx}^{i_1} \ldots \underset{k+1}{dx}^{i_k},$$

$$d\omega = \mathrm{Sym}\, D\omega, \quad \partial\omega = \mathrm{Alt}\, D\omega.$$

اثبت من اجل شكل ω ضد تناظري ان التفاضلية ∂ مطابقة للتفاضلية المعرفة في 22.7 .

14 . اثبت ان

$$d\left(\sum_{(i)} f_{(i)}(x)\, dx^{i_1} \vee \ldots \vee dx^{i_k}\right) = \sum_{(i)} \sum_j \frac{\partial f_{(i)}(x)}{\partial x^j} dx^j \vee dx^{i_1} \vee \ldots \vee dx^{i_k}.$$

15 . اثبت ان

$$d(\omega_1 \times \omega_2) = d\omega_1 \vee \omega_2 + \omega_1 \vee d\omega_2.$$

16 . ليكن $A = \sum_{(\alpha)} \tilde{a}_{(\alpha)} \xi^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\alpha_k}$. نضع $\tilde{b}_{(\gamma)} = (-1)^{\Sigma\alpha_i} \tilde{a}_{(\alpha)}$ ضمن كل اساس متعامد ومتجانس، حيث (γ) رقم متعدد مرتب تماما مكمل لـ (α) اثبت بالحساب المباشر ان الشكل $\sum_{(\gamma)} b_{(\gamma)} \xi^{\gamma_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{\gamma_{n-k}}$ لا يتغير عند القيام بتحويلات متعامدة للإحداثيات.

17 . شر، من اجل كل k- شكل $\omega \neq 0$ على منوعه قابلة للمفاضلة اولية

. $\int_c \omega \neq 0$ تحقق c مسلسلة k- الى M_n

18 . اثبت، من اجل كل k- شكل يحقق $\partial c = 0$ ومن اجل كل k- شكل ω يحقق $\partial\omega = 0$ على منوعة M_n ، ان المساواة التالية قائمة

$$\int_c \omega = 0.$$

نبذة تاريخية

حصل بوانكري على تعميم متعدد البعد لنظرية ستوكس وذلك في الجزء الثالث من « طرق جديدة للميكانيكا السماوية » (1889). ثم قدم أ. كارتان (E. cartan) نصا ثانيا لهذه النظرية قريبا جدا من النصوص الحديثة، وكارتان هو منشىء حساب الاشكال ضد التناظرية التفاضلية؛ يعود القسم الجبري لهذا الحساب الى عمل غراسمان (Grassmann) 1844 ، 1861) «Die Ansdehrungslehre» الذي ظهر فيه لأول مرة « الفضاء ذو البعد n ». ادخل مفهوم التفاضلية القرينة من طرف براور Brauer من اجل الفضاء الاقليدي (1906) ومن طرف فيتزانبوك Weitzenböck من اجل الفضاء الريماني (1923). أما مسألة انشاء كل تفاضلي انطلاقا من تفاضليته وتفاضليته القرينة فقد طرحت وحلت (من اجل الفضاء الريماني) من طرف ج. دي رام في كتابه « المنوعات القابلة للمفاضلة » (1955).

اجوبة وتوجيهات

الفصل 1

1 . توجيه. اعتبر متتالية النقاط $r_n = 1/n, \quad \varphi_n = 1/n$.

2 . توجيه. يمكن استخراج من كل متتالية $\{\varphi_n, \rho_n\} \to 0$ (حيث $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 2\pi$) متتالية جزئية $\{\varphi_{n_k}, \rho_{n_k}\}$ بحيث تكون لمتتالية الاعداد φ_{n_k} نهاية.

3 . توجيه. أ) التابع خطي على كل نصف مستقيم؛ ب) يجب الآن يتغير ميل هذا التابع الخطي على المستقيم؛ ج) إن كان التابع قابلا للإشتقاق فيجب ان يكون مساويا لجزئه الخطي الرئيسي.

4 .توجيه. إن شكل مصفوفة الضرب في عدد عقدي $a + rb$ و $\begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}$ ، اما شكل مصفوفة المؤثر $f'(z)$، من اجل $w = u + iv$، فهو $\begin{Vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{Vmatrix}$. تذكر شروط (او شرطيْ) كوشي - ريمان (اي 61. 10).

5 . الجواب.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

6. الجواب

تمثل المعادلة $[(x-a)^2 + y^2]\,[(x+a)^2 + y^2] = b^4$ منحنين منفصلين من اجل $b > a$، ولمنسكات من اجل $a = b$، ومنحيا له اربع نقاط انعطاف من اجل $a < b < a\sqrt{2}$، ومنحينا محدباً من اجل $b > a\sqrt{2}$.

7 . الجواب. مثلا،

$$x_1 = \cos\varphi, \quad x_2 = \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

8 . توجيه. طبق دستور نيوتن - ليبنيتز.

9 . توجيه. استخدم النتائج الثلاث التالية: أ) تدرج التابع r شعاع

واحدي، ب) قطرا المعين (الشكل الهندسي) متعامدان؛ ج) التدرج عمودي على سطح مستوى.

10 .توجيه. نفرض ان التابع $F(t, \xi)$ $(R_2 \to R_1)$ مشتق مستمر بالنسبة لِـ ξ. اوجد نقاط مستقرة للتابعية:

$$f(x) = \int_a^b F(t, x(t))\, dt$$

المعرفة في الفضاء $R(a, b)$ المؤلف من التوابع الحقيقية المستمرة $x = x(t),\ a \leqslant t \leqslant b$.

11 . الجواب. $x_1(t) = -\frac{1}{3}(t+1)$ قيمة عظمى محلية؛ $x_2(t) = \frac{1}{3}(t+1)$ قيمة صغرى محلية.

12 . توجيه. لدينا قيمة صغرى محلية عند $x_0(t) = 1$. للبرهان على ذلك، ضع $x(t) = 1 + \varepsilon(t)$ وبمراعاة الفرض، اثبت ان:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{3}{2}\int_0^1 \varepsilon^2(t)\, dt + \int_0^1 \varepsilon^3(t)\, dt.$$

13 . توجيه. إن المؤثر: $Ax = x - [f'(a)]^{-1} f(a)$ مقلص (ضمن الشروط المفروضة)؛ راجع برهان النظرية 35.1 .

14 . توجيه.اعتبر هذا التابع على مستقيم يمر بمركز الاحداثيات.

15 . توجيه. لدينا في الفضاء الهيلبرتي $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

16 . توجيه. اختر الازاحة ذات الشكل $(0, \ldots, 0, h, 0, \ldots)$، $|h| < \delta$. استخدم الشكل العام لتابعيه خطية في l_2 .

17 . توجيه. استبدل y بِـ $A_0 x^{r_0}$ في المعادلة (1) واثبت ان المعادلة المحصل عليها: $\varphi(x, u) = f(u, A_0 x^{r_0} u) = 0$ محققة عندما $u = 1$ وَ $x = 0$ ، وإن $\frac{\partial \varphi(0, 1)}{\partial u} \neq 0$ ، ثم طبق نظرية التابع الضمني.

18 . توجيه. استبدل y بِـ $A_0 x^{r_0}(1 + B_0 x^{s_0} u)$ في المعادلة (1)؛ ثم اتبع

طريقة التمرين 17 .

19 . توجيه. استخدم 43.1 ـ د وَ 54.1 .

20 . توجيه. تنتمي كل التوابع $f(x)$ التي لها نفس القيمة $f'(a)$ الى نفس الصنف.

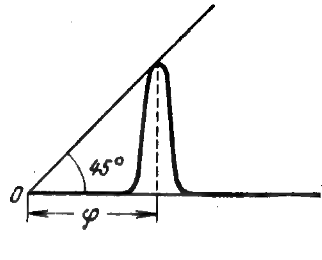
21 . توجيه. إذا كان تابع $f(x) \in \mathfrak{A}$ منعدما في جوار V للنقطة x ، وكان تابع $h(x) \in \mathfrak{A}$ منعدما خارج V، بحيث $h(a) = 1$ ، فإننا نصل الى النتيجة المطلوبة بتطبيق التابعية D على $f(x) \cdot h(x)$. اثبت ان كل تابع $f(x) \in J(a)$ نهاية (بالنسبة لنظيم $\mathfrak{A}$) لتوابع منعدمة بجواء النقطة .

22 . توجيه. لدينا، حسب التمرين 20 :

$$Df = (f'(a), y) = \frac{\partial f(a)}{\partial y}$$

23 . الجواب. مثلا ، ليكن $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ اساسا متعامدا ومتجانسا في فضاء هلبرتي H ، وليكن $S_n = \{x \in H : |x - \frac{2e_n}{n}| \leqslant \frac{1}{n}\}$ نعتبر تابعا $\theta_n(t): R_1 \to R_1$ قابلا للإشتقاق محصورا بين 0 وَ 1 ، ويساوي 0 من اجل $|t - \frac{2}{n}| \geqslant \frac{1}{n}$ وَ 1 من اجل $t = \frac{2}{n}$ من اجل $x \in S_n$ ، فإن المؤثر الخطي $f(x)$ معطى بالدستور $f(x)h = \frac{1}{n} e_n (h, e_n) \theta_n (|x - \frac{e_n}{n}|)$ ؛ نضع $f(x)h = 0$ من اجل $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

24 . الجواب. مثلا ، يمكن ان نعرف على كل نصف مستقيم، عمدته φ ، التابع $f(x, y)$ بخط بيان من النوع المبين في الرسم 1 . عندئذ يكون للتابع $f(x, y)$ في المستوى $\{x, y\}$ ، عند مركز الاحداثيات، مشتق غير منعدم وفق المنحنى للإشتقاق المتكون من نقاط القيم القصوى لخطوط البينات المذكورة



الرسم 1

25 .توجيه. استخدم فكرة الانشاء الواردة في التمرين 24 ؛ عرّف التابع المطلوب على نصف المستقيم الموافق لشعاع الاساس e_n وذلك بواسطة خط بيان من النوع المبين في الرسم 1.

26 . توجيه. استخدم 43.1 ـ ج

27 . الجواب. بما ان مرتبة مصفوفة جاكوبي (اليعقوبية) للتوابع المعطاة غير ثابت في اي جواء للنقطة $(0, 0)$ ، فإن هذه التوابع ليست مستقلة ولا غير مستقلة.

28 . توجيه. تأكد مباشرة انه إذا كان $z = \varphi(y)$ حلا للمعادلة (1) فإن $w = z - \varphi(y)$ حل للمعادلة (2). وبالعكس، اذا كان $w(y, z)$ حلا للمعادلة (2) فإن المساواة $w_z \neq 0$ تكتب على الشكل $w(y, z) = 0$ عندما يكون $z = \varphi(y)$ (الحالة العامة). اكتب المشتق واضرب في Φ .

29 . توجيه. ليكن $d_n = \inf\limits_{m \neq n} \rho(x_n, x_m)$ ؛ اثبت ان $d_n > 0$ وضع $\rho_n = d_n/2$

30 . توجيه. ضع $f(x) = \varphi_n(\rho(x, x_n))$ في الكرة $S(x_n, \rho_n)$ ، حيث $\varphi_n(\rho)$ تابع مستمر منعدم من اجل $\rho > \rho_n$ ويساوي n من اجل $\rho = 0$.

31 . توجيه. طبق نفس الفكرة الواردة في التمرين 30 .

الفصل 2

1 . توجيه. في الفضاء ذي البعد الزوجي الموافق لذلك، نلاحظ ان جداء الجذور المميز للؤثر سالب، وبالتالي توجد جذور موجبة واخرى سالبة؛ إلاّ ان هذه الجذور تمثل المعاملات القانونية للشكل التربيعي.

2 . الجواب.

$$d^2x^{-1} = x^{-1}hx^{-1}kx^{-1} + x^{-1}kx^{-1}hx^{-1}.$$

3 . الجواب.

$$\varphi''(y)\,pq = -[f'(x)]^{-1}\cdot f''(x)\cdot[f'(x)]^{-1}\cdot p\cdot[f'(x)]^{-1}q, \quad p, q \in Y.$$

4 . توجيه. ينتج الجزء الاول من نظرية القيمة القصوى المقيدة. لإنشاء مثال، اعتبر التابع $(H_2 \to H_1)$ $y = x_2$ مع الشروط $x_2 = Cx_1^2$ حيث C يمثل ثابتا كيفياً.

5 . توجيه. طبق المقياس 36.2 ـ أ.

6 . توجيه. إن التابعين $a_1(x)$ وَ $a_2(x)$ غير مستمرين.

7 . الجواب.

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Phi\right)h_1k_1 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Phi\right)k_1h_1$$

$$(h_1, k_1 \in X_1).$$

8 . توجيه. اشتق العلاقة $(y'h, y'k) = \lambda^2(h, k)$ بالنسبة لأي شعاع l. ثم اجر تبديلا دوريا للمتغيرات h, k, l. بإعتبار ان l شعاع كيفي، احصل على العلاقة $y''hk = 0$.

9 . توجيه. ابدا بالتعاكس؛ استخدم التمرين 26 من الفصل الاول.

10 . توجيه. اشتق العلاقة $(y'h, y'k) = 0$ بالنسبة لِـ l، ثم اجر تبديلا دورياً للمتغيرات h, k, l.

11 . توجيه. استخدم النتيجة القائلة ان الشعاع l الوارد في التمرين 10

يمكن ان يكون شعاعا كيفيا متعامدا على h أو k .

الجواب. $\nu = \frac{\lambda'(x)\,h}{\lambda(x)}$, $\mu = \frac{\lambda'(x)\,k}{\lambda(x)}$

12 . اشتق مساواة التمرين 11 بالنسبة لِـ l الكيفي وذلك بمراعاة الشعاعي $\rho''lk \cdot y'h$ ا متناظر بالنسبة لِـ l وَ h. استخدم استقلال $y'h$ وَ $y'l$.

13 . توجيه. اثبت ان $\rho''hk = \sigma(x)(h, k)$، ثم اشتق بالنسبة لِـ l الكيفي، واستعمل تناظر المشتق الثالث.

14 . توجيه. كامل النتيجة الواردة في التمرين 13 .

15 . توجيه. طبق نتيجة التمرين 14 على التابع $y(x)$ وعلى تابعه العكسي.

16 . توجيه. من اجل $\beta \neq 0$ وَ $\alpha \neq 0$ فإن التابع :

$$|y(x)| = \int_0^{|x|} \frac{dt}{\alpha t^2 + \beta}$$

يصبح تابعا متسامياً، في حين يثبت التمرين 15 انه تابع جبري.

17 . الجواب. تقدم النظرية 2 .16 ـ أ شرطا لازما لتلاؤم جملة مهما كانت الشروط الابتدائية (بجوار نقطة معطاة). إن الجملة المعتبرة لا تقبل حلا عند اعتبار الشرط الابتدائي $z(0, 0) = \varepsilon > 0$.

18 . توجيه. طبق النظرية 2 .16 ـ أ.

الفصل 3

1 . الجواب. $I = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u)\,du.$

2 . الجواب. $I = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det \| A \|}}.$

3 . الجواب. $I = S_{n-1}(1) \int_0^\infty r^{n-1} f(r)\,dr.$

4 . الجواب. $I = S_{n-2}(1) \int_{-1}^{1} f(h) \sqrt{1 - h^2}\,dh.$

5 . توجيه. $|\Pi_{h\alpha}|/2\pi = 1 + C\frac{\alpha^6}{h^2} + \dots$

6 . توجيه. من الممكن اختيار مثل هذه المتتالية المعمقة من الساحات بحيث تكون القيم الموجبة للتابع $f(x)$ هي المسيطرة، يمكن ان نقوم بنفس الشيء فيما يخص القيم السالبة.

لدينا على [$0,\infty$] تعريف آخر لتقارب التكامل (إن اختيار الساحات المقبولة اقل غنى هنا).

7 . الجواب. إن المجموعة P ، مثلا، خلية غير جوردانية.

8 . توجيه. قطعة المستقيم المحصل عليها في النهاية ليست متجانسة.

9 . توجيه. يكفي معالجة الحالة $k = 1$ ؛ طبق مبدأ كافاليري والعلاقة (ي 74. 12 ـ ب):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt}{\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt} = 0.$$

10 . توجيه. نفس التوجيه السابق.

11 . توجيه. استخدم مبدأ كافاليري والتدريج على n .

12 . توجيه. اقترب من التوابع $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ بواسطة توابع ثابتة بتقطع. طبق 55. 3 ـ ج.

13 . توجيه. كامل في البداية على سطح الكرة ذات نصف القطر، r، ثم بالنسبة لـ r من 0 الى ∞. احصل على الدستور التالي فيما يخص التابع $f(x) = g(r)$ المتناظر والكروي:

14 . الجواب.

$$\varphi(\sigma) = \int_0^\infty \left\{ \int_{S_r} e^{-i|\sigma| r \cos\theta} \, d\omega \right\} g(r) \, r^{n-1} \, dr.$$

15 . توجيه. طبق قاعدة اشتقاق تكامل موسع بالنسبة للوسيط (47. 3 ـ

س).

16 . توجيه. اكتب ضمن الاساس الجديد الشكل المعطى كمجموع مربعات. استخدم الطريقة ي 23. 15.

$$\varphi(\sigma)=\frac{4\pi}{\rho}\int_0^\infty rg(r)\sin\rho r\,dr, \quad \rho=|\sigma|.$$

الفصل 4 .

1 . الجواب. $\operatorname{rot} P(A)=[\rho\varphi'(\rho)+2\varphi(\rho)]g,$ حيث $\varphi(\rho)=\frac{f(\rho)}{\rho}$ ، ويمثل g الشعاع الواحدي المحمول على المستقيم λ . تقوم المساواة $P(A)=0$ من اجل $f(\rho)=C/\rho.$.

2 . توجيه. ان الانحناء معطى، من اجل المنحنى $y=\varphi(x)$ ، بالدستور:

$$k=\frac{\varphi''(x)}{[1+\varphi'(x)]^{3/2}}.$$

استخدم الدستور 4 .51(2)

3 . توجيه. اذا كانت معادلة جاعة السطوح من الشكل $\varphi(M)=C$ ، يمكننا كتابة الفرض كما يلي: $\operatorname{grad}\varphi=\lambda R.$

لإزالة λ وَ φ ، نطبق العملية rot.

4 . توجيه. نعتبر على السطح S المحيط المغلق المشكل من الخط L ومننحنيين $\gamma(M)$ وقوس كيفي، ثم نطبق نظرية ستوكس.

5 . توجيه. استخدم التمرين 4 .

6 . توجيه. إن الساحة ليست مترابطة ببساطة؛ والكمون المحلي $\operatorname{arctg}(y/x)$. لا يمتد الى كل الساحة كتابع وحيد القيمة.

7 . توجيه. طبق دستور ستوكس على الساحة المعتبرة.

8 . الجواب.

$$F(y)=\begin{cases} -\dfrac{e(0,\,y)}{|y|^2} & \text{pour } |y|\geqslant r,\\[2mm] -\dfrac{e(0,\,y)\,|y|}{r^3} & \text{pour } |y|\leqslant r.\end{cases}$$

9 . توجيه. استخدم المتراجحة:

$$(r - |y|)^n \leqslant |x - y|^n \leqslant (r + |y|)^n.$$

10 . توجيه. انتقل في متراجحة التمرين 9، الى نهاية بجعل r يؤول الى ∞.

11 . توجيه. انتقل الى التدرج في دستور بواسون وقيّم $\text{grad}\, P(x, y)$ من اجل $x = y$.

12 . توجيه. طبق نتيجة التمرين 11 على الكرات الداخلية بعد تثبيت نصف قطرها، ثم استعمل النظرية على التغطية المنتهية.

13 . توجيه. بالنظر الى التمرين 12، طبق نظرية آرزيلا Arzelà.

14 . توجيه. استخدم متراجحة التمرين 9 ونتيجة التمرين 11.

15 . الجواب. لا، لأن ليس هناك على هذا السطح شعاع ناظمي مستمر.

الفصل 5

1 . الجواب.

$$K = -\frac{z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)}$$

2 . الجواب.

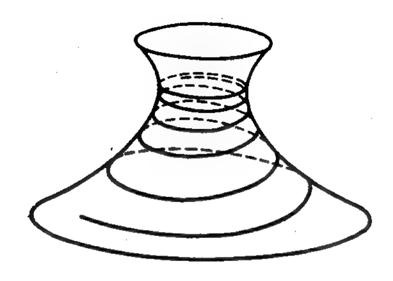
$$K = -\frac{1}{(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{vmatrix}$$

3 . الجواب.

$$K = -\frac{1}{2\varphi(u, v)} \left(\frac{\partial^2 \ln \varphi(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \ln \varphi(u, v)}{\partial v^2} \right)$$

4 . توجيه. استخدام الدستور 62.5(5).

5 . الجواب. الانحناء الجيوديزي لخطوط العرض $= \frac{1}{\rho \sqrt{1 + z_\rho^2}}$ ، أما الانحناء الجيوديزي لخطوط الطول فهو منعدم.



6 . الجواب. تلتف الجيوديزية على الكاتينويد وهي تقترب لانهائيا من خط انقباضها (الرسم 2).

7 . الجواب. من اجل تابع قابل للإشتقاق: خطوط العرض المطلوبة هي تلك التي يبلغ التابع $s(\rho)$ عليها قيمته العظمى غير المنعدمة، وليس هناك غيرها.

8 . توجيه. احداثية المركز هي:

$$v = -\frac{(R_u, l_u)}{|l_u|^2}$$

9 . توجيه. في الحالة المعتبرة، تأخذ معادلة خط الانقباض الشكل:

$$|l_u|^2 (R_{uu}, l_u) + |l_u|^2 (R_u, l_{uu}) - 2 (R_u, l_u) (l_u, l_{uu}) = 0$$

10 . توجيه. اثبت ضمن الافتراضات المتخذة، ان خط الانقباض يقطع المولدات بشكل عمودي. اختر هذا الخط بمثابة الخط الدليل (المدير)، ثم اثبت انه مستقيم.

11 . توجيه. كامل المعادلة.

$$dm = \lambda\, dr$$

على طول خط الانحناء المعطى.

12 . توجيه. صل كل نقطة B من الفضاء الماس $\Pi(A)$ بنقطة C على المنوعة طبقا للقاعدة: ارسم، انطلاقا من نقطة التماس A، في اتجاه الشعاع AB، بجوديزية وعرّف عليها وسيطا قانونيا بحيث يكون المشتق بالنسبة لهذا الوسيط عند النقطة A مطابقا للشعاع AB؛ اختر النقطة الموافقة للقيمة $r = 1$ (يسمى هذا التطبيق تطبيقا اسياً). اثبت ان مشتقة غير منحل.

13 . توجيه. استخدم نتيجة التمرين 12 ، اختر جوارا كرويا صغيرا بكفاية للنقطة A .

14 . توجيه. كوّن الشكل d_{s^2} . إذا وصف $r(u)$ وَ $\rho(v)$ دائرتين، مثلا ، فإنه لا توجد قطع مستقيمة على السطح S .

15 . توجيه. يتشكل المحل الهندسي لنقاط تقاطع السطح المعطى π_2 مع اي مستو ثنائي وناظمي، من النقاط المنعزلة.

16 . توجيه. بدون الماس بعمومية المسألة، يمكننا اعتبار اشعة اساس المستوى الماسة مطابقة لأول اشعة اساس الفضاء R_n ، البالغ عددها l . عندئذ يأخذ كل شعاع واحدي ناظمي الشكل:

$$m = (0, \ldots, 0, \omega_{l+1}, \ldots, \omega_n),$$

حيث

$$\omega_{l+1}^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1.$$

بتطبيق نظرية التابع الضمني، عبّر عن احداثيات نقاط المقطع الناظمي التام بوصفها توابع لوسيط.

17 . توجيه. طبق الطريقة 13.5 .

18 . توجيه. اجر الحساب المماثل للذي ورد في 23.5 .

19 . توجيه. نفس التوجيه السابق.

20 . توجيه. قم باستدلال مماثل للبرهان على نظرية بوني 34.5 .

21 . توجيه. هناك نقطة شاذة على المخروط.

الفصل 6

1 . توجيه. استخدم الاحداثيات الكروية.

2 . توجيه. استخدم تعريف المشتقات المتغايرة.

3 . توجيه. التوجيه السابق.

4 . توجيه. يتحقق من اجل هذا التعريف للترابط التوازي المطلق؛ لكن الإنشاء 54.6 يمكن ان يؤدي الى انحراف رئيسي للنقطتين C و E.

5 . توجيه. استخدم المعادلة التفاضلية للإنسحاب.

6 . توجيه. التطبيق الموافق لذلك من الفضاء الماس على المنوعة يحوّل الاشتقاق العادي عند النقطة A الى الاشتقاق المتغاير.

الفصل 7

1 . توجيه. طبق المساواة $\sum_{(i)} = \sum_{(\alpha)} \sum_{O(i)=\alpha}$

2 . الجواب. C^{k}_{n+k-1}.

3 . توجيه. اعتبر $A(\underset{1}{x}, \underset{2}{x}) - A(\underset{2}{x}, \underset{1}{x})$ و $A(\underset{1}{x}, \underset{2}{x}) + A(\underset{2}{x}, \underset{1}{x})$.

4 . توجيه. قارن بين ابعاد ثلاثة فضاءات موافقة لذلك.

5 . توجيه. يأتي التأكيد الاول بواسطة الحساب اما الثالث فينتج من الاول.

6 . توجيه. انشر الشكل $\mathrm{Sym}\, \underset{1}{\xi}^{\alpha_1} \dots \underset{k}{\xi}^{\alpha_k}$ وفق الاشكال المتناظرة الاولية. قارن المعاملات نتيجة التمرين 5 .

8 . توجيه. عمم نتيجة التمرين 5 المكتوبة من اجل الاشكال ذات الدرجة الاولى.

9 . توجيه. استخدم 31.7 ـ ب.

10 . توجيه. استخدم الاشكال $\xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_k}$.

11 . توجيه.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \qquad P^{-1} = \left\| \frac{A_{ij}}{\det P} \right\|$$

12 . توجيه. استخدم التمرين 11 .

13 . توجيه. استخدم 61.7(3).

14 . توجيه. استخدم التمرين 8 .

15 . توجيه. التوجيه السابق.

16 . توجيه. استخدم التمرينين 11 وَ 12 باعتبار P كمصفوفة متعامدة.

17 . توجيه. اعتبر في البداية شكلا وحيد الحد.

18 . توجيه. طبق نظرية ستوكس - بوانكري.

الدليل العلمي

Additivité d'une mesure .... جمعية قياس

Aler d'une sphère .... مساحة سطح كرة

d'une sruface .... سطح

d'un tore .... طارة

Alternation .... مناوبة

Alternation .... تطبيق

conforme .... امتثالي

Contractante .... مقلص

inverse .... مقلوب، عكسي

Jordanienne .... جورداني

Sphérique .... كروي

Bivecteur .... شعاع مكرر

unité .... الوحدة

Branches d'une courbe .... فروع منحنى

Caractéristique d'un multinumero .... مميزة رقم متعدد

Caténoide .... كاتينويد

Cellule .... خلية

Centre d'une droite .... مركز مستقيم

de gravité .... ثقل

Chaîne .... مسلسلة

Chaînes équivalentes .... مسلسلات متكافئة

Champ de Biot et Savart .... حقل بيوت وسافار

harmonique .... توافقي

newtorien .... نيوتني

Potentiel .... كمون، كوني

symétrique sphérique .... تناظري كروي
tensotiel .... موتري
vrectoiel .... شعاعي
Changement de variables dans .... تبديل المتغيرات في
une intérale .... تكامل
Charge .... شحنة
normale .... نظيمية
Charges équivalentes .... شحنات متكافئة
Circulation .... دوران
Codifférentielle .... تفاضلية قرينة
Coefficients de distorsion .... معاملات العوج
Coefficients de connexion .... معاملات الترابط
Composition de fonctions .... تركيب التوابع
Condition de Lipschitz .... شرط ليبشيتز
Connexion affine .... ترابط تآلفي
- symetrique .... - تناظري

riemannienne .... ريماني
Contraction d'un tenseur .... تقلص موتر
Contravariance .... تغاير عكسي، ضدي
Convergence absolue d'une .... تقارب مطلق لتكامل
intégrale impropre .... موسع
Coordonnées sphériques .... احداثيات كروية
Corps jordanien .... حقل جورداني
Couche .... طبقة
Courbe lisse .... منحنى مرن
Courbure d'une courbe us une surface .... انحناء منحنى على سطح
d'un espace riemannien dans .... فضاء ريماني في
une driection bidimensionnelle .... منحنى ثنائي البعد

forcée .... قسري
géodésique .... جيوديزي
de Gauss .... غوس
- formelle .... ـ الشكلي
moyenne .... متوسط
normale .... ناظمي ، نظيمي
totale .... كلي
Courbures principales .... انحناءات رئيسية
Covariance .... تغاير
Cycle .... دورة
Demi-anneau .... نصف حلقة
Densité .... كثافة
Dérivation .... اشتقاق
formelle .... شكلي
Dérivée .... مشتق
Contravariante .... متغاير عكسيا
Covariante .... متغاير
d'une fonction implicite .... تابع ضمني
- inverse .... ـ عكسي ، مقلوب
d'ordre supérieur .... من رتبة عالية
Partielle .... جزئي
Par rapport à sous-espace .... بالنسبة لفضاء جزئي
suivant une direction .... وفق منحنى
- une ligne .... ـ خط
Deuxième forme quadratique .... شكل تربيعي ثان
Differentielle .... تفاضلية
absolue .... مطلقة
d'une forme .... شكل

géodésique	جيوديزية
d'odre supérieur	من رتبة عالية
- partielle	ـ جزئية
, son invariance	، عدم تغيير
Direction asymtotique	منحنى مقارب
Directions principales	مناحي رئيسية
Distance d'un point à un ensemble	مسافة بين نقطة ومجموعة
Divergence	تباعد
Domaine admissible	ساحة مقبولة
Elément inverse	عنصر مقلوب
- à droite	ـ من اليمين
- à gauche	ـ من اليسار
Ensemble élémentaire	مجموعة اولية
jordanien	جوردانية
négligeable	قابلة للاهمال
Equation différentielle	معادلة تفاضلية
de Poisson	لبواسون
Equations tensorielles	معادلات موترية
Equivalence affine	تكافؤ تآلفي
Espace chargé	فضاء مشحون
normalement chargé	ناظميا او نظيميا
riemannien de courbure constante	ريماني انحناؤه ثابت
- élémentaire	ـ اولي
Espaces riemanniens équivalents	فضاءات ريمانية متكافئة
Exemple de schwartz	مثال شفارتز
Extrémum	قيمة قصوى
lié	مقيدة
Flux d'un champ vectoriel	تدفق حقل شعاعي

Fonction .... تابع
additire .... جمعي
Caractéristique .... مميز
Composée .... مركب
Continue .... مستمر
dérivable .... قابل للإشتقاق
- *p* fois .... ـ *p* مرة
- par rapport à sous-espace .... ـ بالنسبة لفضاء جزئي
fortement additive .... جمعي بقوة
harmonique .... توافقي
implicite .... ضمني
intégrable .... قابل للمكاملة
inverse .... عكسي
linéaire .... خطي
numérique .... عددي
de *n* variables réelle .... لِـ *n* متغيرا حقيقياً
réelle .... حقيقي
d'une variable réelle .... لمتغير حقيقي
vectorielle .... شعاعي
Forme anti-symétriue .... شكل ضد تناظري
- canonique .... ـ قانوني
de degré *p* .... درجتة *p*
différentielle .... تفاضلي
- adjointe .... ـ قرين
multilinéaire .... متعدد الخطية
- antisymétrique تناظري ضد
- symétrique .... ـ تناظري
-- élémentaire .... ـ ـ أولي

Formule d'Euler .... دستور أولر

de Gauss .... غوس

- de defivation .... ـ الاشتقاق

de Green .... غرين

de Meusnier .... موني

d'Ostrogradski .... اوستروغرادسكي

de Peterson-Codazzi .... بيترسون ـ كودازي

de Poisson .... بواسون

de Stokes .... ستوكس

de Taylor .... تايلور

Formules de dérivation .... دساتير الاشتقاق

Frontièer d'une chaîne .... حافة مسلسلة

d'un ensemble .... مجموعة

Géométrie intrinsèque .... هندسة مميزة

Gradient .... تدرج

Graphique .... خط بيان

Hamiltonien .... هاميلتوني

Hélicoïde .... سطح لولبي

Homothétie .... تحاك

Identité de Poincaré .... متطابقة بوانكري

de Ricci .... ريكسي

de Stokes-Poincaré .... ستوكس ـ بوانكري

Image réciproque complète .... صورة عكسية تامة

Indicatrice de Dupin .... دليلة، مخبرة دوبين

Inégalité de Harnack .... متراجحة هارناك

Intégrale .... تكامل

d'un champ vectoriel .... حقل شعاعي

de Dirichlet .... ديركليت

imroper avec une singularité variable .... موسع بشذوذ متغيّر
- de 1ère éspèce .... ـ من النمط الاول ـ
- de 2ème éspèce .... ـ من النمط الثاني
- de 3ème éspèce .... من النمط الثالث
itérée .... مكرر
n-uple .... مضاعف n مرة
Sur un ensemble jordanien .... على مجموعة جوردانية
Intégrale de surface .... تكامل سطح
Intégration des formes différentielles .... مكاملة الاشكال التفاضلية
Jacobien .... يعقوبي
Lemniscate .... منحن ذو عروتين، لمنسكات
Ligne géodésique .... خط جيوديزي
de courbure .... انحناء
de niveau .... مستوى، استواء
de la plus rapide ascendance .... الاسرع صعوداً
de striction .... انقباض
Matrice de Jacobi .... مصفوفة يعقوبية
Maximum local .... قيمة عظمة محلية
- lié .... ـ مقيدة
Mesure .... قياس
Méthode itérative .... طريقة تكرارية
Minimum local .... قيمة قصوى صغر محلية
- lié .... ـ مقيدة
Moment statique .... عزم سكون، سكوني
Multinuméro .... رقم متعدد
Complémentaire .... مكمل
ordonné .... مرتب
strict .... ضيق

strictement ordonné .... مرتب تماما

Multiplication de tenseurs .... ضرب الموترات

Notation canoniqne (première) d'une .... رمز قانوني (أول)

forme antisymétrique .... لشكل ضد تناظري

- (deuxième)- .... - (ثان) -

Noyau d'une appliation .... نواة تطبيق

Numéro .... رقم

Opérateur hamiltonien .... مؤثر هاميلتوني

de Laplace .... لا بلاس

- Beltrami .... - بيلترامي

Ordination .... مرتبة

orientabilite .... قابلية التوجيه

Ovales de Cassini .... بيضويات كاسيني

Paraboloïde elliptique .... مجسم مكافيء ناقص

hyperbolique .... - زائدي

de révolution .... - دوراني

Parallélépipède k-dimensionnel .... متوازى وجوه ذو بعد l

Parallèles géodésiqnes .... خطوط العرض الجيوديزية

Parallélisme absolu .... تواز مطلق

Paramètre canonique .... وسيط قانوني

Pbrtition suivante .... تجزئة تابعة

Pavé .... بلاطة

Plan équilibrant .... مستو موازن

Pli .... ثنية

Point elliptique .... نقطة ناقصية

hyperbolique .... زائدية

jordanien .... جوردانية

méplat .... مستعرضة

Parabolique	مكافئية
stationnaire	مستقرة
Potentiel	كمون
Première forme quadratique	شكل تربيعي أول
Principe de Cavalieri	مبدأ كافاليري
de localisation pour les integrales	المحلية للتكاملات
impropres	الموسعة
Problème inverse de l'analyse vectorielle	مسألة معاكسة للتحليل الشعاعي
Produit cartésien	جداء ديكارتي
d'espaces chargés	لفضاءات مشحونة
géneralisé	معمم
tensoriel des formes	موتري للأشكال
- alterné	ـ متناوب
vectoriel	شعاعي
Projecteur	مسقط
Propriétés absolues	خاصيات مطلقة
Pteudo-sphère	شبه سطح كرة
Rang d'un tenseur	مرتبة موتر
Règle de Sylvester	قاعدة سيلفستر
Rigidité de durfaces multidimensionnelles	صلابه سطوح متعددة الأبعاد
Rotation d'un champ vectoriel	دوران حقل شعاعي
Rotationnel	دوار
Ruban de Möbius	شريط موبيوس
Schéma aux différences	جداول ذات فروق
Section normale	مقطع ناظمي
_complète	ـ تام

_élémentaire .... ـ اولي

Simplexe .... بسيط

Somme directe .... مجموع مباشر

Suite exhaustive .... متتالية معمقة

Suites en forme de delta .... متتاليات في شكل دلتا

Surface admissible .... سطح مقبول

fermée .... مغلق

de niveau .... مستوى ، استوا

de révolution .... دوراني

Surfaces antiéquivalentes .... سطوح متكافئة ضديا او عكسيا

équivalentes .... متكافئة

Symboles de Christoffel .... رموز كريستوفال

Symétrie de dérivées mixtes .... تناظر المشتقات المختلطة

de la dérivée seconde .... المشتق الثاني

de dérivées d'ordre supérieus .... المشتقات ذات الرتب العالية

Systèmes de coordonnées admissibles .... جمل الاحداثيات المقبولة

Semi-geódesiqves ed Coor données .. نصف جيوديزية للاحداثيات

Tangente .... مماس .

Tenseur .... موتر

antisymétrique .... ضد تناظري

de courbure .... انحناء

Tenseur métrique .... موتر متري

- dérivé .... ـ مشتق

Symétrique .... متناظر

du type Ricci .... من نمط ريكسي

Théorème de Bonnet .... نظرية بوني

de clairaut .... كليرو

sur la fonction implicite .... حول التابع الضمني، التوابع الضمنية

de Frobenius .... فروبينيوس

de Gauss (sur la courbure totale) .... غوس (حول الانحناء الكلي)

–(sur le triangle géodésique) .... – (حول المثلث الجيوديزي)

de Hilbert .... هيلبرت

de Janet-E. Cartan .... جانت ـ كارتان

de Levi -Civita .... لوفي ـ سيفيتا

de Meusnier .... موني

de la moyenne .... المتوسط

du rang .... المرتبة

Torsion d'une connexion .... التواء ترابط

Tractrice .... منحنى الجر

Transformation de Fourier n-uple .... تحويل فوريي من الرتبة n

Translation .... انسحاب

Valeur moyenne d'une fonction .... قيمة متوسطة لتابع

Variété differentiable élémentaire .... منوعة قابلة للمفاضلة أولية

Variétés équivalentes .... منوعات متكافئة

Volume d'une boule .... حجم كرة

d'um ensemble jordanien .... مجموعة جوردانية

d'un parallélépipède .... متوازى وجوده

d'un simplexe .... بسيط

d'un tore .... طارة

الفهرس